УДК 624:539.4

С.Г.Быковский

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ РЕГУЛЯРНОГО СТРОЕНИЯ

Пространственные металлические стержневые конструкции регулярного строения (типа структур) наряду с известными достоинствами имеют недостатки, один из которых – повышенный расход материала[1]. В то же время высокая степень статической неопределимости, а также возможность варьирования рядом геометрических параметров при неизменных общих размерах конструкции в плане обусловливают возможность частичного устранения недостатков за счет оптимизационного подхода при проектировании названного класса конструкций.

Принципиально для оптимизации структурных конструкций применимы многие из методик, разработанных для плоских стержневых систем, допускающих принятие шарнирно-стержневой расчетной модели. Однако большинство из этих методик не отражает особенности структур в постановочном плане,кроме того, их реализация на ЭВМ наталкивается на трудности, связанные с большой размерностью задач, например, значительные затраты времени на поиск решения, ограниченность памяти. Поэтому в последнее время уделяется большое внимание разработке методик оптимизации этого специфического класса конструкций.

Настоящая работа носит обзорный характер и посвящена анализу постановок и методов решения задач оптимизации структурных конструкций. Рассматриваются основные работы данного направления. В заключении обзора предлагается двухкритериальная постановка задачи оптимизации пространственных регулярных стержневых систем и намечаются пути ее решения.

Задачи оптимизации геометрических параметров. Геометрически структурные конструкции образуются многократным повторением элементарной пространственной стержневой ячейки. Стоимость конструкции во многом зависит от размеров ячейки. Поэтому очевидна актуальность постановки задачи нахождения оптимальных геометрических параметров ячейки.

В этом плане наибольший интерес представляют работы [2, 3] , где в качестве критерия оптимальности решения приняты приведенные затраты. Этот показатель наиболее полно отражаот экономичность конструкции. Оптимизируемыми параметрами являются размеры ячейки [3] и отправочной марки [2], образующих конструкции. Аналитическое выражение целевой функции, условия совместности деформаций, равновесия, прочности записываются на основе континуальной расчетной модели. В обеих работах учитывается необходимость унификации элементов. Так, в [2] сечения поясных элементов принимаются одинаковыми, а в [3] назначаются геометрические зоны, в пределах которых одноименные элементы (пояса или раскосы) унифицируются.

Математически задача решается путем составления и решения системы нелинейных алгебраических уравнений из приравненных нулю частных производных от целевой функции по всем независимым параметрам. Применение авторами работ [2, 3] и многими другими исследователями приближенного способа оценки напряженно-деформированного состояния оптимизируемой системы на основе континуальной расчетной модели следует отнести к недостаткам методик, так как этот способ далеко не точно отражает истинное состояние системы и в этом смысле заметно уступает способу, основанному на дискретной шарнирно-стержневой модели. Однако для структурных систем со значительным количеством элементов в условиях, когда критерий качества имеет сложную функциональную зависимость от варьируемых геометрических и жесткостных параметров, использование дискретной модели приводит к сложнейшей нелинейной задаче математического программирования, прямое решение которой при современном уровне развития численных методов решения экстремальных задач и вычислительной техники практически неосуществимо. В это же время применение континуальной модели позволяет получать конкретные результаты, правда, в силу отмеченного недостатка, эти результаты весьма приближенные.

Нахождению оптимальных с точки зрения расхода материала размеров ячейки частного вида структур – ортогональных структурных плит – посвящена работа [4]. Здесь принципы записи целевой функции и ограничений и метод поиска решения аналогичны описанным выше. Ориентированность только на ортогональные системы, а также выбор критерия оптимальности ограничивают возможности применения методики, так как для структурных конструкций получаемая при объемной (весовой) оптимизации экономия может быть сведена на нет за счет удорожания их изготовления и монтажа.

Работа [5] интересна тем, что в ней переменными параметрами являются геометрические (верхний уровень) и жесткостные (нижний уровень), но критерием качества по-прежнему остается расход материала. Учитываются ограничения геометрические, конструктивные, на прочность и устойчивость элементов, жесткость конструкции, а также условия совместности и равновесия, записанные на основе метода перемещений. Назначением "лидирующего" узла и законов изменения координат остальных узлов от вариации координат "лидирующего" узла многопараметрическая задача поиска геометрических параметров (координат узлов) сводится к трехпараметрическому поиску координат "лидирующего" узла.

