мированной схеме. – Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1975, №2. 3. Динамика висячих систем. Отчет НИР. –Минск, 1975.

УДК 624.04.:512.83:681.3

Р.И.Фурунжиев

КОНТАКТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В РАСЧЕТАХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ

В расчетах конструкций методом конечных элементов на основе суперэлементов расчетная схема конструкции расчленяется на отдельные части в соответствии с топологическими, функциональными и другими особенностями [1 – 4]. В реальных конструкциях между их отдельными частями может иметь место податливый контакт. Известные методы расчета на основе суперэлементов предполагают наличие только жесткого взаимного контакта между частями конструкций. Такой контакт – частный случай податливого сопряжения, когда податливость равна нулю. Кроме того, эти методы предполагают формирование специальных подматриц, которые зависят от характера границ между отдельными частями конструкции и в конечном счете от ее индивидуальных особенностей.

В нашей статье рассматривается методика стыковки математических моделей отдельных частей конструкции с использованием так называемых контактных конечных элементов (ККЭ), позволяющая непосредственно по матрицам жесткости отдельных частей конструкции формировать матрицу жесткости системы в целом и учитывать при этом податливый контакт между отдельными частями. Жесткий взаимный контакт при этом учитывается по методике, аналогичной учету граничных условий в методе конечных элементов.

В основе методики лежит процедура введения между смежными узлами конечноэлементной модели отдельных частей конструкции специальных контактных конечных элементов [4]. В случае непосредственного жесткого примыкания вводятся фиктивные ККЭ бесконечной жесткости. При численной реализации жесткость последних принимается конечной достаточно большой величиной. Для улучшения обусловленности матрицы жесткости системы предлагается процедура преобразований, после которой большие величины, создаваемые в отдельных случаях ККЭ, оказываются на диагоналях матриц.

Потенциальная энергия деформации элементарного ККЭ, равная работе внутренних сил, представляется в виде

$$W_s = \frac{1}{2} \Delta_s g_s \Delta_s , \qquad (1)$$

где g_s, Δ_s – соответственно жесткость (реакции от единичных перемещений) и относительная деформация s-го элементарного ККЭ. На основании теоремы Клапейрона матрица жесткости рассматриваемого элементарного ККЭ, соответствующая вектору относительных перемещений, который представлен одной компонентой Δ_s, равна

$$\left[k_s \right] = g_s . \qquad (2)$$

Аналогичная матрица жесткости элементарного ККЭ, соответствующая вектору перемещений смежных узлов ККЭ, представляется в виде [4]

$$\left[k_s \right] = g_s \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Подставляя в выражения (2) и (3) податливости растяжения – сжатия, сдвига, кручения и др., можно формировать матрицы жесткости для различных типов ККЭ. Суммируя разнообразные элементарные ККЭ с учетом нумераций компонентов перемещений, можно формировать сложные ККЭ. Как показано в работе [4], сложением элементарных ККЭ растяжения-сжатия и сдвига может быть получен, например, комбинированный ККЭ с такими свойствами и матрицей жесткости, как и конечный элемент, сформированный в работе [5]. Аналогично может быть построен комбинированный ККЭ со свойствами, подобными свойствам контактного элемента, приведенного в статье [6].

Рассмотрим методику формирования матрицы жесткости системы на основе суперэлементов с применением ККЭ. Примем границу между частями конструкции не в виде одиночной линии, как это делается в процессе традиционных методов разбивки на суперэлементы (рис. 1, а), а в виде двух линий, как показано на рис. 1, б. Узлы, лежащие на граничных линиях, принадлежат только одной из примыкающих частей конструкции. Введем между смежными узлами примыкающих частей конструкции контактные конечные элементы (рис. 1, б).

