

Результаты оптимизации с учетом деформированной схемы и упруго-пластической работы элементов представлены в табл. 3 и говорят о том, что система находится в предельном физическом состоянии. Неучет деформированной схемы и упруго-пластической работы материала приводит к увеличению объема материала на 13,2%.

Л и т е р а т у р а

1. Сафин Р.К. Расчет статически неопределимых стальных ферм с учетом пластических деформаций. Строительные конструкции (исследование и методы расчета).—Казань, 1966. 2. Коршун Л.И. Метод поэтапной оптимизации статически неопределимых ферм в условиях реального проектирования. — Мат-лы Всесоюз. конф. "Проблемы оптимизации в механике твердого деформируемого тела". Тез. докл. Вильнюс, 1974, вып. 1. 3. Корноузов Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. — М., 1949. 4. Коршун Л.И., Климова Л.Б. Алгоритмический метод расчета на ЭЦВМ некоторых видов оптимальных стержневых систем по деформированной схеме. — В кн.: Краткие тез. докл. к конф. по применению ЭЦВМ в строит. механике, секция 4. Л., 1971. 5. Мацюлявичюс Д.А. Алгоритм уточнения сечений для синтеза упругой стержневой конструкции минимального веса в случае многих нагружений. — В кн.: Строит. механика. Докл. ХУ науч.-техн. конф. Каунас. политехн. ин-та. Вильнюс, 1965. 6. Коршун Л.И. Наиболее вероятные картины знаков усилий и их совокупности для статически неопределимых шарнирно-стержневых систем. — В кн.: 26-я науч.-техн. конф. ИИИ. Мат-лы секции строит. механики. Минск, 1970. 7. Коршун Л.И. Задача статического расчета оптимальных упругих стержневых конструкций на произвольные внешние воздействия. — Строительство и архитектура Белоруссии, 1972, № 3.

УДК 624.073

А.А.Крючков

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБА КРУГЛЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Круглые и кольцевые пластины переменной жесткости из композитных материалов с радиально-кольцевым армированием, ограниченно применявшиеся ранее в некоторых областях строи-

тельства, в настоящее время начинают широко использоваться в машиностроении. Современные аналитические методы расчета рассматриваемых пластин ограничены немногочисленными частными случаями изменения изгибной жесткости. Они неприложимы к практическим задачам расчета на произвольное распределение жесткостей для оптимизации пластин современными методами направленного или случайного поиска.

С достаточной для практики точностью задача решается методом сеток с выводом разностных уравнений методом Рунца из принципа минимума потенциальной энергии П [1]. Применяем регулярную радиальную сетку шага λ , θ , совпадающую с контурами пластины и ее ортогональных и щелевидных отверстий (рис. 1). Считая жесткости D , кривизны K и нагрузки q в ячейке площади F вокруг точки сетки постоянными, выражаем энергию изгиба V , кручения $V_{кр}$ и работу нагрузки A в каждой ячейке F из через прогибы w в узлах сетки. Суммируя ячейки с V и A вокруг узлов типа o , а с $V_{кр}$ - по точкам типа $+$ (рис. 1), получаем

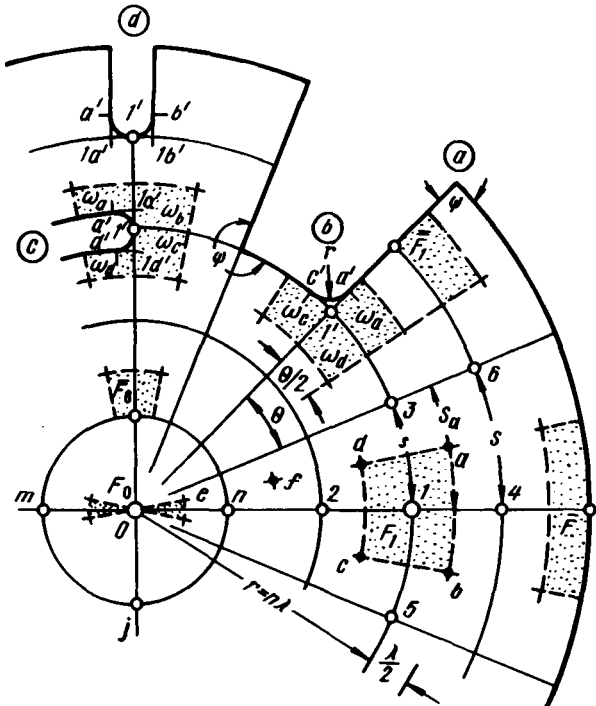


Рис. 1. Расчетная сетка изгибаемой пластины.

