

циональные слоки, на которых отрабатываются напряжения $E_{\text{тс}}$ и $E_{\text{г}}$, эквивалентные удлинению нитей и перемещениям их концов. Источники $E_{\text{нi}}$ выполняются в виде трансформаторов, регулируемых по первичным обмоткам (вручную или электромеханически) автотрансформаторами. Моделирование производится на постоянном токе.

Модель (рис.3) уравнивается за 3-4 цикла итерации. В каждом цикле, изменяя напряжения $E_{\text{нi}}$, нужно получить нулевой ток ($J = 0$) в схемах-аналогах нитей.

Измеряя напряжения $E_{\text{нi}}$ на выходах трансформаторов, получаем распри H_i в каждом пролете. Для определения перемещений опор нитей с помощью лампового вольтметра измеряются напряжения на соответствующих конденсаторах. Таким образом, динамическая электронная модель многопролетной гибкой пологой нити из материала, не следующего закону Гука, на упругих опорах позволяет определить все виды основных неизвестных.

Л и т е р а т у р а

1. Качурин В.К. Статический расчет вантовых систем. Л., Стройиздат, 1969.
2. Овсянко В.М. Устройство для моделирования гибких стропильных нитей. Авторское свидетельство № 297047. Бюллетень "Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки", № 9, 1971.
3. Корн Г., Корн Т. Электронные аналоговые и аналого-цифровые вычислительные машины. Часть I. М., "Мир", 1967.
4. Пухов Г.Е., Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев, "Наукова думка", 1967.

Е.М.Сидорович

УДК 624.072

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Уравнения кинето-статики для произвольной геометрически нелинейной шарнирно-стержневой системы, отнесенные к возмущенному состоянию мгновенного равновесия, могут быть представлены

$$A(R)V + B(\Delta X)U + B(\Delta V)U = D - M\ddot{V}, \quad (1)$$

где $A(R)$ - блочно-диагональная, а $B(\Delta X)$ - блочно-столбцовая матрицы-операторы, блоки которых имеют вид:

$$A_i(R) = S_i R^* S_i^T \quad B_i(\Delta X) = S_i \Delta X_i^*;$$

S_i - усеченная матрица инцидентий, соответствующая незакрепленным в направлении i -ой координатной оси углам системы;

R - столбец погонных усилий в исходном состоянии равновесия; ΔX_i - столбец проекций длин стержней на i -ю координатную ось; верхний индекс $*$ (звездочка) означает операцию преобразования обозначенной ею матрицы-столбца в диагональную матрицу; верхний индекс T означает операцию транспонирования;

U - столбец изменений погонных усилий; V и P - блочные матрицы-столбцы, блоками которых являются столбцы проекций перемещений V_i и изменений внешних узловых сил P_i ; $B(\Delta V)$ - матрица-оператор, совпадающая по структуре с матрицей $B(\Delta X)$ но аргументом которой являются изменения проекций длин стержней ΔV_i ; последние связаны с перемещениями зависимостью

$$\Delta V_i = S_i^T V_i; \quad (2)$$

M - диагональная матрица масс системы, соответствующая столбцу ускорений $\ddot{V}$.

Для определенности задачи о движении шарнирно-стержневых систем уравнения кинето-статики (1) необходимо дополнить уравнениями деформируемых связей, так как в роли последних выступают стержни системы. По отношению к возмущенному состоянию мгновенного равновесия при условии, что стержни выполнены из линейно упругого, почти недеформируемого материала, эти уравнения могут быть записаны так:

$$C(\Delta X)V + \frac{1}{2} C(\Delta V)V - DU = 0, \quad (3)$$

где $C(\Delta X) = B^T(\Delta X)$; $C(\Delta V) = B^T(\Delta V)$;

D - диагональная матрица деформативностей, элементы которой равны отношениям кубов длин стержней к жесткостям последних на растяжение (сжатие). В случае, если

$$D_{\text{ст}} + D \neq 0, \quad (4)$$

т.е. ни один из стержней системы не является абсолютно недеформируемым, равенство (3) можно разрешить относительно U , и, подставив это решение в (1), получить уравнение движения шарнирно-стержневой системы в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} & [A(R) + B(AX)D^{-1}C(AX)]V + B(AV)D^{-1}C(AX) + \\ & + \frac{1}{2}B(AX)D^{-1}C(AV)V + \frac{1}{2}B(AV)D^{-1}C(AV)V = P - MV. \end{aligned} \quad (5)$$