Разделение параметров на два уровня позволяет соответствующим образом организовать поиск решения, используя для каждого уровня наиболее эффективные алгоритмы. Так, при фиксированных значениях жесткостей элементов определяется наиболее удачное направление изменения геометрии системы и осуществляется один шаг в этом направлении. Затем для новых значений геометрических параметров решается задача оптимального распределения материала в системе с известным очертанием осей, т.е. оптимизируются жесткостные параметры. Процесс повторяется необходимое количество раз.

В работе [19] также решается задача поиска оптимальных с точки зрения расхода материала жесткостных и геометрических параметров. Причем учитываются те же, что в работе [5], ограничения, но запись условий равновесия и совместности осуществляется на основе метода конечных элементов. Решение задачи находится методом наискорейшего спуска. Тот факт, что в методиках, описанных в работах [5, 19], не отражены вопросы унификации, существенно ограничивает возможности их практического применения.

Работа [20] посвящена решению синтетической задачи оптимального по объему распределения стержней в пределах заданной сетки узлов. Оптимизируется также соотношение жесткостей элементов. Условия совместности записываются на основе метода сил. Расчетное сопротивление материала принимается одинаковым для сжатых и растянутых элементов. Для решения задачи применяется метод линейного программирования. Полученную в результате решения изменяемую систему необходимо дополнить конструктивными элементами до образования неизменяемой системы. Как справедливо отмечает автор статьи [20], разработанная методика неприменима непосредственно в проектировании, но может служить ориентиром для проектировщиков.

Объемная оптимизация высоты и соотношения жесткостей элементов системы перекрестных ферм двух направлений с параллельными поясами производится в работе [6]. Рассматривается действие только равномерной узловой нагрузки. Ограничения задачи – условия совместности и прочности – записываются в конечно-разностной форме на основе перекрестно-балочной расчетной модели. Учитываются конструктивные ограничения на минимальные значения площадей поперечных сечений элементов. В такой постановке задача существенно нелинейна. Для ее решения предлагается метод последовательных приближений, основанный на линеаризации исходных функций. Для фиксированных значений жесткостных параметров решена задача нахождения оптимальной высоты системы.

Недостатки описанной методики заключаются в малой общности постановки задачи, а также в приближенности записи напряженно-деформированного состояния. Здесь приближенной является как расчетная модель, так и оценка ее напряженно-деформированного состояния.

Вопросы оптимального распределения материала в системах с заданным очертанием осей. Во многих практических случаях геометрические размеры структурных конструкций определены заранее различными условиями. Тогда правомерна постановка задачи оптимального распределения материала в системе с известным очертанием осей. Рассмотрим основные из работ этого направления.

В работах [7, 8] оптимизируются площади поперечных сечений элементов структурных конструкций в виде систем наклонных перекрестных ферм двух [8] и трех [7] направлений с параллельными поясами. Ограничения задач, форма их записи, а также нагрузка аналогичны принятым в работе [6]. Целевая функция – теоретический объем поясных элементов – линейна относительно оптимизируемых параметров. На первом этапе решения задачи итерационным расчетом конструкции с известным соотношением жесткостей элементов [7] или на основе дополнительных условий оптимальности перекрестных систем [8] находится картина прогибов узлов пересечения ферм. Этим устраняется нелинейность системы ограничений, и на втором этапе методом линейного программирования определяются оптимальные площади сечений поясов.

Работа [9] посвящена весовой оптимизации ортогональных структурных плит, свободно опертых по контуру. Допускается пластическая работа растянутых элементов, а для сжатых – не допускается потеря устойчивости. Линейность целевой функции, условий совместности и равновесия относительно величин изгибающих моментов, записанных в конечно-разностной форме для континуальной модели, позволяет определить их оптимальное распределение методом линейного программирования. Затем осуществляется обратный переход к дискретной конструкции.

Достоинством методик, предложенных в работах [7,8,9], является возможность использовать стандартные программы метода линейного программирования, недостатками — применимость лишь к частным видам структурных систем, а также уже отмеченная при обзоре предыдущих работ приближенность оценки напряженно-деформированного состояния системы.

Двухэтапная методика весовой оптимизации структурных конструкций с заданным очертанием осей, нагрузкой и формой сечений элементов предлагается в работе [10]. На первом этапе итерационным расчетом системы на ЭВМ по алгоритму метода перемещений выявляются "нулевые" стержни, т. е. стержни с усилиями, близкими к нулю. Исходя из условий геометрической неизменяемости конструкции, типа ограждения, нагрузки и принципа концентрации материала, определяются и отбрасываются "лишние нулевые" стержни. На втором этапе повторяется итерационный расчет конструкции с уменьшенным количеством элементов при учете условий прочности, устойчивости, унификации и конструктивных ограничений.

