УДК 624.074.4

В.М.Шапин

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ КУПОЛОВ НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ НАГРУЗКУ

К числу важнейших нагрузок, действующих на стержневые купола, относятся такие, которые не являются осесимметричными. Расчет конструкции на прочность при действии этих нагрузок весьма сложен и трудоемок.

Такой распространенный метод, применяемый в расчетах на прочность подобных конструкций, как метод статической эквивалентности, дает в случае существенно неравномерной нагрузки недостаточно надежные результаты. Альтернативным подходом является непосредственный расчет стержневого купола как фермы. В конечном итоге он приводит к системе линейных уравнений высокого порядка. Однако вследствие того, что стержневые купола обладают, как правило, циклической симметрией, порядок системы удается существенно понизить, так что расчет становится доступным для ЭВМ со сравнительно небольшим объемом оперативной памяти.

В данной статье применяется аппарат спектрального разложения квазициклических матриц, известный в строительной механике [1, 2] . Несмотря на то что матрица исходной системы, полученной на основе метода перемещений, не является квазициклической из-за наличия особого узла в вершине сферы, система уравнений разлагается в подсистемы меньшего порядка (порядок их меньше порядка исходной системы в n раз, где n – индекс цикличности).

Предположим, что узлы стержневого купола расположены на сфере радиуса R и соединения стержней шарнирные. Будем относить перемещения и силы, приложенные к k -му узлу, к локальной системе координат u_k , v_k , w_k ,где u_k – ось, касательная к параллели и направленная в сторону возрастания долготы; v_k – ось, касательная к меридиану и направленная в сторону возрастания широты; w_k –ось, направленная по радиусу к центру сферы. Проекции вектора перемещений узла обозначим теми же буквами, что и сами оси, проекции сил будем снабжать, по мере необходимости, индексами u , v , w . Пусть далее l_{km} – длина стержня, соединяющего k -й и m -й узлы, а Δl_{km} – его удлинение. Легко показать, что

$$\Delta l_{km} = u_k \alpha_{km} + v_k \beta_{km} + w_k \gamma_{km} + u_m \alpha_{mk} + v_m \beta_{mk} +$$

$$+ w_m \gamma_{mk}, \qquad (1)$$

$$(k,m = 0,1,2,\dots,N),$$

где α_{km}, β_{km}, γ_{km} – направляющие косинусы стержня, соединяющего k -й и m -й узлы в системе координат, связанной с k -м узлом. Потенциальная энергия деформации стержня

$$\pi_{km} = \frac{1}{2} E_{km} F_{km} \frac{(\Delta l_{km})^2}{l_{km}}, \qquad (2)$$

где E_{km} – модуль Юнга; F_{km} – площадь поперечного сечения стержня. Потенциальная энергия деформации всей системы получается суммированием выражения (2) по всем стержням системы. Далее известно, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = P_i^u; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = P_i^v; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = P_i^w, \qquad (3)$$

где Π – потенциальная энергия деформации всей системы; P_i^u, P_i^v, P_i^w – проекции вектора внешней нагрузки, приложенной к i -му узлу, на оси выбранной системы координат. Пользуясь соотношениями (1), (2), преобразуем выражения (3) к виду

$$\sum_j E_{ij} F_{ij} \frac{u_i \alpha_{ij} + v_i \beta_{ij} + w_i \gamma_{ij} + u_j \alpha_{ji} + v_j \beta_{ji} + w_j \gamma_{ji}}{l_{ij}} \alpha_{ij} = P_i^u;$$

$$\sum_j E_{ij} F_{ij} \frac{u_i \alpha_{ij} + v_i \beta_{ij} + w_i \gamma_{ij} + u_j \alpha_{ji} + v_j \beta_{ji} + w_j \gamma_{ji}}{l_{ij}} \beta_{ij} = P_i^v; \qquad (4)$$

$$\sum_j E_{ij} F_{ij} \frac{u_i \alpha_{ij} + v_i \beta_{ij} + w_i \gamma_{ij} + u_j \alpha_{ji} + v_j \beta_{ji} + w_j \gamma_{ji}}{l_{ij}} \gamma_{ij} = P_i^w,$$