$$\Pi = \sum_{0,1,2,\dots} V_{\text{из}} + a, b, c \sum V_{\text{кр}} - \sum_{0,1,2,\dots} A = \min \quad (1)$$

и систему разрешающих уравнений (2) для определения w

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0, \quad (2)$$

т.е. для любого i :

$$\frac{\partial \sum V_{\text{из}}}{\partial w_i} + \frac{\partial \sum V_{\text{кр}}}{\partial w_i} = \frac{\partial \sum A}{\partial w_i}. \quad (3)$$

Правая часть выражения (3) с учетом $\sum A = \sum q F w$ дает

$$\frac{\partial \sum A}{\partial w_i} = q_i F_i, \quad (4)$$

где для внутренней точки $1 \quad F_1 = (n\lambda\theta) \lambda = n\lambda^2\theta$, для точки внешнего контура $\bar{F} = \left[\left(n - \frac{1}{4} \right) \lambda \theta \right] \frac{\lambda}{2} = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{8} \right) \lambda^2 \theta$, для точки внутреннего контура $\bar{F}_b = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{8} \right) \lambda^2 \theta$ (рис. 1).

В левой части уравнения (3) энергия кручения во внутренней точке a :

$$V_{\text{кр}} = \frac{1}{2} \cdot 4D_{\text{кр}} K_{r\theta}^2 F_a, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } K_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} = \\ &= \frac{(w_6 - w_3) - (w_4 - w_1)}{\lambda S_a} - \frac{1}{2} \left[\frac{(w_6 - w_4)}{RS} + \frac{(w_3 - w_1)}{rs} \right]. \end{aligned} \quad (5a)$$

Частное дифференцирование выражения (5) по w дает

$$\frac{\partial V_a}{\partial w_4} = - \frac{\partial V_a}{\partial w_3} = 4D_{\text{кр}} V [V(w_1 - w_3) + W(w_6 - w_4)] F_a; \quad (6)$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial w_6} = - \frac{\partial V_a}{\partial w_1} = 4D_{\text{кр}} W [V(w_1 - w_3) + W(w_6 - w_4)] F_a,$$

$$\text{где } V = \left(\frac{1}{\lambda S_a} + \frac{1}{2\lambda sn} \right); \quad W = \left(\frac{1}{\lambda S_a} - \frac{1}{2\lambda SN} \right);$$

$$S = \lambda n, S_a = \lambda \left(n + \frac{1}{2} \right); S = \lambda(n+1) = \lambda N;$$

$$F_a = S_a \lambda.$$

Энергия изгиба во внутренней точке 1

$$V_1 = \frac{1}{2} (D_r K_r^2 + D_\theta K_\theta^2 + 2\bar{D} K_r K_\theta) F_1, \quad (7)$$

где $D_r, K_r, D_\theta, K_\theta$ - радиальные и тангенциальные жесткости и кривизны; $\bar{D} = D_r \nu_{r\theta} = D_\theta \nu_{\theta r}$ - побочная жесткость.

$$K_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{1}{\lambda^2} (w_2 - 2w_1 + w_4); \quad (7a)$$

$$K_\theta = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{s^2} (w_3 - 2w_1 + w_5) + \frac{(w_4 - w_2)}{2n\lambda^2}.$$

Частные производные от V_1 по w будут:

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_1} = Aw_1 + Bw_2 + Dw_3 + Cw_4 + Dw_5;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_2} = Bw_1 + Ew_2 + Gw_3 + Fw_4 + Gw_5; \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_3} = Dw_1 + Gw_2 + Lw_3 + Hw_4 + Lw_5 = \frac{\partial V_1}{\partial w_5};$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_4} = Cw_1 + Fw_2 + Hw_3 + Kw_4 + Hw_5,$$

где

$$A = 4 \left(\frac{D_r}{\lambda^4} + \frac{D_\theta}{s^4} + \frac{2\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) F_1; D = 2 \left(-\frac{D_\theta}{\lambda^4} - \frac{\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) F_1;$$

$$B = \left[2 \left(-\frac{D_r}{\lambda^4} - \frac{\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) + \left(\frac{D_\theta}{\lambda^2 s^2 n} + \frac{\bar{D}}{\lambda^4 n} \right) \right] F_1;$$

$$C = \left[2 \left(-\frac{D_r}{\lambda^4} - \frac{\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) - \left(\frac{D_\theta}{\lambda^2 s^2 n} + \frac{\bar{D}}{\lambda^4 n} \right) \right] F_1;$$