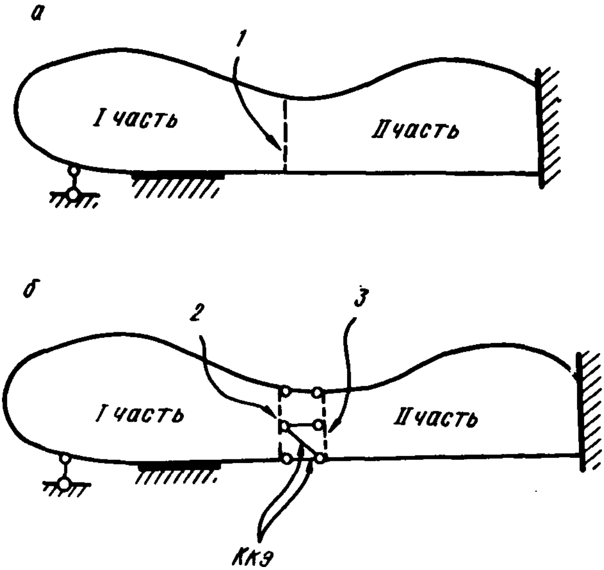

Рис. 1. Способы разбивки расчетной схемы конструкций на суперэлементы:
1 – граничная линия; 2 – I граничная линия; 3 – II граничная линия.

Сгруппируем компоненты перемещений внутренних и внешних узлов и соответствующие подматрицы жесткости частей конструкции в отдельные подсистемы. Уравнения метода конечных элементов без учета ККЭ тогда представляются совокупностью отдельных подсистем алгебраических уравнений. Совместность этих подсистем обеспечивается прибавлением к матрице жесткости совокупности таких уравнений соответствующих подматриц контакта, составленных на основе матриц жесткости ККЭ [3] :

$$[k]_j = \begin{bmatrix} [k_p]_j & -[k_p]_j \\ -[k_p]_j & [k_p]_j \end{bmatrix}, \text{ где } [k_p]_j = \begin{bmatrix} g_{\rho+1} \\ g_{\rho+2} \dots \\ g_{\rho+3} \dots \\ g_{\rho+4} \end{bmatrix} - \tag{4}$$

диагональная матрица жесткости ККЭ на границе j размерностью $m \times m$; m – число ККЭ на границе j ; g_s – жесткость j -го ККЭ; j – порядковый номер граничной линии; ρ – порядковый номер последней компоненты перемещений внутренних узлов предыдущей части.

Для простоты и большей наглядности разобьем расчетную схему конструкции, показанную на рис. 1, на две части. Матрицы жесткости отдельных частей конструкции относительно векторов перемещений $\left\{ U_i^I \quad U_g^I \right\}$ и $\left\{ U_g^{II} \quad U_i^{II} \right\}$, размерностью соответственно n_I и n_{II}, представляются в виде

$$[k]_I = \left[\begin{array}{c|c} k_{ii}^I & k_{ig}^I \\ \hline k_{gi}^I & k_{gg}^I \end{array}\right]; \qquad [k]_{II} = \left[\begin{array}{c|c} k_{gg}^{II} & k_{gi}^{II} \\ \hline k_{ig}^{II} & k_{ii}^{II} \end{array}\right]. \qquad (5)$$

Матрица жесткости системы формируется из матриц жесткости (5) отдельных частей и подматрицы контакта (4) следующим образом:

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} k_{ii}^I & k_{ig}^I & & \\ \hline k_{gi}^I & k_{gg}^I & & \\ \hline & & k_{gg}^{II} & k_{gi}^{II} \\ \hline & & k_{ig}^{II} & k_{ii}^{II} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & k_p & -k_p & \\ \hline & -k_p & k_p & \\ \hline & & & \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} k_{ii}^I & k_{ig}^I & & \\ \hline k_{gi}^I & k_{gg}^I + k_p & -k_p & \\ \hline & -k_p & k_{gg}^{II} + k_p & k_{gi}^{II} \\ \hline & & k_{ig}^{II} & k_{ii}^{II} \end{array}\right] \qquad (6)$$

Размерность этой матрицы $(n_I + n_{II}) \times (n_I + n_{II})$, где $n_I + n_{II} = n + n_g$ (n – общее число искомых компонент перемещений; n_g – число компонент перемещений граничных узлов).

