

полупространстве. „Механика“, № 4, 1952.

4. Киселев В.А. Расчет пластин. М., Стройиздат, 1973.

Г.А.Герашенко

УДК 539.3

УТОЧНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА
В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В последние годы для расчета континуальных систем широко применяется метод конечных элементов в перемещениях [1, 2, 6]. Порядок получаемой системы канонических уравнений и сходимость метода существенно зависят от выбора расчетной модели конечного элемента, т.е. числа степеней свободы и поля перемещений в нем. В многочисленных предлагаемых моделях основное внимание уделяется соблюдению условий сплошности континуума, условия же равновесия, как правило, не рассматриваются [5]. В предлагаемой модели соблюдали оба указанных условия.

Рассмотрим для определенности задачу расчета пологих оболочек с использованием прямоугольного элемента (рис. 1). Реакции в связях можно определить по формуле

$$Z_{ij} = \int_0^a \int_0^b (T_{ij} \varepsilon_{il} + S_{ij} \gamma_i + T_{2j} \varepsilon_{2i} + G_{1j} \omega_i + 2H_j \omega_i + G_{2j} \varkappa_{2i}) dx dy, \quad (1)$$

где $T_{ij}, S_{ij}, T_{2j}, \dots$ - погонные усилия, вызванные единичным смещением связи j ;
 $\varepsilon_{il}, \gamma_i, \varepsilon_{2i}, \dots$ - деформации срединной поверхности в единичном состоянии i .

Выражив последние через перемещения u_i, v_i, ω_i по общеизвестным формулам теории тонких оболочек [3], представим реакции в виде суммы

$$Z_{ij} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (2)$$

слагаемые которой определяются по формулам

$$S_1 = \int_0^a \int_0^b \left\{ - \left[\frac{\partial T_1}{\partial x} j + \frac{\partial S_1}{\partial y} j \right] u_i - \left[\frac{\partial S_2}{\partial x} j + \frac{\partial T_2}{\partial y} j \right] v_i + \right.$$

$$\left. + [k_1 T_{1j} + 2k_{12} S_{1j} + k_2 T_{2j} - \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} j - \frac{2\partial^2 H}{\partial x \partial y} j - \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial y^2} j] w_i \right\} dx dy. \quad (3)$$

$$S_2 = \int_0^b \left[I_j u_i + S_j v_i + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} j + 2 \frac{\partial H}{\partial y} j \right) w_i - \sigma_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x} i \right]_0^a dy; \quad (4)$$

$$S_3 = -2H_j \omega_i \Big|_0^a. \quad (5)$$

S_3 записывается по аналогии с S_2 .

Выражения в квадратных скобках интеграла S_1 представляют собой левые части однородных уравнений равновесия элемента. Если их удовлетворить точно или с высокой степенью приближения, то S_1 можно положить равным нулю и определять реакции как работу контурных усилий на соответствующих им перемещениях. В этом смысле формула (3) показывает нам тот идеал, к которому нужно стремиться при назначении поля перемещений.

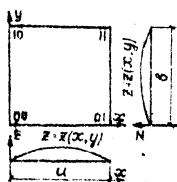


Рис. I. Прямоугольный конечный элемент оболочки двойной кривизны

Самый простой элемент имеет 20 степеней свободы [4], по пять степеней в каждом из четырех узлов: три линейных перемещения u_{ij} , v_{ij} , w_{ij} вдоль осей x , y , z и два угла поворота w_{ij}^x , w_{ij}^y относительно осей x , y (рис. I). Тангенциальные u , v и нормальные ω перемещения элемента принимаются независимыми друг от друга и выражаются через узловые перемещения (при принятии соглашения о суммировании А. Эйнштейна) следующим образом:

Суммирование А. Эйнштейна)

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_{ij} \phi_i(y) \phi_j(x); \quad (i, j = 0, 1) \\ v(x, y) &= v_{ij} \phi_i(y) \phi_j(x); \\ w(x, y) &= w_{ij}^x F_i(y) F_j(x) + w_{ij}^y F_i(y) F_j(x) + w_{ij}^z \psi_i(y) F_j(x), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\phi_0(x) = \frac{1}{a}(a-x); \quad \phi_1(x) = \frac{1}{a}x;$$

$$\begin{aligned}
 F_0(x) &= \frac{1}{a^3}(2x^3 - 3ax^2 + a^3); \\
 F_1(x) &= -\frac{1}{a^3}(2x^3 - 3ax^2); \\
 \Psi_0(x) &= \frac{1}{a^2}(x^3 - 2ax^2 + a^2x); \\
 \Psi_1(x) &= \frac{1}{a^2}(x^3 - ax^2).
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

При своей простоте зависимости (6) обладают рядом недостатков. Самый существенный из них, на наш взгляд, заключается в том, что они построены без учета уравнений равновесия и кривизн элемента, вследствие чего условия равновесия (в дифференциальной форме и для всего элемента в целом) не выполняются. Между тем имеется возможность построить более точную модель, сохранив для элемента те же 20 степеней свободы.

Поле перемещений элемента будем считать состоящим из двух частей: основного, определяемого формулами (6), и некоторого дополнительного. Именно с помощью последнего и осуществляется увязка условий равновесия.

