

Полученные результаты могут найти применение при решении ряда контактных задач теории упругости.

Л и т е р а т у р а

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л., 1967. 2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975. 3. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М., 1974.

УДК 539.3

С.В. Босаков

РАСЧЕТ БАЛОЧНЫХ ПЛИТ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ КЛИНЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

В исследовании [1] приводятся выражения для компонент напряжений в плоском клине со свободными гранями от действия нагрузки, приложенной к границам клина. Пользуясь ими, можно получить выражения для относительных перемещений граней клина от действия нормальной сосредоточенной силы P :

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{P(1-\nu^2)}{2E} A(\alpha) \ln \frac{a}{r} - \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} L_1(y, \alpha) \frac{\cos(y \ln \frac{a}{r})}{y} dy;$$

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{P(1-\nu^2)}{E} B(\alpha) \ln \frac{a}{r} -$$

$$- \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^{\infty} L_2(y, \alpha) \frac{\cos(y \ln \frac{a}{r})}{y} dy; \quad (1)$$

$$L_1(y, \alpha) = \frac{\operatorname{sh} 4\alpha y + y \sin 4\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha y - y^2 \sin^2 2\alpha}; \quad L_2(y, \alpha) =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha \operatorname{sh} 2\alpha y + y \operatorname{ch} 2\alpha y \sin 2\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha y - y^2 \sin^2 2\alpha};$$

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}; \quad B(\alpha) = \frac{2\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha},$$

где 2α — угол раствора клина; a — расстояние от вершины клина до силы; r — точка, где определяется перемещение; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала клина.

Методом специальной аппроксимации [2] функций $L_1(y, \alpha)$ и $L_2(y, \alpha)$ можно получить следующие выражения для перемещений:

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \ln |a^s - r^s| + \frac{P(1-\nu^2)}{E} A(\alpha) \ln a,$$

$$s = \frac{\pi}{2} A(\alpha);$$

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \ln |a^{\frac{\pi|B(\alpha)|}{2} + r^{\frac{\pi|B(\alpha)|}{2}}| + \frac{2P(1-\nu^2)}{E} |B(\alpha)| \ln a. \quad (2)$$

Величины перемещений, вычисленные по формулам (2) для $\alpha = \frac{\pi}{4}$, совпадают с результатами О.Я.Шехтер, приведенными в работе [3]. Отметим, что выражения (2) дают точные решения для случая упругой полуплоскости ($\alpha = \pi/2$).

Рассмотрим плиту, лежащую на упругом клине в условиях плоской деформации (рис. 1). Требуется определить внутренние усилия в ее сечениях, распределение реактивных давлений в контактной зоне от заданной нагрузки (см. рис. 1). Принимаются следующие предпосылки: 1) касательные напряжения в контактной зоне не учитываются; 2) для плиты считаются справедливыми гипотезы изгиба; 3) связи между контактной поверхностью плиты и клином считаются двусторонними.

Сначала рассмотрим случай жесткого штампа. Искомый закон распределения контактных давлений определится из следующего уравнения:

$$\int_b^c p(x) \ln |\xi_s - x| dx - \frac{A(\alpha)}{2} \int_b^c p(x) \ln x dx =$$

$$= \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} (\varphi_0 \xi_s + d_0), \quad (3)$$

где φ_0 , d_0 — соответственно угловое и линейное перемещения левого края штампа; $x = \bar{x}/l$, $\xi_s = \bar{\xi}_s/l$ — безразмерные координаты; l — полуширина штампа.

Уравнение (3) подстановкой $t = \lambda \ln \frac{x}{b} - 1$ приводится к следующему:

$$\frac{be^{\frac{1}{\lambda}}}{\lambda} \int_{-1}^1 p(t) e^{\frac{t}{\lambda}} \ln |e^{\rho z} - e^{\rho t}| dt = B \left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1 + e^{\frac{z}{\lambda}} \right) +$$

$$+ C; \quad -1$$

$$\lambda = \frac{2}{\ln \frac{c}{b}}; \quad z = \lambda \ln \frac{\xi_s}{b} - 1; \quad \rho = \frac{s}{\lambda};$$

$$B = \frac{\pi E b}{2(1-\nu^2)} \varphi_0;$$

$$C = \frac{A(\alpha)}{2} \int_b^c p(x) \ln x dx + \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} d_0 -$$

$$- \rho \frac{be^{\frac{1}{\lambda}}}{\lambda} \ln b \int_{-1}^1 e^{\frac{t}{\lambda}} p(t) dt. \quad (4)$$

Очевидно, величина C на напряженное состояние штампа влияния не оказывает.