причем суммирование производится по стержням, примыкающим к i -му узлу ($i = 0, 1, \dots, N$). Таким образом, порядок системы (4) равен $3N + 3$. Соотношения (4) представляют по сути уравнения равновесия i -го узла под действием внешних сил и внутренних усилий, приложенных к узлу. Предпо-

...гая, что конструкция состоит из n одинаковых фрагментов, каждый из которых повернут вокруг вертикальной оси конструкции на угол $2\pi/n$ по отношению к предыдущему, перейдем в системе (4) к двойной нумерации узлов. Условимся, что первый индекс будет обозначать номер фрагмента конструкции, второй – номер узла во фрагменте. Узел, находящийся в вершине, обозначим одним индексом "о". Система координат в том виде, как она была введена выше, в узле "о" не определена. Поэтому условимся, что v_o – проекция вектора смещения на касательную к меридиану, проходящему через узел "1,1", w_o определяется как и ранее, а u_o – проекция вектора смещения на прямую, ортогональную двум первым, при условии, что введенная координатная система является правой. Выделяя отдельно уравнения равновесия нулевого узла, придадим системе (4) вид

$$A_o \delta_o + \sum_{k=1}^{n} B_k \delta_{k1} = P_o; \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&H_1 \delta_o + D\Delta_1 + C\Delta_2 + C'\Delta_n = P_1; \\
&H_2 \delta_o + C'\Delta_1 + D\Delta_2 + C\Delta_3 = P_2; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&H_n \delta_o + C\Delta_1 + D\Delta_n + C'\Delta_{n-1} = P_n.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Здесь δ_o – вектор смещения нулевого узла; δ_{k1} – вектор смещения 1-го узла k-го фрагмента; Δ_k – мультивектор размерности $3m$ ($m = \frac{N}{n}$), образованный из векторов смещений всех узлов k-го фрагмента (по условию нулевой узел не считается входящим ни в один фрагмент); D, C – квадратные матрицы порядка $3m$;

$$H_k = \begin{bmatrix} B'_k \\ 0\ 0\ 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix}$$ – матрица размерности $3m \times 3$;

знак " ' " означает транспонирование матрицы. Введем в рассмотрение комплексное число $z_q = e^{ig\frac{2\pi}{n}}$. Умножая все уравнения системы (6) на z_q^{k-1} ($k = 1,\dots, n$) и складывая, получим при $q = 0,1,\dots, n-1$ выражение

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} H_k\right)\delta_o + \left[D + z_q C + \bar{z}_q \bar{C}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1}\Delta_k\right] = \sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} P_k. \qquad (7)$$

Здесь и в дальнейшем черта над буквой означает комплексное сопряжение.

Рассмотрим матрицу

$$\sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} H_k = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} B_k' & & \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Матрица B_k' имеет вид

$$B_k' = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ -\beta^2\sin(k-1)\frac{2\pi}{n} & -\beta^2\cos(k-1)\frac{2\pi}{n} & -\beta\gamma \\ & & \\ \gamma\beta\sin(k-1)\frac{2\pi}{n} & \beta\gamma\cos(k-1)\frac{2\pi}{n} & \gamma^2 \end{bmatrix},$$

где $d = \dfrac{EF_{01}}{l_{01}}$; $\beta = \dfrac{R}{l_{01}} \sin\varphi_1$; $\gamma = \dfrac{l_{01}}{2R}$;

φ_1 – угол между радиусами-векторами, проходящими через нулевой и первый узлы.

