

ЭЛЕКТРОННЫЕ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕЙ ФЕРМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛА

Экспериментальные зависимости между напряжениями σ и относительными деформациями ϵ , которые представляются в виде графических диаграмм растяжения-сжатия, показывают, что у всех материалов, начиная с некоторого уровня напряженного состояния, линейная зависимость между σ и ϵ , присущая закону Гука, не соблюдается. Широко используемые в настоящее время в строительстве высокопрочные материалы, алюминиевые сплавы, пластмассы имеют нелинейную диаграмму деформирования $\sigma - \epsilon$. Конструкции, в которых стремятся наиболее полно использовать прочностные возможности материалов с нелинейной зависимостью между σ и ϵ , считаются физически нелинейными. Для учета физической нелинейности материала часто криволинейная зависимость между σ и ϵ аппроксимируется отрезками прямых. Такая аппроксимация приводит либо к идеализированной диаграмме Прандтля (рис. 1,а), либо к билинейной зависимости между σ и ϵ (рис. 2,а).

Рассмотрим стержень, работающий на продольное усилие и выполненный из материала, подчиняющегося закону деформирования либо по рис. 1,а, либо по рис. 2,а. Расчет конструкции, содержащей такие стержни (ферма, комбинированная система) представляет сложную задачу строительной механики, так как заранее нельзя точно указать, на каком из участков диаграммы работает в данный момент тот или иной стержень. Задача осложняется еще и тем, что материал стержней, например фермы, часто работает на растяжение и сжатие по-разному. Как видно из диаграмм на рис. 1,а и 2,а, в общем случае длины участка I в зонах сжатия и растяжения различны. В такой постановке систему, содержащую подобным образом работающие стержни, можно классифицировать как физически, так и конструктивно нелинейную, ибо свойства материала в ее стержнях изменяются скачкообразно. Если из материала, работающего по одной из рассматриваемых диаграмм, изготовлена плоская ферма, содержащая n стержней, то при рассмотрении ее как конструктивно нелинейной системы необходимо помнить, что число возможных вариантов рабочих расчетных схем такой фермы равно 3^n , где число 3 определяет количество участков аппроксимации нелиней-

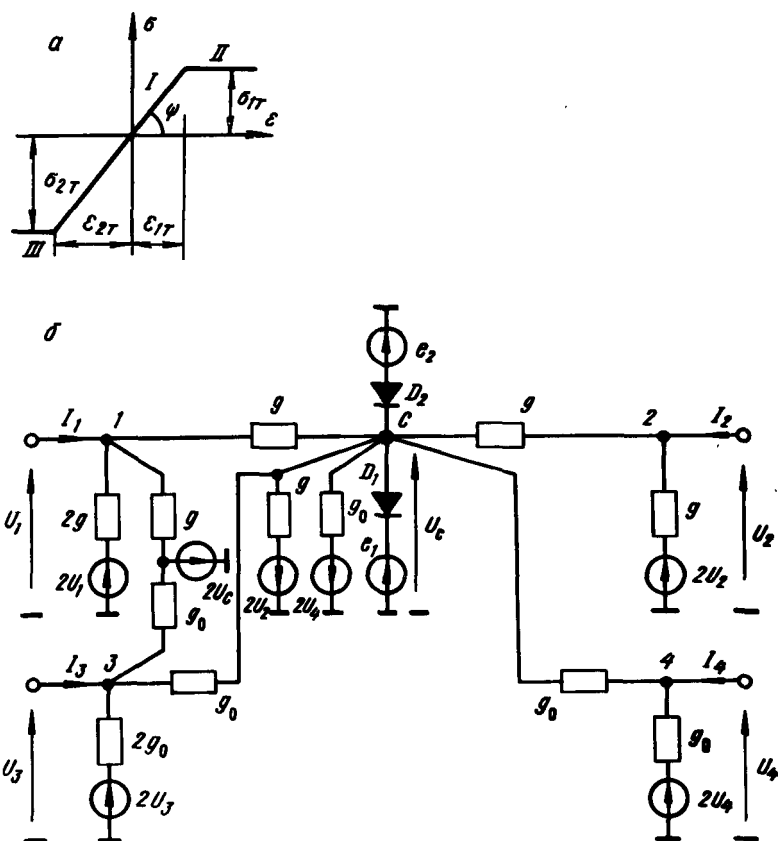


Рис. 1. Нелинейная зависимость между σ и ϵ и электронная модель стержня.