Дополнительное поле перемещений можно представить, например, в виде линейной комбинации произведений симметричных и косимметричных функций:

$$\left.
 \begin{aligned}
 U^*(x, y) &= A_{kl} \Phi_k(y) \Phi_l(x); \\
 V^*(x, y) &= B_{kl} \Phi_k(y) \Phi_l(x); \\
 \omega^*(x, y) &= C_{kl} F_k(y) F_l(x), \quad (k, l = 2, 3)
 \end{aligned}
 \right\}
 \tag{8}$$

где

$$\left.
 \begin{aligned}
 \Phi_2(x) &= \frac{1}{a^2}(x^2 - ax); \\
 \Phi_3(x) &= \frac{1}{a^3}(2x^3 - 3ax + a^2x); \\
 F_2(x) &= \frac{1}{a^4}(x^4 - 2ax^3 + a^2x^2); \\
 F_3(x) &= \frac{1}{a^5}(2x^5 - 5ax^4 + 4a^2x^3 - a^3x^2).
 \end{aligned}
 \right\}
 \tag{9}$$

Функции (9), а также первые производные от $F_2(x)$ и $F_3(x)$ имеют нулевые значения на контуре элемента. Коэффициенты же A_{kl} , B_{kl} , C_{kl} и отличные от U_{ij} , V_{ij} ... уже не являются узловыми перемещениями. Они определяются из реше-

ния системы 12 линейных уравнений, обеспечивающих минимум потенциальной энергии деформации элемента или минимальную невязку уравнений равновесия. Матрица этой системы имеет симметричную структуру с большим числом нулевых элементов, а при отсутствии кривизны кручения ($K_{12} = 0$) и вовсе вырождается в квазидиагональную с блоками 3×3 . Поэтому ее обращение осуществляется весьма просто.

Матрицу жесткости элемента удобнее всего (с точки зрения машинной реализации алгоритма) представить в блочном виде

$$R = \begin{bmatrix} R_{00,00} & R_{00,01} & R_{00,10} & R_{00,11} \\ R_{01,00} & R_{01,01} & R_{01,10} & R_{01,11} \\ R_{10,00} & R_{10,01} & R_{10,10} & R_{10,11} \\ R_{11,00} & R_{11,01} & R_{11,10} & R_{11,11} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Здесь все блоки имеют одинаковую размерность 5×5 и объединяют в себе реакции, возникающие в связях узла m при единичных смещениях связей узла n ($m, n = 00, 01, 10, 11$). Они могут быть построены по единой формуле

$$R_{m,n} = \bar{R}_{m,n} + R_m A_n, \quad (11)$$

где $\bar{R}_{m,n}$ - матрица 5×5 (работа усилий основного состояния n на перемещениях основного состояния m); R_m - матрица 5×12 (работа усилий дополнительного состояния при $A_{ke} = B_{ke} = C_{ke} = I$ на перемещениях основного состояния m); A_n - матрица 12×5 (значения коэффициентов A_{ke} , B_{ke} , C_{ke} в состоянии n).

Применение предлагаемой уточненной модели конечных элементов существенно снижает их расчетное число, уменьшает порядок системы канонических уравнений и улучшает сходимость метода.

Рассмотренная методика распространяема на другие типы конечных элементов.

Л и т е р а т у р а

1. Венкевич О.К. Метод конечных элементов: от интуиции к общности, "Механика", № 6, 1970.

2. Розин Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ (метод конечных элементов). Л., "Энергия", 1971.

3. Назаров А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек. Л.-М., Стройиздат, 1966.

4. Городецкий А.С. Расчет пространственных конструкций методом конечного элемента. В сб. "ЭВМ в исследованиях и проектировании объектов строительства". Киев, "БудІвельІк", 1972.

5. Pian T.H.H. Derivation of Element Stiffness Matrices. „AIAA Journal“, Vol 2, №3, 1964.

6. Bognet F.K., Fox R.L., Schmit L.A. A Cylindrical shell Discrete Element. „AIAA Journal“, Vol.5, №4, 1967.

И.С. Грицув

УДК 624.072.233

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БАЛКИ-СТЕНКИ НА ОРТОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

В данной работе излагается итерационный метод определения деформаций и напряжений балки-стенки на грунтовых основаниях, обладающих различной степенью анизотропии. Для этого решается пространственная задача теории упругости анизотропного тела в перемещениях с применением конечно-разностного метода, предложенного Е.Ф. Винокуровым [2]. Грунтовое основание аппроксимируется пространственной решеткой с шагом $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, а балка-стенка - плоской сеткой с шагом $\Delta x \cdot \Delta z$ (см. рис. I).

Из-за неопределенности решения теории упругости по краям штампа первая точка сетки в балке-стенке расположена не на ее границе, а на расстоянии, равном $\Delta x/2$, что в свою очередь облегчает решение задачи при составлении уравнений равновесия.

Основные уравнения для определения перемещений и осадки жесткого штампа в ортотропном основании изложены в работе [4], где грунтовое основание представлено моделью слоя конечной толщины. Однако экспериментальными исследованиями установлено, что у многих видов грунтов по краям штампа, даже при незначи-