Вследствие соотношений

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sin l\frac{2\pi}{n}\, e^{iql\frac{2\pi}{n}} = \begin{cases} \frac{in}{2} & \text{при} \quad q=1 \\ -\frac{in}{2} & \text{при} \quad q=n-1 \\ 0 & \text{при} \quad 1<q<n-1, q=0; \end{cases}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} \cos l\frac{2\pi}{n}\, e^{igl\frac{2\pi}{n}} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{при} \quad q=1,\ n-1, \\ 0 & \text{при} \quad 1< q<n-1,\ q=0; \end{cases}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} e^{igl\frac{2\pi}{n}} = 0,$$

если $e^{ig\frac{2\pi}{n}}$ – первообразный корень, выражению (8) можем придать вид

$$\sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} H_k = H^{(q)} = \begin{bmatrix} & B^{(q)} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

причем

$$B^{(0)} = d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}; \quad B^{(1)} = d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i\,c_1 & c_1 & 0 \\ i\cdot c_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}; B^{(n-1)} = \overline{B^{(1)}}$$

$$B^{(q)} = [0] \quad \text{при} \quad 1<q<n-1, \tag{9}$$

где $b_1 = -n\beta\gamma$, $\quad b_2 = n\gamma^2$;

$$c_1 = -\frac{\beta^2 n}{2}, \qquad c_2 = \frac{\beta\gamma n}{2}.$$

Матрица A_o в выражении (5) является диагональной, следовательно, A_o^{-1} тоже диагональна. Обозначим ее элементы (a_{11}^{-1}), $(a_{22})^{-1}$, $(a_{33})^{-1}$. Очевидно, $a_{11} = a_{22}$. Умножив формулу (5) слева на A_o^{-1}, получим

$$\delta_o = A_o^{-1} P_o - \sum_{k=1}^{n} A_o^{-1} B_k \, \delta_{k1}. \tag{10}$$

Легко показать, что

$$H^{(o)} A_o^{-1} B_k = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta\gamma b_1}{a_{33}} & \frac{\gamma^2 b_1}{a_{33}} \\ 0 & -\frac{\beta\gamma b_2}{a_{33}} & \frac{\gamma^2 b_2}{a_{33}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T^{(o)}; \tag{11}$$

$$H^{(1)} A_o^{-1} B_k = d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1\beta^2}{a_{11}} & \frac{c_1\gamma\beta}{a_{11}} \\ 0 & -\frac{c_2\beta^2}{a_{11}} & \frac{c_2\gamma\beta}{a_{11}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad z_1^{k-1} = T^{(1)} z_1^{k-1}; \tag{12}$$

$$H^{(n-1)} A_o^{-1} B_k = \overline{H^{(1)} A_o^{-1} B_k} = T^{(1)} z_{n-1}^{k-1} = T^{(1)} \bar{z}_1^{k-1} \qquad (13)$$

Подставив равенство (10) в (7) с учетом выражений (9), (11), (12), (13), получим

$$(D_q + \bar{z}_q c + z_q c') \quad x_q = f_q , \qquad (14)$$

где $x_q = \sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} \Delta_k$; $f_q = \sum_{k=1}^{n} z_q^{k-1} P_k - H^{(q)} A_o^{-1} P_o$;

$D_q = D - R^{(q)}$; $R^{(q)} = \left[T^{(q)}, 0 \right]$ –матрица размерности $3m \times 3m$;

$$q = 0,1,\dots, n-1.$$

Таким образом, решение системы (5), (6), имеющей порядок $3N + 3$, свелось к решению нескольких систем, каждая из которых имеет порядок $3m$. Отметим, что для значений q, равных 1 и $n-1$, выражение (14) дает комплексно сопряженные уравнения. Следовательно, число различных систем будет равно $\frac{n+2}{2}$, если n четно, и $\frac{n+1}{2}$, если n нечетно.

После определения x_q векторы смещений Δ_k выражаются с помощью соотношений

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{n-1} \bar{z}^{q(k-1)} x_q \, (k = 1,2,\dots, n) ,$$

а вектор смещений нулевого узла очевидным образом находится из формулы (10).

Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М., 1969.
2. Динкевич С.З. Спектральная теория циклических матриц и расчет циклических конструкций. – В сб.: Расчет пространственных конструкций. М., 1971, вып. Х1У.