

чале расчета учитываются наиболее опасные комбинации нагрузок.

По изложенному алгоритму составлена программа на алгоритмическом языке Автокод "Инженер" для расчета на ЭВМ "Минск-22М". Блок-схема программы приведена на рис. 2.

Л и т е р а т у р а

1. Солодов Е. П. Учет нелинейных факторов при расчете вантовых комбинированных систем. В сб. "Строительные конструкции и теория сооружений". Вып. 2. Минск, 1974.

И. С. Сыровашко

УДК 624.041.2.

К РАСЧЕТУ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ С ЧАСТОТОЙ КОЛЕБАНИЙ НЕ НИЖЕ ЗАДАННОЙ

В работе рассматривается задача отыскания упругой статически неопределимой фермы наименьшего объема при соблюдении условий прочности, жесткости, ограничения на основную частоту собственных колебаний и конструктивных ограничений.

Задаемыми считаются геометрия и материал, внешняя узловая нагрузка и предельные допустимые значения напряжений в стержнях, перемещений узлов и основной частоты собственных колебаний. Минимальные площади поперечных сечений стержней назначаются из условия обеспечения устойчивости по предельным значениям гибкости той или иной группы стержней.

Как было показано в работе [1], аналогичная задача для статически определимых систем представляет собой модель выпуклого математического программирования и может быть решена методом возможных направлений. Однако для статически неопределимых ферм в ограничения задачи необходимо дополнительно ввести условия совместности деформаций. Эти условия выражаются в виде нелинейных равенств

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i l_i}{E F_i} = 0; (j=1, \dots, m), \quad (1)$$

где N_i - полное усилие в i -ом стержне; $\bar{N}_i$ - усилие в i -ом стержне от действия лишней неизвестной $X_j = I$; n - число стержней; m - число лишних неизвестных. Метод возможных направлений в обычной форме не позволяет решать задачу оптимизации, в состав ограничений которой входят нелинейные равенства. Поэтому для решения данной задачи предлагается использовать сочетание методов возможных направлений и штрафных функций [2], [3].

Суть такого комбинированного подхода состоит в том, что задача условной минимизации функции цели $f(x) \rightarrow \min$ со смешанными ограничениями

$$g_i(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, k;$$

$$h_j(x) = 0, \quad j=k+1, \dots, k+m$$

заменяется условной минимизацией новой целевой функции

$$f(x) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\tau_j} [h_j(x)]^2 \rightarrow \min$$

с ограничениями в форме неравенств $g_i(x) \leq 0$,

где $\tau_j > 0$ - изменяющаяся скалярная величина, причем $\tau_j^{k+1} < \tau_j^k$. Выражение $\sum_{j=1}^m \frac{1}{2\tau_j} [h_j(x)]^2$ представляет собой квадратичную функцию штрафа, которая предотвращает блуждание поиска слишком далеко от ограничений в форме равенств.

Таким образом, задача оптимизации статически неопределимой формы при заданных условиях может быть сформулирована как модель математического программирования и представлена в следующем виде.

Найти минимум целевой функции

$$V(F, x) = \sum_{i=1}^n F_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\tau_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_i \varepsilon_i}{E F_i} \right)^2 \quad (2)$$

при ограничениях:

на основную частоту собственных колебаний

$$g_1(F, x) = 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{\sum_{k=1}^s m_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{(N_i^2 + \sum_{j=1}^m x_j^2 \bar{N}_{ij})}{E F_i} \right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{(N_i^2 + \sum_{j=1}^m x_j^2 \bar{N}_{ij})^2 \varepsilon_i}{E F_i}} \leq 0; \quad (3)$$

на перемещение k -го узла

$$g_2(F, x) = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^n \frac{(N_i^2 + \sum_{j=1}^m x_j^2 \bar{N}_{ij}) \bar{N}_{ik} \varepsilon_i}{E F_i} - 1 \leq 0 \quad (4)$$

на прочность стержней

$$g_p(F, x) = \frac{|N_i^a + \sum_{j=1}^m x_j^a \bar{N}_{ij}|}{\bar{G}_i \bar{F}_i} - 1 \leq 0, \quad p=3, \dots, n+3; \quad (5)$$

на минимальные площади сечений стержней

$$g_t(F) = 1 - \frac{F_t}{\bar{F}_t} \leq 0, \quad t = n+4, \dots, 2n+4, \quad (6)$$

где N_i^a и N_i^m - соответственно усилие в i -ом стержне основной системы от внешней и условной узловой нагрузки $m_k y_k$; m_k и y_k - масса и перемещение k -го узла от статической нагрузки; x_j^a и x_j^m - усилие в j -ой лишней связи от внешней и условной узловой нагрузки $m_k y_k$; $\bar{N}_{ik}$ - усилие в i -ом стержне основной системы от силы $P = 1$, приложенной в k -ом узле; $\bar{\omega}$, $\bar{\Delta}_k$, $\bar{G}_i$, $\bar{F}_t$ - соответственно предельные допустимые значения основной частоты собственных колебаний, перемещения k -го узла, а также напряжения и площади сечения i -го стержня; S - число масс системы.

Сформулированная задача может быть решена предлагаемым комбинированным методом в следующем порядке.

1. Принимаются произвольные значения площадей сечений стержней $\bar{F}^A$, находящиеся в области допустимых решений и соответствующие им значения усилий в лишних стержнях $\bar{X}^A$. Выбираются скалярные величины $\delta > 0$, $0 < \delta_1 < \delta$, $\tau_j > 0$.

