мин $V^{(I)}$ = 0,00152 м³.

Выполняя действие 2 алгоритма, получаем оптимальное статически определимое решение: $\sigma_{21}^{(II)}$ = 23000,0 тс/м^2; $\sigma_{31}^{(II)}$ = = 21000,0 тс/м^2; $F_{21}^{(II)}$ = 0,000331 м^2; $F_{31}^{(II)}$ = 0,000209 м^2;
мин $V^{(II)}$ = 0,001288 м³.

Так как превращение системы в механизм не допускается, то данное решение является окончательным.

Уменьшение объема системы при учете упруго-пластической работы стержня 2-I (см.рис. I) составляет 15,26% по сравнению с упругим решением, при котором в стержне 2-I напряжение достигает предела текучести, и 21,8% по сравнению с упругим решением, когда предельные напряжения не превышают расчетного сопротивления материала.

Литература

I. Сафин Р.К. Расчет статически неопределимых стальных ферм с учетом пластических деформаций. Строительные конструкции (исследования и методы расчета), Казань, Таткнигоиздат, 1966.

2. Коршун Л.И. Практический метод оптимизации ферм с заданным очертанием осей. В сб. "Гидромелиорация и гидротехническое строительство", вып. 4. Киев, "Вища школа", 1976.

А.А.Крючков

УДК 539.3

СИНТЕЗ ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ФУНКЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Использование функции напряжений или деформаций, через которую выражаются неизвестные плоской или пространственной задачи теории упругости, во многих случаях облегчает и упрощает решение этих задач. Общие свойства этих функций достаточно хорошо изучены [2, 4], однако конкретные примеры их применения пока ограничены немногочисленными разрозненными данными [5, 7].

Предлагаемый универсальный метод дает возможность формировать любую из бесчисленных функций напряжений или деформаций. Рассмотрим его на простом и известном примере функции напряжений $F(x,y)$ плоской задачи, удовлетворяющей уравнениям равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{I}$$

Положим

$$\sigma_x = \frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial_x^{\alpha} \partial_y^{\beta}}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^{\gamma+\delta} F}{\partial_x^{\gamma} \partial_y^{\delta}}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^{a+b} F}{\partial_x^{a} \partial_y^{b}}, {}^{*} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b$ — неопределенные (неизвестные) показатели степени дифференцирования. По смыслу задачи — это целые числа, положительные из которых (I,2,...) говорят о первой, второй и т.д. частной производной; отрицательные (-I,-2,...) — о "противоположной" операции, т.е. об однократном, двукратном и т.д. "частном интегрировании" по переменной n (обозначаем $\int_n F$, $\iint_{nn} F$, ...); нуль — об отсутствии операции. Подстановка (2) в (I) дает

$$\begin{cases} \frac{\partial^{\alpha+\beta+1} F}{\partial_x^{\alpha+1} \partial_y^{\beta}} - \frac{\partial^{a+b+1} F}{\partial_x^{a} \partial_y^{b+1}} = 0 \\ -\frac{\partial^{a+b+1} F}{\partial_x^{a+1} \partial_y^{b}} + \frac{\partial^{\gamma+\delta+1} F}{\partial_x^{\gamma} \partial_y^{\delta+1}} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Для обращения (3) в тождество показатели при ∂_x (∂_y) в знаменателях каждого из уравнений (3) должны быть одинаковыми. Сравнение этих показателей дает линейную систему четырех уравнений относительно шести неизвестных:

$$\begin{cases} \alpha+1 = a, \quad a+1 = \gamma \\ \delta+1 = b, \quad b+1 = \beta \end{cases} \quad (4) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \alpha+1 = a = \gamma-1 \\ \delta+1 = b = \beta-1 \end{cases} \quad (4a)$$

Любое из бесчисленных решений получим, задаваясь двумя неизвестными (по одному значению в строке) и определяя по (4) или

---

* Принято отрицательным для удовлетворения (I) при подстановке (2) в (I).

(4а) остальные четыре. В дальнейшем рассматриваем только "изотропные" решения, одинаковые по операциям относительно переменных x и y. Так, если в нашем примере для получения σ_x функция F дифференцируется по переменной x "m" раз, то столько же раз надо ее продифференцировать по y для получения σ_y, откуда из (2) следует, что $\alpha = \delta$.

Полагая $\alpha = \delta = 0$, имеем по (4а): $a = b = 1, \gamma = \beta = 2$.
-"- $\alpha = \delta = -1$ -"- $a = b = 0, \gamma = \beta = 1$.
-"- $\alpha = \delta = -2$ -"- $a = b = -1, \gamma = \beta = 0$.

Соответствующие формы $F(x, y)$ даны в столбцах I–III табл.I (постоянные интегрирования опущены).