Заметим, что для случая разбивки, показанного на рис. 1,а, матрица жесткости представляется в виде

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c|c} k^I_{ii} & k^I_{ig} & \\ \hline k^I_{gi} & \begin{array}{c} k^I_{gg} + \\ + k^{II}_{gg} \end{array} & k^{II}_{gi} \\ \hline & k^{II}_{ig} & k^{II}_{ii} \end{array}\right] \qquad (7)$$

или

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c|c} k^I_{ii} & & k^I_{ig} \\ \hline & k^{II}_{ii} & k^{II}_{gi} \\ \hline k^I_{gi} & k^{II}_{ig} & \begin{array}{c} k^I_{gg} + \\ + k^{II}_{gg} \end{array} \end{array}\right] \qquad (8)$$

в зависимости от принятого порядка компонент соответственно в виде $\{ u^I_i \quad u_g \quad u^{II}_i \}$ или $\{ u^I_i \quad u^{II}_i \quad u_g \}$. Размерность этих матриц $n \times n$, где n – общее число искомых компонент перемещений конечноэлементных узлов системы.

Как видно из выражения для матрицы жесткости (6), при $g_s = 0$ ($s = 1,2, \ldots, m$), т.е. отсутствии взаимного контакта, система уравнений метода конечных элементов распадается на ряд отдельных независимых подсистем. Это соответствует отсутствию некоторых связей или самостоятельной работе отдельных частей конструкций. При $0 < g_s < \infty$ моделируется податливое сопряжение между частями конструкции. Если же величина жесткости ККЭ имеет бесконечно большое значение, т.е. $g_s = \infty$, то моделируется жесткий контакт. При численной реализации жесткость соответствующего ККЭ принимается конечной большой величиной.

Трудности в вычислениях могут возникнуть из-за плохой обусловленности матрицы жесткости системы, порождаемой большими внедиагональными членами, которые могут создаваться ККЭ в случаях, когда $g_s \longrightarrow \infty$. Для преодоления этих трудностей полученную матрицу (6) можно преобразовать таким образом, что эти большие величины оказываются на диагонали матрицы жесткости.

Преобразуем компоненты перемещений узлов, лежащих на одной из линий границы, в относительные перемещения между смежными узлами, принадлежащими различным частям конструкции. Зависимость эта имеет следующий вид:

$$u^{II} = u^{I} + \Delta u, \tag{9}$$

где u^{I}, u^{II} – компоненты перемещений смежных узлов, лежащих соответственно на граничных линиях I и II (рис. 1, б). В качестве степеней свободы ККЭ тогда рассматриваются относительные перемещения между смежными узлами границы [6]. Матрица жесткости ККЭ состоит из одного элемента и имеет вид, представленный выражением (2). Матрица жесткости конструкции в целом строится относительно вектора перемещений, в которой компоненты перемещений одной из граничных линий заменяются относительными перемещениями соответствующих компонент смежных узлов. Эта матрица может быть получена из матрицы жесткости конструкции (6) путем некоторых преобразований.

Так, например, если в сформированную с использованием ККЭ матрицу, соответствующую вектору перемещений $\left\{u_i^{I} \;\; u_g^{I} \;\; u_g^{II} \;\; u_i^{II}\right\}$, ввести преобразование (9), то получим следующую матрицу относительно вектора перемещений $\left\{u^{I} \;\; u_g^{I} \;\; \Delta u \;\; u^{II}\right\}$:

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} k_{ii}^{I} & k_{ig}^{I} & & \\ \hline k_{gi}^{I} & k_{gg}^{I} + k_p - k_p & -k_p & \\ \hline & k_{gg}^{II} + k_p - k_p & k_{gg}^{II} + k_p & k_{gi}^{II} \\ \hline & k_{ig}^{II} & k_{ig}^{II} & k_{ii}^{II} \end{array}\right] \tag{10}$$