Рассмотрим следующее соотношение [4]:

$$\ln |e^{\rho z} - e^{\rho t}| = \ln \rho |z-t| + \frac{1}{2} \rho (z+t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{\rho^2 (z-t)^2}{4k^2 \pi^2} \right]. \quad (5)$$

Учитывая, что в большинстве практических случаев штамп не вплотную примыкает к вершине клина, выражение (5) для $\rho < \pi$ $[A(\alpha) \ln \frac{c}{b} < 4]$ представим в следующем виде [4]:

$$\ln |e^{\rho z} - e^{\rho t}| = \ln \rho |z-t| + \frac{1}{2} \rho (z+t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\rho^{2k} B_{2k} (z-t)^{2k}}{2k (2k)!}, \quad (6)$$

где B_{2k} - числа Бернулли [4].

Учитывая наличие логарифмической особенности в выражении (6) и соотношение [5, 6],

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln |z-t| dt = \begin{cases} -\pi \ln 2, & m=1, 2, \dots, \\ -\frac{\pi}{m} T_m(z), & m=1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

где $T_m(z) = \cos(m \arccos z)$ - полином Чебышева 1 рода, будем искать решение (4) в виде

$$p(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\lambda}}}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(t). \quad (8)$$

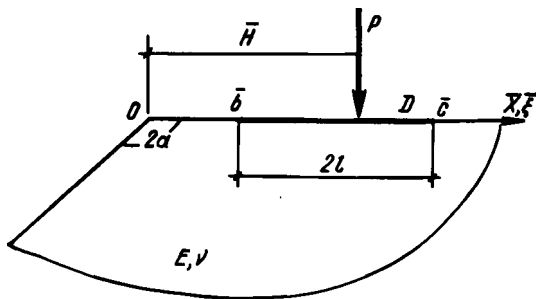


Рис. 1. Схема нагрузки и плиты, лежащей на клине.

Подставляя равенство (8) в (4) и учитывая свойство ортогональности принятых полиномов Чебышева и соотношение (7), приходим к уравнению относительно переменной z . Согласно способу ортогональных многочленов [2] умножаем все члены этого уравнения на $T_k(z) (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и ин-

тегрируем в пределах $[-1, 1]$. Получаем бесконечную систему относительно неизвестных коэффициентов $A_m (m=1, 2, 3, \dots)$ и перемещений штампа. Полученную систему можно решить методом усечения [2]. Первый член разложения (8) находится из уравнений равновесия. В нашем случае они следующие:

$$\int_b^c p(x) dx = \frac{P}{l} ; \quad \int_b^c xp(x) dx = \frac{P\bar{H}}{l^2} , \quad (9)$$

где \bar{H} - расстояние от вершины клина до приложенной силы (см. рис. 1).

Из выражений (9) следует:

$$A_0 = \frac{\lambda}{b} e^{-\frac{1}{\lambda}} \frac{P}{\pi l} ; \quad (10)$$

$$\frac{\pi l}{P} \frac{b^2}{\lambda} e^{\frac{2}{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m I_m \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\bar{H}}{l} , \quad (11)$$

где $I_m \left(\frac{1}{\lambda} \right)$ - функция Бесселя первого рода мнимого аргумента. Уравнение (11) необходимо добавить к бесконечной системе для определения $A_m (m=1, 2, 3, \dots)$ и перемещений штампа.

В табл. 1 приведены величины $\varphi_0 \frac{\pi E l}{2P(1-\nu^2)}$ для определения поворота жесткого штампа под действием центрально приложенной сосредоточенной силы P .

Особый интерес представляет случай поступательного перемещения штампа [2]. В этом случае с учетом первых пяти членов разложения (8) можно получить

$$A_1 = \frac{\rho}{2} \frac{A_0}{1 + \frac{\rho^2}{24} - \frac{3\rho^4}{2880} + \frac{3\rho^8}{5760^2}} ;$$

$$A_2 = \frac{\frac{\rho^2}{24} + \frac{\rho^4}{1440}}{1 + \frac{\rho^4}{1920}} A_0 ;$$

$$A_3 = \frac{3\rho^4}{5760} A_1; \quad A_4 = - \frac{\rho^4}{5760} A_0. \quad (12)$$

Точка приложения силы, вызывающей поступательное перемещение штампа, определится из выражения (11). Внутренние усилия в сечениях штампа находятся интегрированием напряжения по формуле (8):

$$Q(x) = - \frac{b l}{\lambda} e^{\frac{1}{\lambda}} \left[A_0 \arcsin t - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_m U_m(t) \right] + C_0;$$

$$M(x) = - \frac{b^2 l^2}{\lambda^2} e^{\frac{2}{\lambda}} \left[A_0 R_0(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_m R_m(t) \right] + C_0 x l + C_1; \quad (13)$$

$$R_0(t) = \int e^{\frac{t}{\lambda}} \arcsin t \, dt;$$

$$R_m(t) = \int e^{\frac{t}{\lambda}} U_m(t) \, dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$U_m(t) = \sin(m \arccos t)$ - полином Чебышева II рода.