Таблица I

	I	II	III
σ_x	$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	$\int_x \frac{\partial F}{\partial y}$	$\iint_{x\,x} F$
σ_y	$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$	$\int_y \frac{\partial F}{\partial x}$	$\iint_{y\,y} F$
τ_{xy}	$-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$-F$	$-\iint_{x\,y} F$

Таблица 2

	I	II	III
ε_x	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$	$\int_y \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\iint_{y\,y} \Phi$
ε_y	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$	$\int_x \frac{\partial \Phi}{\partial y}$	$\iint_{x\,x} \Phi$
γ_{xy}	$2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$	2Φ	$2\iint_{x\,y} \Phi$

Первая из них – известная функция Эри [7], "минимальная" (по порядку производных) дифференциальная форма, вторая – "смешанная" интегро-дифференциальная форма, и третья – "минимальная" (по порядку интегрирования) интегральная форма. Соответствующие $-2 > \alpha = \delta > 0$ формы более высоких порядков практического интереса не представляют.

Аналогично определяем вид функции деформаций $\Phi(x, y)$ плоской задачи, удовлетворяющей уравнению совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (5)$$

полагая

$$\varepsilon_x = \frac{\partial^{\alpha+\beta} \Phi}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^{\gamma+\delta} \Phi}{\partial x^{\gamma} \partial y^{\delta}}; \quad \gamma_{xy} = 2\frac{\partial^{a+b} \Phi}{\partial x^{a} \partial y^{b}}, \qquad (6)$$

Из системы
$$\begin{cases} \alpha = a+1 = \gamma+2 \\ \delta = b+1 = \beta+2 \,, \end{cases} \qquad (7)$$
задаваясь $\alpha = \delta = 2$; I; 0, получаем в табл. 2 три аналогичные практически интересные формы.

В поисках вида функции напряжений $F\,(x, y, z)$ пространственной задачи полагаем
$$\sigma_x = 2\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} F}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}}, \quad \sigma_y = 2\frac{\partial^{\delta+\varepsilon+\eta} F}{\partial x^{\delta}\, \partial y^{\varepsilon}\, \partial z^{\eta}}, \quad \sigma_z = 2\frac{\partial^{\varkappa+\lambda+\mu} F}{\partial x^{\varkappa}\, \partial y^{\lambda}\, \partial z^{\mu}}$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^{a+b+c} F}{\partial x^{a}\, \partial y^{b}\, \partial z^{c}}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^{d+e+f} F}{\partial x^{d}\, \partial y^{e}\, \partial z^{f}}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^{g+h+k} F}{\partial x^{g}\, \partial y^{h}\, \partial z^{k}}, \qquad (8)$$
что после подстановки в уравнения равновесия (при отсутствии объемных сил) и сличения показателей приводит к системе 15 линейных уравнений относительно 18 неизвестных
$$\begin{cases} \alpha+1 = a = g = d-1 = \delta-1 = \varkappa-1, \\ \varepsilon+1 = b = e = h-1 = \beta-1 = \lambda-1, \\ \mu+1 = f = k = c-1 = \gamma-1 = \eta-1. \end{cases} \qquad (9)$$
Придавая $\alpha = \varepsilon = \mu$ значения 0; –I; –2 приходим к трем формам табл. 3, первая из которых (I) известна [7].

Задаваясь для функции деформацией $\Phi\,(x, y, z)$
$$\varepsilon_x = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \Phi}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}\, \partial z^{\gamma}}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^{\delta+\varepsilon+\eta} \Phi}{\partial x^{\delta}\, \partial y^{\varepsilon}\, \partial z^{\eta}}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial^{\varkappa+\lambda+\mu} \Phi}{\partial x^{\varkappa}\, \partial y^{\lambda}\, \partial z^{\mu}},$$
$$\gamma_{xy} = 2\frac{\partial^{a+b+c} \Phi}{\partial x^{a}\, \partial y^{b}\, \partial z^{c}}, \quad \gamma_{yz} = 2\frac{\partial^{d+e+f} \Phi}{\partial x^{d}\, \partial y^{e}\, \partial z^{f}}, \quad \gamma_{zx} = 2\frac{\partial^{g+h+k} \Phi}{\partial x^{g}\, \partial y^{h}\, \partial z^{k}}, \qquad (10)$$
после подстановки в уравнения совместности деформаций (при произвольных объемных силах) и сравнения показателей имеем
$$\begin{cases} \alpha = a+1 = g+1 = d+2 = \delta+2 = \varkappa+2, \\ \varepsilon = b+1 = e+1 = h+2 = \beta+2 = \lambda+2, \\ \mu = f+1 = k+1 = c+2 = \eta+2 = \gamma+2. \end{cases} \qquad (11)$$
Значения $\alpha = \varepsilon = \mu = 2$; I; 0 дают три формы табл. 4, одна из которых (I) известна [5]*.