Суммируя далее вторую строку матрицы с третьей, окончательно получаем

$$
[k] = \left[\begin{array}{c:c:c:c}
k^{I}_{ii} & k^{I}_{ig} & & \\
\hdashline
k^{I}_{gi} & k^{I}_{gg}+k^{II}_{gg} & k^{II}_{gg} & k^{II}_{gi} \\
\hdashline
 & k^{II}_{gg} & k^{II}_{gg}+k_p & k^{II}_{gi} \\
\hdashline
 & k^{II}_{ig} & k^{II}_{ig} & k^{II}_{ii}
\end{array}\right] \qquad (11)
$$

Полученная матрица содержит подматрицы k^{I}_{ii}, k^{I}_{ig}, k^{I}_{gi}, k^{I}_{gg} и k^{II}_{ii}, k^{II}_{ig}, k^{II}_{gi}, k^{II}_{gg}, являющиеся элементами математических моделей соответственно первой и второй частей конструкции, и подматрицу k_p, составленную из матриц жесткости (2) ККЭ.

Как видно, при $g_1 = 0$, т.е. отсутствии связи, соответствующие уравнения матрицы (6) становятся взаимно независимыми. Если же сопряжение между частями полностью отсутствует, то $[k_p] = 0$ и матрица (11) распадается на две не связанные подсистемы типа первого слагаемого выражения (6).

Если жесткости ККЭ соизмеримы с жесткостями конечных элементов конструкции, то обеспечивается расчет конструкций с учетом податливости сопряжения отдельных частей. Наконец, для моделирования жесткого взаимного примыкания в подматрице соответствующему элементу k_p присваиваются большие,но конечные значения. Так как элементы жесткости g_s располагаются теперь только на диагоналях матрицы жесткости системы (11), то эта процедура автоматически обеспечивает очень малые значения для соответствующих компонент перемещений Δu. Как видно, эта процедура тождественна учету граничных условий с помощью искусственного приема, предложенного Пейном и Айронсом [2].

Таким образом, для автоматизации процесса стыковки математических моделей отдельных частей конструкции и формирования матрицы жесткости системы должны быть сформированы подматрицы, соответствующие компонентам внутренних узлов $[k_{ii}]^{I}$ и граничных узлов $[k_{gg}]^{I}$, подматриц $[k_{ig}]^{I}$ для каждой части конструкции и подматрица $[k_p]$ на основе исходной информации о характере сопряжения частей.

В общем случае матрицы $[k_{gg}]^{I}$, $[k_{ig}]^{I}$ формируются, ориентируясь на максимальное число граничных узлов. Задавая соответствующие значения жесткости ККЭ нулю или бесконечности, автоматически учитываются условия отсутствия той или иной связи или жесткого примыкания. Очевидно, что граничные условия реальных задач можно также трактовать как ККЭ. Тогда искусственный прием, предложенный Пейном и Айронсом [6], находит здесь ясную физическую интерпретацию.

Изложенный метод стыковки математических моделей отдельных частей конструкции положен в основу разработанного комплекса алгоритмов и программ расчета стержневых, пластинчатых и комбинированных конструкций. Программы для ЭВМ составлены на алгоритмическом языке ФОРТРАН IУ.

Литература

1. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - Л., 1974. 2.Зенкевич О.С. Метод конечных элементов в технике. -М., 1975. 3. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ/ А.В.Александров, Б.Я.Лащеников, Н.Н.Шапошников, В.А.Смирнов. Под ред. А.Ф.Смирнова. - М., 1976. 4. Фурунжиев Р.И. Контактные конечные элементы (ККЭ) в расчете конструкций с учетом податливости узловых связей. - В сб.: Строит. конструкции. Минск, 1978,вып. 20. 5. Ngo D. Scordelis A.C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams.-Journal of the American Concrete Institute, 1967, N3. 6.Jamshid Ghabousii, Edward L. Wilson and Jeremy Izenberg. Finite Element for Rock Jouinte and Interface. - Journal of the soil mechanics and foundations division, 1973, N10.