

Отметим здесь же следующее. Если при оптимизации системы другими методами возникают определенные затруднения с нахождением коэффициентов продольного изгиба стержней, то при оптимизации по симплекс-методу с ограничениями на выбор базиса (по второму варианту) этот вопрос решается просто: компоненты векторов, совпадающих с узлами для линеаризованной переменной, включают этот коэффициент и соответствуют определенным типам сечений элементов. Известное при кусочно-линейной аппроксимации противоречие между необходимостью иметь точное (до заданной погрешности) решение и размерностью приближенной линейной задачи практически устраняется для случая выбора сечений из ряда изделий, так как в процессе решения незначительно возрастает время счета лишь на поиск вводимого в базис вектора, а другие операции поиска оптимального решения выполняются с обычной матрицей задачи.

Л и т е р а т у р а

1. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. — М., 1967. 2. Борисевич А.А. Использование кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций в задачах строительной механики. — Строит. конструкций и теория сооружений. Сб. науч. трудов БПИ. Минск, 1977, вып. 2.

УДК 539.3

С.В.Босаков

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКОМ КЛИНЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРЯНЯМИ

В монографии [1] приведены выражения для компонент напряжений в плоском клине со свободными гранями от действия сосредоточенных сил, приложенных к границе клина. На основании этих формул можно известными методами [2] получить выражения для перемещений точек грани клина, где приложены сосредоточенные нагрузки, в следующем виде:

$$V = \frac{P}{2\pi iE} \int_{(L)} \frac{\sin 4\rho\alpha + \rho \sin 4\alpha}{\rho(\sin^2 2\rho\alpha - \rho^2 \sin^2 2\alpha)} \left(\frac{a}{r}\right)^{\rho} d\rho +$$

$$+ \frac{T}{2\pi i E} \int_{(L)} \frac{(1-\nu) \sin^2 2\rho\alpha + \rho^2 (1+\nu) \sin^2 2\alpha}{\rho (\sin^2 2\rho\alpha - \rho^2 \sin^2 2\alpha)} x$$

$$x \left(\frac{a}{r} \right)^\rho d\rho; \quad (1)$$

$$U = \frac{P}{2\pi i E} \int_{(L)} \frac{(1-\nu) \sin^2 2\rho\alpha + \rho^2 (1+\nu) \sin^2 2\alpha}{\rho (\sin^2 2\rho\alpha - \rho^2 \sin^2 2\alpha)} x$$

$$x \left(\frac{a}{r} \right)^\rho d\rho + \frac{T}{2\pi i E} \int_{(L)} \frac{\rho \sin 4\alpha - \sin 4\rho\alpha}{\rho (\sin^2 2\rho\alpha - \rho^2 \sin^2 2\alpha)} x$$

$$x \left(\frac{a}{r} \right)^\rho d\rho,$$

где V, U — перемещения точек границы клина соответственно в окружном и радиальном направлениях; a — точка приложения сосредоточенной силы (рис. 1); r — точка, где определяются перемещения; 2α — угол раствора клина (рис. 1); E, ν — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала клина; L — путь интегрирования [1]; ρ — комплексная переменная.

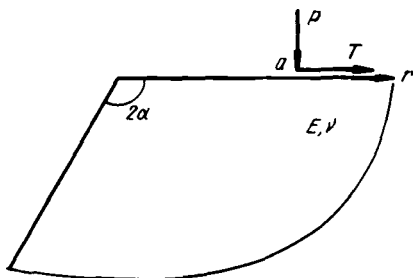


Рис. 1. Схема клина и приложенных сил.

Переносим путь интегрирования на мнимую ось ($\rho = iz$) и применяя элементы теории вычетов, можно получить выражения для перемещений в следующем виде:

$$V = \frac{P}{2E} A(\alpha) \ln \frac{a}{r} + \frac{P}{\pi E} \int_0^\infty L_1(z, \alpha) \frac{\cos(z \ln \frac{a}{r})}{z} dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{T}{\pi E} \int_0^{\infty} [L_3(z, \alpha) - \gamma] \frac{\sin(z \ln \frac{a}{r})}{z} dz; \\
U = & \frac{P}{\pi E} \int_0^{\infty} [L_3(z, \alpha) - \gamma] \frac{\sin(z \ln \frac{a}{r})}{z} dz + \\
& + \frac{T}{2E} B(\alpha) \ln \frac{a}{r} + \frac{T}{\pi E} \int_0^{\infty} L_2(z, \alpha) \frac{\cos(z \ln \frac{a}{r})}{z} dz; \quad (2)
\end{aligned}$$

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha}; B(\alpha) = \frac{4\alpha - \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha};$$

$$\begin{aligned}
L_1(z, \alpha) &= \frac{\operatorname{sh} 4\alpha z + z \sin 4\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha z - z^2 \sin^2 2\alpha}; L_2(z, \alpha) = \\
&= \frac{\operatorname{sh} 4\alpha z - z \sin 4\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha z - z^2 \sin^2 2\alpha}; L_3(z, \alpha) = \\
&= \frac{\operatorname{sh}^2 2\alpha z + z^2 \sin^2 2\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha z - z^2 \sin^2 2\alpha}
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что выражения (2) определяют относительные перемещения точек границы клина, абсолютные перемещения этих точек являются величинами бесконечно большими. При получении приближенных выражений для перемещений используем метод специальной аппроксимации [3]. С этой целью исследуем поведение функций $L_i(z, \alpha)$ ($i=1, 2, 3$).