Таблица 1.

λ \ b	1	2	3	4	5
$\frac{\pi}{4}$	-1,1315	-0,5805	-0,3904	-0,2940	-0,2357
$\frac{3\pi}{8}$	-0,0745	-0,0380	-0,0255	-0,0192	-0,0154
$\frac{5\pi}{8}$	0,0320	0,0164	0,0110	0,0083	0,0066
$\frac{3\pi}{4}$	0,1481	0,0756	0,0507	0,0382	0,0306

Постоянные интегрирования, входящие в выражение (13), определяются из краевых условий

$$C_0 = -\frac{P}{2};$$

$$C_1 = \frac{P}{2} b l + \frac{b^2 l^2}{\lambda^2} e^{\frac{2}{\lambda}} [A_0 R_0(-1) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_m R_m(-1)], \quad b < x < H;$$

$$C_0 = \frac{P}{2}; \tag{14}$$

$$C_1 = -\frac{P}{2} c l + \frac{b^2 l^2}{\lambda^2} e^{\frac{2}{\lambda}} [A_0 R_0(1) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} A_m R_m(1)], \quad H < x < c.$$

При вычислении изгибающих моментов по формулам (13) полезно воспользоваться следующим разложением [7]:

$$e^{\frac{t}{\lambda}} = I_0\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} I_m\left(\frac{1}{\lambda}\right) T_m(t).$$

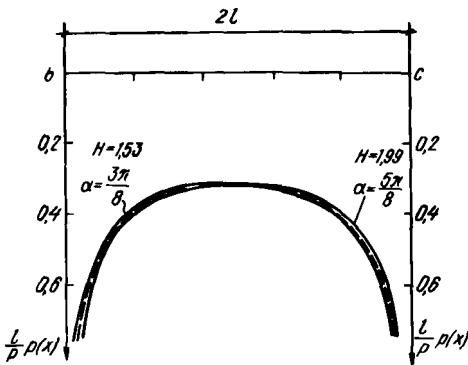


Рис. 2. Эпюры контактных давлений под жесткой плитой при ее поступательном перемещении; $b = 0,5$; $c = 2,5$.

На рис. 2 приведены графики распределения реактивных давлений для некоторых видов клина при поступательном перемещении штампа. Пунктиром показано решение для полуплоскости [8].

В процессе расчета плиты конечной жесткости возникают определенные трудности, вызванные решением дифференциального уравнения изгиба при задании реактивных давлений в кон-

тактной зоне в виде представления (8). Поэтому задачу будем решать методом Б.Н.Жемочкина [9]. На это автору было указано О.Я.Шехтер и М.И.Бронштейном при обсуждении данной работы. Запишем выражение для определения относительных перемещений точки грани клина от действия единичной нагрузки, распределенной по участку \bar{d} , \bar{c} . Получается в результате интегрирования (2):

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E(c-d)} F(r, c, d, \alpha); \\
 F(r, c, d, \alpha) &= (c-d) s \ln r + \\
 &+ r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d}{r}\right)^{(sk+1)} - \left(\frac{c}{r}\right)^{sk+1}}{k(sk+1)}, \quad r > c; \\
 F(r, c, d, \alpha) &= s(d-c + c \ln c - d \ln d) + \\
 &+ r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^{sk-1} - \left(\frac{r}{d}\right)^{sk-1}}{k(sk-1)}, \quad r < d; \\
 F(r, c, d, \alpha) &= s(r-c + c \ln c - d \ln r) + \\
 &+ r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d}{r}\right)^{sk+1} - 1}{k(sk+1)} + r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^{sk-1} - 1}{k(sk-1)}, \\
 &d < r < c,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $\bar{c} - \bar{d}$ - ширина участка.