ной диаграммы. Так, даже для элементарной фермы, содержащей только 7 стержней, число вариантов рабочих расчетных схем равно 2187. В такой постановке расчет объектов, содержащих стержни с нелинейным характером работы, целесообразно производить с помощью аналоговой вычислительной техники [1]. Рассматриваемые деформируемые объекты могут быть как статически определимыми, так и статически неопределимыми, причем степень статической неопределимости совершенно не влияет на сложность электромоделирования.

Ограничимся рассмотрением стержня $i-k$ длиной l , расположенного в первом квадранте и наклоненного к оси x под углом α . За положительные прием сжимающие усилия. Тогда относительное укорочение стержня, концы которого перемести-

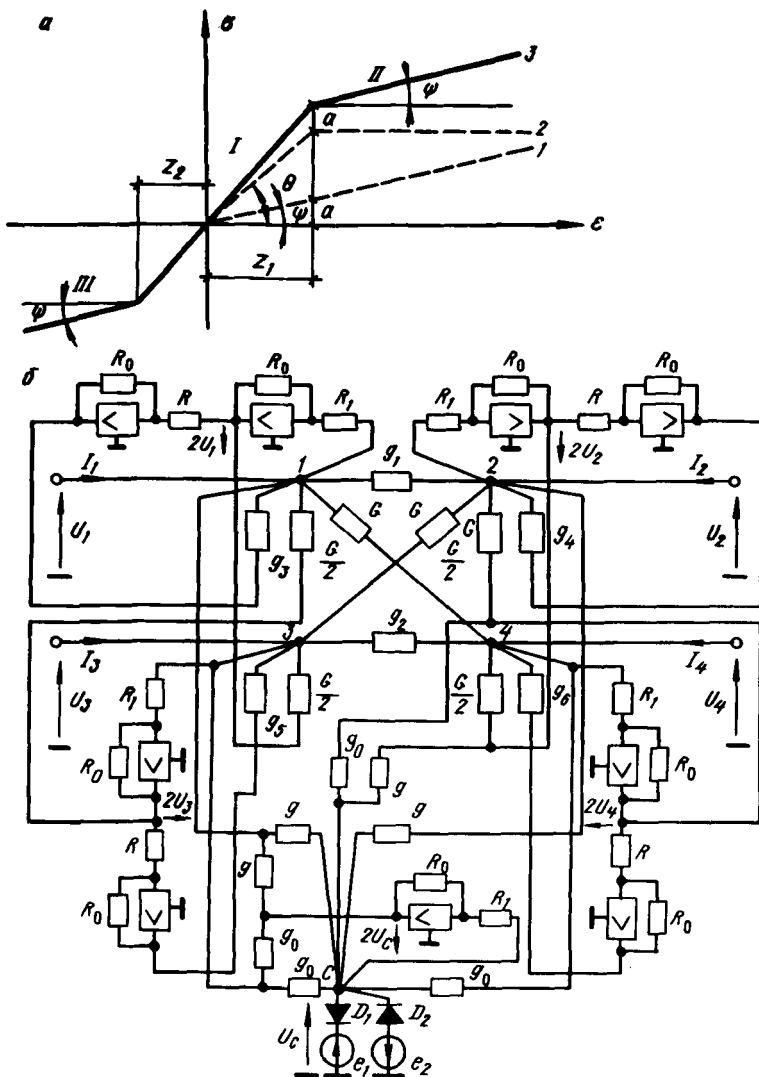


Рис. 2. Билинейная зависимость между σ и ϵ и электронная модель стержня.