Несмотря на пониженный порядок и относительную простоту, использование уравнения в перемещениях (5) связано с некоторыми неудобствами. Так оно неприменимо к системам, у которых хотя бы один из стержней является абсолютно недеформируемым (в этом случае условие (4) не выполняется). Кроме того, при реальных, немалых жесткостях стержней матрицы-произведения, содержащие сомножитель D^{-1} , оказываются плохо обусловленными, что в ряде случаев ведет к плохой устойчивости счета, особенно, если отдельные элементы D отличаются друг от друга на несколько порядков. В таких случаях вместо системы дифференциальных уравнений в перемещениях (5) следует рассматривать совместную систему алгебро-дифференциальных уравнений (1) и (3), причем алгоритмы расчета необходимо строить так, чтобы матрица D по возможности не участвовала непосредственно в обращении.

Дальнейшие выкладки будем вести применительно только к общей системе уравнений (1) и (3).

В теории нелинейных колебаний особое место занимает исследование решения так называемых порождающих уравнений нелинейной системы [1], которые, как правило, выбираются линейными и допускают хорошо известное периодическое решение, в окрестности которого и ищется периодическое решение исходных нелинейных уравнений. В нашем случае в качестве порождающих могут быть приняты уравнения, являющиеся результатом прямой линеаризации уравнений (1) и (3), а именно:

$$\begin{cases} A(R)V + B(AX)U = P - MV; \\ C(AX)V - DU = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Несмотря на то, что эти уравнения формально справедливы лишь для бесконечно малых отклонений системы от положения равновесия,

веса, они дают реальную возможность получить первое представление о характере колебаний произвольных шарнирно-стержневых систем, в том числе и изменяемых типов.

В частности, если предположить, что внешнее возмущение задано в форме

$$p = p_1 + p_2 \sin \varphi; \quad \varphi = \omega t + \psi, \quad (7)$$

где p_1 — постоянная составляющая, p_2 , ω , ψ — соответственно амплитуда, круговая частота и начальная фаза гармонической составляющей, а t — время, то решение системы (6) можно также искать в форме

$$V = V_1 + V_2 \sin \varphi, \quad U = U_1 + U_2 \sin \varphi, \quad (8)$$

где, как и в (7), выражение $\sin \varphi$ следует рассматривать как скаляр. Подставляя (7) и (8) в (6), сможем получить две независимые системы уравнений:

$$\begin{cases} A(R)V_1 + B(\Delta X)U_1 = p_1; \\ C(\Delta X)V_1 - DU_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} [A(R) - \omega^2 M]V_2 + B(\Delta X)U_2 = p_2 \\ C(\Delta X)V_2 - DU_2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Первая система дает возможность найти постоянные составляющие, а вторая — амплитуды гармонических составляющих искомым динамическим перемещениям и изменениям погонных усилий.

Отметим, что решение системы (9) не зависит от решения (10), т.е. постоянные составляющие динамических неизвестных не зависят от гармонических составляющих и наоборот.

В механическом отношении система уравнений (9) соответствует статическому расчету (в линеаризованной постановке) шарнирно-стержневой системы на действие постоянной составляющей внешней нагрузки. Система (10) применима к решению динамической задачи о малых колебаниях той же шарнирно-стержневой системы около положения исходного равновесия под воздействием

только гармонической составляющей внешней нагрузки. Если последняя отсутствует, то (10) описывает малые свободные колебания шарнирно-стержневой системы около исходного состояния равновесия, причем параметр ω в этом случае является собственной частотой колебаний.

Возвращаясь к исходным нелинейным уравнениям (1) и (3), предположим, что их решение при действии нагрузки (7) также можно найти в форме (8).