К недостаткам методики следует отнести необходимость прерывания счета после первого этапа, а также свойственный всем методикам, использующим итерационные процессы, значительный расход времени ЭВМ.

Оригинальная и простая методика нахождения параметров структурных конструкций минимального веса предложена в работе [11]. Заданная конструкция расчленяется на "абсолютно" необходимую систему (АНС) и "условно" необходимую систему (УНС), т.е. на системы из "абсолютно" и "условно" необходимых элементов (по терминологии И.М.Рабиновича). Расчленение производится исходя из условия предельной деформативности поясов ферм АНС. Сечения элементов УНС назначаются одинаковыми по предельной гибкости, а сечения элементов АНС определяются ее расчетом как статистически определимой сисгомы, учитывая, что часть нагрузки воспринимается УНС. Однако учет совместности работы элементов АНС и УНС производится неточно, и это обстоятельство является недостатком предложенной методики.

В работах [12, 13] оптимальное по расходу материала распределение усилий в конструкциях типа структур достигается введением дополнительных элементов и созданием в них необходимых усилий преднапряжения. В работе [13] оптимальная величина усилий в затяжках находится шагово-итерационным поиском. Для этого усилия в затяжках варьируются с некоторым шагом, и для каждого их значения производится итерационный перерасчет конструкции на совместное действие нагрузки и усилий в затяжках. Из последних выбирается величина, соответствующая минимуму веса структурного блока. Для большеразмерных структурных систем методика требует значительного объема вычислений и поэтому неэффективна.

В работе [12] преднапряженным элементом является вантовая цепь; критерий оптимальности - минимум суммы усилий в наиболее напряженных элементах каждого типоразмера. Сами усилия определяются расчетом континуальной модели как сумма усилий от нагрузки и сил, эквивалентных действию подвесок. Линейность целевой функции относительно усилий в подвесках позволяет найти их оптимальное распределение с помощью аппарата "зеркальных" функций Радцига.

В работе [14] для оптимизации пространственных стержневых систем применяется дискретное программирование. Допускается произвольный выбор критерия оптимальности и учет полного набора ограничений. Предполагается, что конструкция собирается из ограниченного набора типовых элементов, несущая способность которых известна. Ставится задача оптимального количественно-качественного распределения этих элементов при известном очертании осей конструкции. Для решения предлагается использовать один из методов перебора. Следует отметить, что для систем с большим числом элементов предложенная методика неэффективна из-за значительного количества рассматриваемых вариантов.

Вопросы оптимальной унификации элементов структурных конструкций. Известно [1], что эффективность применения структурных конструкций во многом определяется регулярностью их строения. В этой связи большой интерес представляет решение задачи оптимальной унификации элементов структур, в результате которой материалоемкость конструкций увеличивается по сравнению с требуемой на минимально возможную величину, но при этом снижается трудоемкость их изготовления и монтажа. Решение задачи оптимальной унификации с учетом всех противоречивых факторов не достигнуто из-за возникающих трудностей постановочного характера и математических. В ряде случаев, когда количество применяемых в конструкции типоразмеров определено заранее, может быть принят упрощенный весовой или объемный критерий оптимальности. Именно так ставится задача в работах [15, 16]. Методики основываются на систематизации усилий, полученных поверочным расчетом конструкции на ЭВМ [16], или систематизации площадей сечений элементов, назначенных с учетом действующих в них усилий и используемого сортамента [15]. В обоих случаях, по сути дела, минимизируется приращение объема, получаемое при сокращении количества типоразмеров от требуемого по расчету до заданного. Для решения задачи в работе [15] применяется динамический принцип Беллмана и методика последовательных приближений, а в [16] целевая функция аппроксимируется экспоненциальной зависимостью и задача решается в частных производных.

Применение описанных методик при унификации элементов структурных конструкций позволяет снизить материалоемкость существующих проектных решений.

Выводы. Как показал обзор, проблема оптимизации структурных конструкций характеризуется многообразием постановок задач и методик их решения. Наиболее важными аспектами постановок оптимизационных задач являются выбор критерия оптимальности, а также назначение варьируемых переменных и области их возможного изменения, т.е. выбор системы ограничений.