$$E = \left(\frac{D_r}{\lambda^4} + \frac{D_\theta}{4\lambda^4 n^2} - \frac{\bar{D}}{\lambda^4 n} \right) F_1;$$

$$F = \left(\frac{D_r}{\lambda^4} - \frac{D_\theta}{4\lambda^4 n^2} \right) F_1;$$

$$G = \left(-\frac{D_\theta}{2\lambda^2 s^2 n} + \frac{\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) F_1;$$

$$H = \left(\frac{D_\theta}{2\lambda^2 s^2 n} + \frac{\bar{D}}{\lambda^2 s^2} \right) F_1;$$

$$K = \left(\frac{D_r}{\lambda^4} + \frac{D_\theta}{4\lambda^4 n^2} + \frac{\bar{D}}{\lambda^4 n} \right) F_1;$$

$$L = \frac{D_\theta}{s^4} \cdot F_1.$$

В особой центральной точке O (рис. 1) с радиантом радиусов и нулевой дугой S изгибная энергия V_o в отмеченном бисекторе площади F_o определяется как для ортотропной пластинки по выражению (7) с заменой $D_r, K_r, D_\theta, K_\theta$ на D_u, K_u, D_v, K_v и F_1 на $F_o = \frac{\lambda\theta}{4}$, что дает производные:

$$\frac{\partial V_o}{\partial w_o} = \frac{1}{2} \left[2(D_u + D_v + 2\bar{D})w_o - (D_u + \bar{D})(w_m + w_n) - (D_v + \bar{D})(w_i + w_j) \right] \frac{\theta}{\lambda^2};$$

$$\frac{\partial V_o}{\partial w_m} = \frac{\partial V_o}{\partial w_n} = \frac{1}{4} \left[-2(D_u + \bar{D})w_o + D_u(w_m + w_n) + \bar{D}(w_i + w_j) \right] \frac{\theta}{\lambda^2}; \quad (8a)$$

$$\frac{\partial V_o}{\partial w_i} = \frac{\partial V_o}{\partial w_j} = \frac{1}{4} \left[-2(D_v + \bar{D})w_o + \bar{D}(w_m + w_n) + D_v(w_i + w_j) \right] \frac{\theta}{\lambda^2}.$$

При $\theta \neq \frac{\pi}{2N}$ ($N = 2, 3, 4, \dots$) прогиб в фиктивной точке i интерполируется через значения w в соседних точках. Полная энергия V_0 и ее производные определяются суммированием отмеченных выражений. В ближайшей к O точке типа e из-за невозможности определения члена $\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s}$ по выражению (6), поскольку $s = 0$, необходима его экстраполяция по известным значениям в f и d (рис. 1).

В точке 1 на жестко заземленном контуре 3-1-5 из $w_1 = 0$ и $(\frac{\partial w}{\partial r})_1 = 0$ следует, что $w_{зак} = w_4 = w_2$; $K_r = \frac{2w_2}{\lambda^2}$;

$$K_\theta = 0 \text{ и } V_1 = \frac{1}{2} D_r \left(\frac{2w_2}{\lambda^2} \right)^2 \bar{F}_1 = 2D_r \frac{w_2^2}{\lambda^4} \bar{F}_1;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_2} = 4D_r \frac{w_2}{\lambda^4} \bar{F}_1. \quad (9)$$

В точке 1 на свободном контуре 3-1-5 из $(M_r)_1 = -(D_r K_r + \bar{D} K_\theta) = 0$, находя $K_r = -\frac{\bar{D}}{D_r} K_\theta$ и подставляя K_r в формулу (7), определяем

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(D_\theta - \frac{\bar{D}^2}{D_r} \right) K_\theta^2 \bar{F}_1 = \frac{1}{2} D_\theta (1 - \nu_{r\theta}) \times \left(\frac{w_3 - 2w_1 + w_5}{s^2} + \frac{w_4 - w_2}{2n\lambda^2} \right) \bar{F}_1. \quad (10)$$

Входящее в выражение (10) значение законтурного w_4 для наружного или w_2 для внутреннего контура определяем из разностной записи условия $(M_r)_1 = -(D_r K_r + \bar{D} K_\theta) = 0$ как

$$w_4 = - \frac{(2n\mp \nu)}{(2n\pm \nu)^2} w_2 + \frac{4n(1+\nu) \frac{\lambda^2}{2}}{(2n\pm \nu) s} w_1 - \frac{2n\nu \frac{\lambda^2}{s^2}}{(2n\pm \nu)} (w_3 + w_5), \quad (10a)$$

$$\text{где } \nu = \frac{D}{D_r}.$$

Подставляя выражение (10а) в (10) и дифференцируя, получим для внешнего контура

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_1} = A [Bw_1 - Cw_2 + D(w_3 + w_5)] \bar{F}_1;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_2} = A \left[-Cw_1 + \frac{1}{\lambda^4} w_2 - \frac{n}{\lambda^2 s^2} (w_3 + w_5) \right] \bar{F}_1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_3} = \frac{\partial V_1}{\partial w_5} = A \left[Dw_1 - \frac{n}{\lambda^2 s^2} w_2 + \frac{n^2}{s^4} (w_3 + w_5) \right] \bar{F}_1,$$