2. Из данной точки осуществляется спуск на границу области допустимых решений по направлению антиградиента целевой функции $\bar{g}^A = - \bar{\nabla} V(F, x)$, где $\bar{\nabla} V(F, x)$ - вектор градиента целевой функции. Шаг спуска в этом направлении t определяется как наименьший положительный корень уравнений

$$g_s(F_i^A + \bar{g}_i^A t_s, x_j^A + \bar{g}_j^A t_s) = 0, \\ l = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m; \quad s = 1, \dots, \nu$$

Новые значения переменных, лежащие в точке на границе допустимой области, определяются по зависимостям

$$\bar{F}^* = \bar{F}^A + \bar{g}^A t, \quad \bar{X}^* = \bar{X}^A + \bar{g}^A t.$$

3. По полученным переменным вычисляется значение целевой функции

$$V^*(F^*, X^*) = \sum_{i=1}^n F_i^* \bar{\omega}_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\tau_j} \left(\sum_{k=1}^n \frac{N_{ik} \bar{y}_k \bar{\omega}_i}{\bar{F}_i} \right)^2.$$

4. Осуществляется перемещение в направлении, ведущим

внутри допустимой области, вдоль которого значение целевой функции убывает. Для этого выявляется, к какой из ограничивающих поверхностей с заданной погрешностью δ принадлежит данная точка. Пусть ею оказалась поверхность, соответствующая ограничению

$$-\delta \leq g_s(F^*, x^*) \leq \delta.$$

Таких поверхностей, называемых активными в данной точке, может оказаться несколько.

Для определения возможного направления спуска решается задача линейного программирования, т.е. следует минимизировать формулу

$$U = \eta$$

при ограничениях

$$\frac{\partial V}{\partial F_1} \xi_1^0 + \frac{\partial V}{\partial F_2} \xi_2^0 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_m} \xi_{n+m}^0 - \eta \leq 0, \quad -1 \leq \xi_i^0 \leq 1, \\ -1 \leq \xi_i^0 \leq 1.$$

Значения β_s можно задавать любыми положительными числами. Эта величина играет роль "отталкивающего" фактора. При $\beta_s = 0$ направление спуска будет стремиться к касательной активной поверхности в данной точке. При слишком больших значениях β_s направление спуска приближается к касательной линии уровня целевой функции. В большинстве случаев значение $\beta_s = 1$ обеспечивает получение приемлемых результатов. Решение задачи линейного программирования дает компоненты вектора искомого направления $\bar{x}^0$ и значение целевой функции U . Если при этом оказалось, что $U \leq -\delta$, то следует перейти к пункту 5. Если $\delta \leq \delta_1$, то необходимо принять $\delta_1 = 0,5 \delta$, $\tau_j = 0,5 \tau_j$ и перейти к пункту 2. Если $\delta > \delta_1$, то принять $\delta = 0,5 \delta$ и перейти к пункту 3.

5. Вычисляется шаг спуска в полученном направлении как наименьший положительный корень уравнений

$$g_s(F_i^0 + \xi_i^0 t_s, x_j^0 + \xi_j^0 t_s) = 0, \\ i=1, \dots, n, j=1, \dots, m, s=1, \dots, \nu.$$

Здесь ν - число ограничений задачи.

6. Определяются новые значения переменных и значение целевой функции по зависимостям

$$F^1 = F^0 + \bar{x}^0 t, \quad \bar{x}^1 = \bar{x}^0 + \bar{x}^0 t,$$

$$V^1(F^1, x^1) = \sum_{i=1}^n F_i^1 t_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{t_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{N_i \bar{N}_j t_i}{E F_i} \right)^2.$$

Если $V^0 - V^1 \leq \epsilon$, где ϵ - заданная точность вычислений, то полученная точка считается оптимальной. В противном случае весь процесс, начиная с пункта 4, повторяется.

Л и т е р а т у р а

1. Коршун Л.И., Сыровяшко И.С. Расчет оптимальных шарнирно-стержневых систем с обеспечением заданных динамических характеристик. Тезисы докладов VI конференции молодых ученых и специалистов Прибалтики и ВССР по проблемам стройматериалов и конструкций. Таллин, 1973.

2. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М., "Мир", 1972.

3. Полак Э. Численные методы оптимизации. М., "Мир", 1974.

А.С.Хамутовский, А.Ф.Смирнов

УДК 624.041.2:681.142.2

МИНИМАЛЬНЫЙ ОБЪЕМ СТОЙКИ С ЗАДАННОЙ ФОРМОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ

Рассматривается вопрос о распределении материала по длине стойки переменного сечения с упругими связями, нагруженной вертикальной P и следящей T силами (рис. 1), при условии минимума объема и ограничениях по прочности и устойчивости. Частные случаи этой задачи для консольных и шарнирно опертых стоек при действии вертикальной силы рассматривались в работах [3 - 8].

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стойки имеет вид

$$y'' = \frac{-(P+T)y + (z_{11}\delta + T\frac{\delta}{2})x}{EJ_x} \quad (1)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0 & \quad y=0; \\ x=l & \quad y=\delta. \quad y' = \frac{z_{11}\delta l - P\delta}{z_{22}} \end{aligned}$$

Так как величина δ не определена, то при $x = l$

$$\frac{y'}{y} = \frac{z_{11}l - P}{z_{22}} \quad (2)$$