Представление критерия качества в виде приведенных затрат позволяет учитывать не только единовременные затраты на изготовление и возведение конструкции, но и эксплуатационные расходы. Однако во избежание непреодолимых математических трудностей запись ограничений задачи приходится пока осуществлять на основе континуальной расчетной модели конструкции, что сказывается на достоверности получаемого решения. Применение упрощенного объемного критерия оптимальности позволяет учесть ограничения на основе шарнирно-стержневой расчетной модели и точных методов строительной механики без серьезных математических осложнений. Но объемный критерий не учитываот влияния ряда показателей на экономичность конструкции,поэтому его применение существенно ограничено.

В качестве переменных параметров, оптимальная совокупность значений которых отыскивается, многие авторы принимают и жесткостные характеристики элементов и величины, определяющие геометрию системы. Этим значительно расширяется область возможного существования решения.

Методика поиска оптимального решения во многом определяется математической моделью задачи, но при этом не должна теряться связь со свойствами реальной конструкции. Для решения задач оптимизации в современной постановке наиболее приемлемыми следует признать многоэтапные методики, суть которых заключается или в количественно-качественном изменении от этапа к этапу варьируемых параметров, или в изменении числа и характера учитываемых ограничений, или в соответствующей каждому этапу адаптации математической модели решаемой задачи к существующим математическим методам решения оптимизационных задач.

Задача двухкритериальной оптимизации систем регулярного строения. Правомерность постановки задачи оптимизации шарнирно-стержневых систем регулярного строения по двум критериям качества - теоретическому весу расходуемого материала и трудоемкости изготовления конструкции - обусловливается значительным их влиянием на экономичность проектного решения. Благодаря тесной и противоречивой связи этих показателей между собой проведение оптимизации по одному из них ухудшает значение другого. Например, весовая оптимизация конструкции приводит в результате к трудоемкой в изготовлении системе с большим числом типоразмеров. Наоборот, малой трудоемкостью обладает система с высокой степенью регулярности, но не оптимальная по весу.

Компромиссный критерий качества, т.е. критерий, оптимизация по которому позволяет получить наиболее приемлемое решение с точки зрения обоих частных показателей качества, может быть представлен как их произведение. Это равносильно записи компромиссного критерия в виде суммы отдельных критериев с весовыми коэффициентами, выравнивающими влияние отдельных показателей на решение. Теоретическое обоснование такого подхода дано в работе [17].

С учетом сказанного целевую функцию запишем в виде

$$C = G\,T \longrightarrow \min.$$

Согласно монографии [18], трудоемкость металлических конструкций может быть определена приближенно по формуле

$$T = K\sqrt{G\,N}\ .$$

Теоретический вес конструкции находится по выражению

$$G = \gamma V = \gamma \sum_{i=1}^{N} V_i ,$$

тогда целевая функция принимает вид

$$C = \left(\gamma \sum_{i=1}^{N} V_i\right)\left(K\sqrt{G\,N}\right) = K\sqrt{\left(\gamma \sum_{i=1}^{N} V_i\right)^3 N}.$$

В записанных выражениях: C – компромиссный критерий качества решения; G – теоретический вес конструкции (вес основных элементов); T – трудоемкость изготовления конструкции; V, V_i – соответственно объем всей системы и i -го элемента; N–количество основных элементов в конструкции; γ – удельный вес материала; K – коэффициент, учитывающий тип конструкции, марки применяемых сталей, строительный коэффициент трудоемкости.

Присутствие в целевой функции величины N и назначение ее варьируемой переменной позволяют решать вопросы оптимизации геометрии системы, так как для систем регулярного строения всегда можно установить связь между количеством элементов N, размерами ячейки a и b и общими размерами перекрываемого пространства в плане L_a и L_b. Последние две величины надо полагать известными. Например, для ортогональной структуры с прямоугольной ячейкой эта связь принимает вид

$$N = 8\,\frac{L_a L_b}{a.b}\ ,$$

для случая, когда структура представляет собой конструкцию оболочечного типа, в качестве L_a и L_b следует принимать длины соответствующих образующих. В силу дискретности возможных значений величин a и b при неизменных L_a и L_b величина N также может принимать только определенные значения.

Решение задачи следует искать в некоторой области, ограниченной условиями равновесия, совместности деформаций, жесткости, прочности, устойчивости и конструктивными ограничениями на количество элементов, площади их сечений, количество применяемых типоразмеров.