где

$$A = 4D_\theta \frac{(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{(2n + \nu)^2}; \quad B = \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2n}{s^2} \right)^2;$$

$$C = \left(\frac{1}{\lambda^4} - \frac{2n}{\lambda^2 s^2} \right); \quad D = \left(\frac{n}{\lambda^2 s^2} - \frac{2n^2}{s^4} \right).$$

Аналогично для внутреннего контура

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_1} = A' [B'w_1 - C'w_4 - D'(w_3 + w_5)] \bar{F}_1;$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_4} = A' \left[-C'w_1 + \frac{1}{\lambda^4} w_4 + \frac{n}{\lambda^2 s^2} (w_3 + w_5) \right] \bar{F}_1; \quad (11a)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_3} = \frac{\partial V_1}{\partial w_5} = A' \left[-D'w_1 + \frac{n}{\lambda^2 s^2} w_4 + \frac{n^2}{s^4} (w_3 + w_5) \right] \bar{F}_1,$$

где

$$A' = 4D_\theta \frac{(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{(2n - \nu)^2}; \quad B' = \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2n}{s^2} \right)^2;$$

$$C' = \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{2n}{\lambda^2 s^2} \right); \quad D' = \left(\frac{n}{\lambda^2 s^2} + \frac{2n^2}{s^4} \right); \quad \nu = \frac{\bar{D}}{D_r}.$$

Результаты для шарнирно-опертого контура получим, положив в системах (11, 11а) $w_{\text{конт}} = w_1 = w_3 = w_5 = 0$.

Если жестко заземлен радиальный контур 2-1-4 (рис. 1), то $w_1 = 0$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_1 = 0$ находим $w_{\text{зак}} = w_5$; $K_\theta = \frac{2w_5}{s^2}$;

$$K_r = 0; \quad V_1 = \frac{D_\theta}{2} K_\theta^2 \left(\frac{1}{2} F_1 \right) \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_5} = 2D_\theta \frac{w_5}{s^4} F_1. \quad (12)$$

Если радиальный контур свободен, то из $(M_\theta)_1 = -(\bar{D}K_r + D_\theta K_\theta) = 0$ определяем $K_\theta = -\frac{\bar{D}}{D_r} K_r$ и подстановкой его в выражение (7) получаем $V_1 = \frac{r}{2} (1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r}) K_r^2 F_1$ и

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_1} = A(2w_1 - w_2 - w_4) F_1,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_2} = \frac{\partial V_1}{\partial w_4} = A \left(-w_1 + \frac{1}{2} w_2 + \frac{1}{2} w_4 \right) F_1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial w_3} = \frac{\partial V_1}{\partial w_5} = 0,$$

где

$$A = D_r \frac{(1 - \nu_{r\theta} \nu_{\theta r})}{\lambda^4}.$$

Из многочисленных граничных условий в угловой точке 1 рассматриваем наиболее распространенный случай неопертого угла пластины. Для угла-консоли $\psi = 90^\circ$ (рис. 1, а) из

$$K_r = K_\theta = 0 \quad \text{следует} \quad V_k = \frac{\partial V_k}{\partial w_i} = 0.$$

Вершину угла ортогонального ($\psi = 270^\circ$) и шелевидного отверстия с $\psi = 360^\circ$ (рис. 1, б, в) считаем закругленной с $r \ll \lambda$ или s , и M_r, M_θ в ней - конечными. Полагая по близости точек $a'_r, c'_\theta, 1'$ (рис. 1, б), что одинаковы их прогибы, $K_r - b1'$ и a'' , $K_\theta - в 1'$ и c' , определяем $V_{1'}$ и $\partial V_{1'} / \partial w_i$ суммированием рассмот-

ренных в формулах (8, 11а, 13) выражений для внутренней точки, наружного дугового и радиального контура $\bar{\bar{c}}$ с учетом площадей ω_d, ω_c и ω_a вместо F_1, \bar{F}_1 и $\bar{\bar{F}}_1$. Аналогично в вершине дуговой щели (рис. 1, в) полагаем равными K_r в $1', 1a', 1d'$, K_θ - в a' и $1a', d'$ и $1d'$, но учитываем различие K_θ в a' и d' . Результат получается:

суммированием двух операторов (8) с площадями ω_b и ω_c вместо F_1 , с двумя операторами (11 и 11 а) для свободного наружного и внутреннего контуров с ω_d и ω_a на месте F_1 . В вершине радиальной щели (рис. 1d) в $1'a$, $1a'$, $1b'$ одинаковы K_θ , но в $1a'$, $1b'$ различны K_r , поэтому суммируются два оператора (8) с двумя операторами (13) для свободного радиального контура. Изложенная методика успешно опробована нами в расчетах прямоугольных пластин с прямоугольными и щелевидными отверстиями [2, 3]. Результаты для изотропных пластин подтверждены опытами [3].

Поскольку в общем случае V в точках типа 0 (рис.1) зависит от w только в этой и ^{из}соседних четырех расположенных крестообразно точках, а V в точках типа + только от w в соседних расположенных ^{кр}диагонально четырех точках, разностный оператор во внутренней точке 1 (рис. 1) будет

$$\frac{\partial}{\partial w_1} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5) + \frac{\partial}{\partial w_1} (V_a + V_b + V_c + V_d) = \frac{\partial}{\partial w_1} \frac{\partial A_1}{\partial w_1} \quad (14)$$

Для контурных точек запись (14) упрощается, поскольку для них некоторые производные в левой части (14) отсутствуют.

Нами произведены контрольные расчеты при редкой сетке $\lambda = \frac{\bar{R}}{4}$ (R - радиальный размер пластины), $\theta = \frac{\pi}{6}$. Сравнение с литературными данными [4, 5, 6] подтвердило практическую приемлемость метода.

Л и т е р а т у р а

1. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом / Д.В.Вайнберг, В.М.Герашенко, И.З.Ройтфарб, А.Л.Синявский. - В сб.: Сопротивление материалов и теория сооружений. - Киев, 1965, вып. 2. 2. Крючков А.А. Исследование изгиба прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины с прямоугольными и щелевидными отверстиями на основе вариационно-разностных уравнений. - В сб.: 26-я науч.-техн. конф. БПИ. Мат-лы секции строит. механики. Минск, 1970. 3. Крючков А.А. Расчет прямоугольных пластин с прямоугольными и щелевидными отверстиями на изгиб методом конечных разностей. - В сб.: Строит. конструкции и теория сооружений. Теория сооружений. Минск, 1971. 4. Бурмистров Е.Ф.; Маслов Н.М. Изгиб круглой ортотропной пластин-

ки переменной жесткости. - В сб.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов, 1969, вып. 4: 5. Маслов Н.М. Несимметричный изгиб круглой ортотропной пластинки переменной толщины. Труды Ульяновск. политехн. ин-та, 1968, № 2. 6. Маслов Н.М. Изгиб ортотропной пластинки переменной толщины. - В сб.; Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов, 1971, вып. 6.

УДК 624.073

А.А.Крючков

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМА УПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИЗГИБЕ

В работе рассматриваются круглые и кольцевые пластины средней толщины, рассчитываемые по технической теории изгиба. При подборе толщины h этих пластин по допускаемым напряжениям $[\sigma]$, не превышающим предела упругости, пластины оптимизируются по объему V в упругой области работы. Такие пластины применяются в современном машиностроении. Исследования по рассматриваемой теме немногочисленны [1, 2].

Оптимизацию производим по критерию равнопрочности, соблюдение которого обеспечивает также и максимальную жесткость конструкции с учетом конструктивного ограничения минимальной толщины пластины [4, 5]. Применяем итерационный метод направленного поиска, успешно используемый в стержневых конструкциях: по заданному распределению изгибной жесткости D_0 пластины находим новое распределение D_1 , по $D_1 - D_2$, по $D_2 - D_3$ и т.д., сходящиеся к равнопрочному решению с минимумом объема. Расчет ведем в относительных показателях, упрощая последующие формулы введением единичных значений h_0 , E , $[\sigma]$, q , λ . Пластину рассчитываем методом сеток в вариационно-разностной форме, рассмотренным в нашей статье [3].

Пояснения к пунктам блок-схемы (рис. 1). 1. Метод предполагается сходящимся при любых начальных значениях h , а тем самым и $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu)^2}$. Поскольку существенное изменение h , D происходит на первых же циклах, рационально начинать расчет с пластин постоянной толщины $h_0 = 1$, $D_0 = \frac{1}{12(1-\nu^2)}$