* Решение П.Ф.Папковича в форме $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$, преобразующейся в (I) посредством уравнений Коши.

Таблица 3

	I	II	III
σ_x	$2\dfrac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2}$	$2\int\limits_x \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$	$2\iint\limits_{xx} F$
σ_y	$2\dfrac{\partial^4 F}{\partial z^2 \partial x^2}$	$2\int\limits_y \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$	$2\iint\limits_{yy} F$
σ_z	$2\dfrac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}$	$2\int\limits_z \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$	$2\iint\limits_{zz} F$
τ_{xy}	$-\dfrac{\partial^4 F}{\partial x \partial y \partial z^2}$	$-\dfrac{\partial F}{\partial z}$	$-\iint\limits_{xy} F$
τ_{yz}	$-\dfrac{\partial^4 F}{\partial y \partial z \partial x^2}$	$-\dfrac{\partial F}{\partial x}$	$-\iint\limits_{yz} F$
τ_{zx}	$-\dfrac{\partial^4 F}{\partial z \partial x \partial y^2}$	$-\dfrac{\partial F}{\partial y}$	$-\iint\limits_{zx} F$

Таблица 4

	I	II	III
ε_x	$\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$	$\iint\limits_{yz} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$	$\iiiint\limits_{yyzz} \Phi$
ε_y	$\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$	$\iint\limits_{zx} \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$	$\iiiint\limits_{xxzz} \Phi$
ε_z	$\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\iint\limits_{xy} \dfrac{\partial F}{\partial z}$	$\iiiint\limits_{xxyy} \Phi$
γ_{xy}	$2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$	$2\int\limits_z \Phi$	$2\iiiint\limits_{xyzz} \Phi$
γ_{yz}	$2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}$	$2\int\limits_x \Phi$	$2\iiiint\limits_{yzxx} \Phi$
γ_{zx}	$2\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}$	$2\int\limits_y \Phi$	$2\iiiint\limits_{zxyy} \Phi$

Все известные формы (I, табл. I-4) являются "изотропными" и минимально возможными по порядку дифференцирования. Подстановка их в обобщенные уравнения теории упругости для изотропного материала [6],

$$
\begin{gathered}
2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}\nabla^2(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0 \\
\frac{1-\nu}{1+\nu}\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0
\end{gathered}
\qquad (12)
$$

приводит к разрешающему бигармоническому уравнению относительно Φ и уравнению 6-го порядка относительно F. Для практического использования этих уравнений необходимы дополнительные исследования по реализации граничных условий. В общем случае материала с переменной анизотропией перспективно применение вариационно-разностного метода [I,3]. Возможности использования смешанных и минимальных интегральных форм (П,Ш) проблематичны.

Литература

I. Вайнберг Д.В.,Геращенко В.М., Ройтфарб И.З., Синявский А.Л. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом. В сборнике "Сопротивление материалов и теория сооружений". Вып. I Киев, "БудIвельник", 1965.

2. Крутков Ю.А. Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. М., АН СССР, 1949.

3. Крючков А.А. Исследование плоского напряженного состояния прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины на основе вариационно-разностных уравнений. В сборнике докладов XXУI научно-технической конференции БПИ. Материалы секции строительной механики. Минск, БПИ, 1970.

4. Лурье А.И. Теория упругости. М., Физматгиз, 1970.

5. Папкович П.Ф. Теория упругости. М.,Оборонгиз, 1939.

6. Треффц Е. Математическая теория упругости. Л.-М., Техтеориздат, 1932.

7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости, изд. 4. М., Физматгиз, 1959.

В.М.Овсянко

УДК 624.072.33

РАСЧЕТ РАМ СО СТОЙКАМИ РАЗНОЙ ДЛИНЫ НА ЭМСС-7М С АВТОМАТИЧЕСКИМ УРАВНОВЕШИВАНИЕМ МОДЕЛИ

Применяемая в практике строительных расчетов серийная вычислительная машина ЭМСС-7М (электрическая модель стержневых систем), в основу которой положена П-образная схема-аналог изгибаемого стержня (рис. I) [I] , имеет существенный недостаток, заключающийся в необходимости итерационного многоциклового ручного уравновешивания модели стержневой системы, т.е. ручной регулировки напряжений, эквивалентных перекосам стержней. Каждая схема перекоса в машине содержит регулируемый вручную автотрансформатор. Ручное уравновешивание модели значительно снижает эффективность установки, усложняет решение и ограничивает круг задач, решаемых на ЭМСС-7М. Так, например, рамы со стойками разной длины рассчитывать на этой установке оказалось невозможным.

Рассмотрим способ, позволяющий полностью исключить ручное уравновешивание и присущие ему недостатки за счет применения