Сформулированная задача – задача нелинейного математического программирования, характеризующаяся нелинейностью целевой функции и системой ограничений общего вида. Ее непосредственное решение методами математического программирования для систем с большим количеством элементов затруднительно. На наш взгляд, наиболее приемлемой методикой решения такой задачи является методика поэтапного поиска, основанная на разделении переменных. В первую очередь следует варьировать параметры, определяющие геометрию системы, а затем решать задачу оптимального распределения материала при известном очертании осей.

Литература

1. Трофимов В.И., Бегун Г.Б. Структурные конструкции.– М., 1972. 2. Агафонкин В.С., Хисамов Р.И. Оптимальные геометрические параметры структурных покрытий типа вертикальных перекрестных ферм. – В сб.: Металлические конструкции и испытания сооружений. Л., 1977, № 1 (134). 3. Гордеев В.Н., Гринберг М.Л. Выбор оптимальных параметров структурных покрытий. – Строит. механика и расчет сооружений, 1977, № 6. 4. Хомяк Л.В. Определение оптимальных геометрических параметров структурных покрытий. – В сб.: Легкие металлические строит. конструкции. Свердловск, 1974. 5. Ольков Я.И., Антипин А.А. Выбор алгоритма поиска оптимальной геометрии шарнирно-стержневых систем. – В сб.: Исследования пространственных конструкций. Свердловск, 1977, вып. 1. 6. Галимшин Р.А., Гайнуллина С.Х. К расчету оптимальных решетчатых пространственных покрытий. – В сб.: Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций. Л., 1975. 7. Агафонкин В.С., Галимшин Р.А., Хисамов Р.И. Расчет оптимальных структурных конструкций из ферм трех направлений. – В сб.: Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций. Л., 1975. 8. Галимшин Р.А., Гирфанов И.С. К расчету перекрестных систем с оптимальной изогнутой поверхностью прогибов. – В сб.: Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций. Л., 1975. 9. Ольков Я.И., Антипин А.А. Оптимизационный расчет металлических структурных плит на основе линейной математической модели. – В сб.: Легкие металлические строит. конструкции. Свердловск, 1975. 10. Калинин А.А. К вопросу оптимизации сложных стержневых систем типа структур. – В сб.: Надежность и долговечность строит. конструкций. Волгоград, 1976. 11. Хисамов Р.И. Пути повы-

шения эффективности структурных металлоконструкций. – Строит. механика и расчет сооружений, 1977, № 4. 12. Муханок К.К., Демидов Н.Н. Метод расчета структурных конструкций, рациональных по весу. – Строит. механика и расчет сооружений, 1975, № 1. 13. Третьякова Э.В. О минимальном весе предварительно напряженного стержневого блока покрытия. – Строит. механика и расчет сооружений, 1974, № 1. 14. Хольнапи Д., Грос М. Автоматизация проектирования пространственных легких конструкций с помощью подбора дискретных элементов. – В кн.: Международн. конф. по облегченным пространственным конструкциям покрытий для строительства в обычных и сейсмических районах. Докл. М., 1977. 15. Беккер Г.Н. Оптимальная унификация элементов стержневых пространственных конструкций. – Реферат. информ., ЦИНИС, 1976, сер. УIII, вып. 4. 16. Никифоров В.Г. Оптимизация структурных конструкций с привлечением статистических методов анализа. – В сб.: Строительство в районах Восточной Сибири и Крайнего Севера. Красноярск, 1976, № 39. 17. Зураев Т.Г., Фролов В.М. Об одном способе решения многокритериальных задач оптимизации силовых конструкций. – Учен. зап. ЦАГИ, 1977, т. УШ, № 2. 18. Лихтарников Я.М. Металлические конструкции. Методы технико-экономического анализа при проектировании. – М., 1968. 19. Kunoo Kazuo. Optimum configuration of truss structures. – Коку, утю гидзюцу кэнкюсё хококу, Technical Report of National Aerospace Laboratory, 1974, N 338. 20. Шалат Геза. Регулярные пространственные фермы наименьшего веса. – В сб.: Problemy systemowego budownictwa metalowego. – Wroclaw, 1976, 1-2 czew. ("Pr. nauk Inst. budown." Pwr, N 20).

УДК 624.072.2

Коршун Л.И., Климова Л.Б.

ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача оптимизации произвольных шарнирно-стержневых систем заданной геометрии с учетом их деформированной схемы и возможности работы растянутых элементов в упруго-пластической стадии. Учитываются условия жесткости системы, а также конструктивные ограничения на площади попе-