Они обладают следующими свойствами:
при $z \rightarrow 0$:

$$L_1(z, \alpha) \sim A(\alpha) O\left(\frac{1}{z}\right); L_2(z, \alpha) \sim B(\alpha) O\left(\frac{1}{z}\right);$$

$$L_3(z, \alpha) \sim \frac{4\alpha^2 + \sin^2 2\alpha}{C(\alpha)} O(1); C(\alpha) = 4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha \quad (3)$$

при $z \rightarrow \infty$:

$$L_1(z, \alpha) \sim 2 + O(e^{-4\alpha z}); L_2(z, \alpha) \sim 2 + O(e^{-4\alpha z}); \\ L_3(z, \alpha) \sim 1 + O(e^{-4\alpha z}).$$

С учетом свойств (3) функций $L_i(z, \alpha)$ ($i = 1, 2, 3$) аппроксимируем их на полубесконечном интервале выражениями

$$L_1(z, \alpha) \approx 2 \operatorname{cth} \frac{2z}{A(\alpha)}; L_2(z, \alpha) \approx 2 \operatorname{cth} \frac{2z}{B(\alpha)}; \\ L_3(z, \alpha) \approx \frac{4\alpha^2}{C(\alpha)} + \sin^2 2\alpha \frac{z}{\operatorname{sh}[C(\alpha)]z} \quad (4)$$

Подставляя выражения (4) в (2) и выполняя квадратуры, получаем следующие формулы для перемещений

$$V = \frac{P}{E} A(\alpha) \ln a - \frac{2P}{\pi E} \ln/a \frac{\frac{\pi}{2} A(\alpha)}{r} \frac{\frac{\pi}{2} A(\alpha)}{r} / + \\ + \frac{T}{2E} \left\{ \pm \left[\frac{4\alpha^2}{C(\alpha)} - \nu \right] \pm \frac{\sin^2 2\alpha}{C(\alpha)} \frac{r \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{r} - a \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{a}}{r \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{r} + a \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{a}} \right\}; \\ U = \frac{P}{2E} \left\{ \pm \left[\frac{4\alpha^2}{C(\alpha)} - \nu \right] \pm \frac{\sin^2 2\alpha}{C(\alpha)} \frac{r \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{r} - a \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{a}}{r \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{r} + a \frac{\frac{\pi}{C(\alpha)}}{a}} \right\} + \\ + \frac{T}{E} B(\alpha) \ln a - \frac{2T}{\pi E} \ln/a \frac{\frac{\pi}{2} B(\alpha)}{r} \frac{\frac{\pi}{2} B(\alpha)}{r} \},$$

где верхний знак берется для $a > r$ в противном случае берется нижний. При $\alpha = \pi/2$ (случай упругой полуплоскости) выражения (5) дают точные величины относительных перемещений.

Полученные результаты могут найти применение при решении ряда контактных задач теории упругости.

Л и т е р а т у р а

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л., 1967. 2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. — М., 1975. 3. Ворovich И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М., 1974.

УДК 539.3

С.В. Босаков

РАСЧЕТ БАЛОЧНЫХ ПЛИТ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ КЛИНЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

В исследовании [1] приводятся выражения для компонент напряжений в плоском клине со свободными гранями от действия нагрузки, приложенной к границам клина. Пользуясь ими, можно получить выражения для относительных перемещений граней клина от действия нормальной сосредоточенной силы P :

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{P(1-\nu^2)}{2E} A(\alpha) \ln \frac{a}{r} - \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} L_1(y, \alpha) \frac{\cos(y \ln \frac{a}{r})}{y} dy;$$

$$V_{\varphi=\alpha} = - \frac{P(1-\nu^2)}{E} B(\alpha) \ln \frac{a}{r} -$$

$$- \frac{2P(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^{\infty} L_2(y, \alpha) \frac{\cos(y \ln \frac{a}{r})}{y} dy; \quad (1)$$

$$L_1(y, \alpha) = \frac{\operatorname{sh} 4\alpha y + y \sin 4\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha y - y^2 \sin^2 2\alpha}; \quad L_2(y, \alpha) =$$