Подставляя (7) и (8) в (1) и (3) и следуя основному принципу гармонической линеаризации [2], согласно которому в первом приближении

$$\sin^2 \varphi \approx \frac{1}{2} = \text{const.}$$

получим вместо системы алгебро-дифференциальных (1) и (3) две системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A(R)V_1 + B(\Delta X)U_1 + B(\Delta V_1)U_1 = P_1 - \frac{1}{2} B(\Delta V_2)U_2; \\ C(\Delta X)V_1 + \frac{1}{2} C(\Delta V_1)V_1 - DV_1 = -\frac{1}{4} C(\Delta V_2)V_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} [A(R+U_1) - \omega^2 M]V_2 + B(\Delta X + \Delta V_1)U_2 = P_2, \\ C(\Delta X + \Delta V_1)V_2 - DV_2 = 0, \end{cases}$$

которые в отличие от системы (9) и (10) уже являются зависимыми, совместными. Постоянные составляющие динамических перемещений и изменений погонных усилий и искомые амплитуды гармонических составляющих взаимозависимы, причем гармоническое движение системы происходит, как следует из (12), относительно смещенного центра колебаний.

Отмеченная особенность сохраняется и в случае свободных колебаний ($P_1 = P_2 = 0$), приводя к нарушению их изохронности, т.е. к появлению функциональной зависимости частоты свободных колебаний от их амплитуды, что является основным свойством нелинейных колебательных системы.

Другие отличительные свойства гармонически линеаризованного решения рассмотрим на примере гармонических колебаний простейшей существенно нелинейной мгновенно-изменяемой системы.

изображенной на рис. 1 в состоянии статического равновесия. Уравнения (II) и (I2) для данной системы примут вид:

$$\begin{cases} zV_1 + V_1u_1 = \frac{1}{2} V_2 u_2; \\ \frac{1}{2} V_1^2 - du_1 = \frac{1}{4} V_2^2; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} (z + u_1 - \omega^2 m) V_2 + V_1 u_2 = P_2; \\ V_1 V_2 - du_2 = 0, \end{cases} \quad (14)$$

где все параметры являются скалярными.

Разрешив вторые уравнения систем (13) и (14) относительно u_1 и u_2

$$u_1 = \frac{V_1^2}{2d} + \frac{V_2^2}{4d}; \quad (15)$$

$$u_2 = \frac{V_1 V_2}{d}; \quad (16)$$

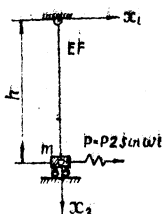


Рис. 1. Расчетная схема простейшей существенно нелинейной мгновенно изменяемой системы

исключим эти неизвестные из остальных уравнений. В результате получим:

$$\begin{cases} (z + \frac{V_1^2}{2d} + \frac{3V_2^2}{4d}) V_1 = 0; \\ (z - \omega^2 m + \frac{3V_1^2}{2d} + \frac{V_2^2}{4d}) V_2 = P_2. \end{cases} \quad (17)$$

Если в рассматриваемом исходном состоянии система не сжата ($z \geq 0$), то из первого уравнения (17) следует, что $V_1 = 0$,

и второе уравнение принимает вид:

$$V_2^3 + 4d(z - \omega^2 m)V_2 - 4dP_2 = 0. \quad (18)$$

Графическое решение уравнения (18) представлено на рис. 2 в виде амплитудно-частотной зависимости при фиксированном значении P_2 и имеет типичный для нелинейной колебательной системы вид.

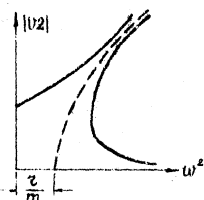


Рис.2. Графическое решение уравнения (18)

линеаризованное решение дало среднее значение этого усилия.

Таким образом, динамические перемещения исследуемой системы не имеют постоянной составляющей ($U_1 = 0$), а в динамических усилиях, наоборот, отсутствует гармоническая составляющая ($U_2 = 0$), т.е. они постоянны. Последнее обстоятельство объясняется тем, что в действительности изменения погонного усилия при колебаниях исследуемой системы знакопостоянны и происходят с удвоенной частотой. Гармонически

Л и т е р а т у р а

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.

Б.П.Солодов

УДК 624.045

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ВАНТОВЫХ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ДОПУСТИМОЙ ЖЕСТКОСТИ НА НЕСКОЛЬКО ЗАГРУЖЕНИЙ

Рассматривается задача расчета оптимальной по стоимости предварительно напряженной комбинированной системы типа "вантово-балочный мост" с одним качающимся пилоном и радиальным расположением вант. Предполагается, что на балку действует постоянная нагрузка, включающая собственный вес, и ряд независимых комбинаций внешних нагрузок. Вантовые элементы рассматриваются как нелинейно-упругие стержни, вертикальные перемещения оси балки ограничиваются в нескольких заданных сечениях.