Плиту разбиваем на 20 равных участков и между ней и клином в середине каждого участка устанавливаем жесткие стержни, через которые осуществляется контакт плиты с упругим клином. Принимается, что усилие в каждом стержне вызывает равномерно распределенную эпюру реактивных давлений в пределах каждого участка. Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом. За неизвестные принимаются усилия в стержнях, линейное и угловое перемещение края плиты. Коэффициенты при неизвестных в системе канонических уравнений смешанного метода зависят от упругих перемещений клина и прогибов плиты. Последние определяются обычным способом [9]. Перемещения клина вычисляются по выражению (15). Дальнейшие расчеты выполнялись с использованием ЭВМ "Минск-22М".

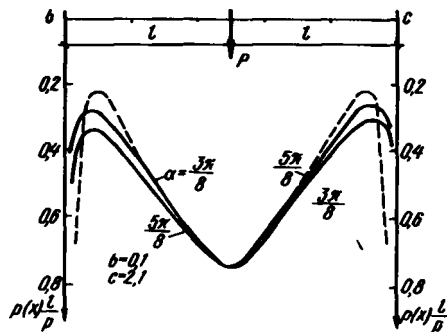


Рис. 3. Эпюры контактных давлений под плитой конечной жесткости от действия сосредоточенной силы, приложенной в центре плиты:

$$\beta = \frac{EI^3}{12(1-\nu^2)D} = 3 \frac{1}{3}$$

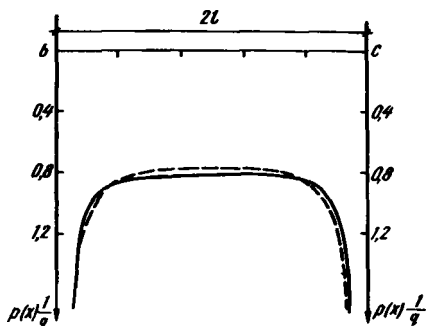


Рис. 4. Эпюры контактных давлений под плитой конечной жесткости от действия равномерно распределенной нагрузки:

$$b = 0,5; c = 2,5; \beta = 1 \frac{2}{3}; \alpha = \frac{\pi}{4}$$

На рис. 3, 4 приведены эпюры реактивных давлений в контактной зоне плиты при некоторых значениях параметра ρ и показателя гибкости β [8]. Считалось, что сила приложена к центру плиты (рис. 3) и плита загружена сплошной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 4). Пунктирной линией показано аналогичное решение для полуплоскости [8].

Полученные результаты могут найти применение при расчете фундаментов сооружений, расположенных вблизи горных склонов.

Л и т е р а т у р а

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. - Л., 1967.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. - М., 1976.
3. Шехтер О.Я. Вычисления перемещений и напряжений на границах четверти плоскости при действии сосредоточенных сил, нормальных и касательных к границе. - В сб.: Механика грунтов. - М., 1962, вып. 49.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М., 1962.
5. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. - Инженер. сб.,

1952, т. XII. 6. Попов Г.Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. — Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 3.

7. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. — М., 1976.

8. Горбунов-Посадов М.И. Расчет конструкций на упругом основании. — М., 1953.

9. Жемочкин Б.Н., Силицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. — М., 1962.

УДК 624:539.4

С.Г.Быковский

РАСЧЕТ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С ЗОННО-УНИФИЦИРОВАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассматриваются пространственные стержневые системы регулярного строения, допускающие принятие шарнирно-стержневой расчетной модели и проведение расчета в линейно-упругой постановке. К таким системам могут быть отнесены конструкции типа структур. Регулярность строения структур обеспечивает им высокую технологичность в производстве и монтаже, но приводит к недонапряженности многих элементов. Один из способов учета этих противоречивых факторов — зонная унификация элементов конструкции, т.е. назначение размеров элементов одинаковыми в пределах определенных геометрических зон.

Задача нахождения оптимального количества зон, их размеров и конфигурации в плане, а также соотношения площадей поперечных сечений элементов между зонами чрезвычайно сложна. Однако исследования [1, 2] показывают, что для структурных конструкций нерационально иметь более 4...6 различных типоразмеров. Этот фактор, а также наличие значительного количества исследований зависимости напряженно-деформированного состояния структур от конструктивной схемы, нагрузок и опорных закреплений позволяют во многих практических случаях считать известными количество и геометрические параметры зон унификации. Также будем считать известными геометрическую схему и материал конструкции, а узловую нагрузку — произвольной, но заданной в виде нескольких расчетных сочетаний. Ставится задача — найти в пределах применяемого сортамента такие значения площадей поперечных сечений элементов в зонах, чтобы объем системы был минимален и со-