лись по горизонтали на величины x_i и x_k , а по вертикали на y_i и y_k , определяется следующим образом (рассматривается геометрически линейная задача):

$$\epsilon = \frac{1}{l} [(x_i - x_k) \cos \alpha + (y_i - y_k) \sin \alpha] \quad (1)$$

Рассмотрим вначале стержень с диаграммой работы на рис. 1, а. Проекции усилия в нем на оси x и y для начала i и конца k стержня равны (если стержень работает на линейном участке I):

$$\begin{aligned} N_I \cos \alpha &= \frac{EF}{l} [(x_i - x_k) \cos^2 \alpha + (y_i - y_k) \cos \alpha \sin \alpha]; \\ -N_I \cos \alpha &= \frac{EF}{l} [-(x_i - x_k) \cos^2 \alpha - (y_i - y_k) \cos \alpha \sin \alpha]; \\ N_I \sin \alpha &= \frac{EF}{l} [(x_i - x_k) \cos \alpha \sin \alpha + (y_i - y_k) \sin^2 \alpha]; \\ -N_I \sin \alpha &= \frac{EF}{l} [-(x_i - x_k) \cos \alpha \sin \alpha - (y_i - y_k) \sin^2 \alpha]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если стержень начинает работать в пластической зоне, то усилие в нем становится равным постоянной величине при сжатии

$$N_{1T} = F \sigma_{1T} = FE \epsilon_{1T} \quad (3)$$

и при растяжении

$$N_{2T} = -F \sigma_{2T} = -FE \epsilon_{2T},$$

где $E = \operatorname{tg} \psi$ (рис. 1, а).

Проекции усилия в начале и в конце стержня при работе его в одной из пластических зон равны

$$\begin{aligned} N_{jT} \cos \alpha &= \pm EF \epsilon_{jT} \cos \alpha; \\ -N_{jT} \cos \alpha &= \mp EF \epsilon_{jT} \cos \alpha; \quad (j=1,2) \\ N_{jT} \sin \alpha &= \pm EF \epsilon_{jT} \sin \alpha; \\ -N_{jT} \sin \alpha &= \mp EF \epsilon_{jT} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (4)$$

где верхние знаки относятся к $j = 1$, а нижние - к $j = 2$.

Уравнения (2) и (4) подлежат моделированию. Для синтеза электронной модели конечного элемента в виде стержня с нелинейным характером работы на продольное усилие применим разработанный автором метод активного инверсного одно- и двукратного дублирования неизвестных [5], который обладает более широкими возможностями, чем другие известные методы. Электронная модель при использовании указанного метода синтезируется таким образом, что некоторые неизвестные, обрабатываемые в виде электрических напряжений, содержатся в модели инвертированными один или два раза. Инвертирование производится при помощи электронных операционных усилителей, которые выпускаются серийно в микроинтегральном исполнении. Метод носит название активного дублирования в связи с тем, что эта операция выполняется электронными усилителями.

Схема-аналог стержня, работающего на продольное усилие в соответствии с диаграммой на рис. 1,а, показана на рис. 1, б. Эта схема выполнена на базе функционального преобразователя двух переменных [2]. По сути она является функциональным преобразователем четырех переменных: напряжений U_1, U_2, U_3, U_4 . Операции однократного с удвоением и двукратного инвертирования напряжений выполняются при помощи инвертирующих операционных усилителей, которые на схеме не показаны (включение операционных усилителей для выполнения аналогичных функций показано на рис. 2,б).

Определим напряжение U_C в узле С (рис. 1,б), исходя из равенства нулю суммы токов в этом узле, при малых значениях U_C , когда диод D_1 закрыт положительным опорным напряжением e_1 :

$$(3g+3g_o)U_C - gU_1 - gU_2 + g2U_2 - g_o U_3 - g_o U_4 + g_o 2U_4 = 0,$$

$$U_C = \frac{g}{3(g+g_o)}(U_1 - U_2) + \frac{g_o}{3(g+g_o)}(U_3 - U_4). \quad (5)$$

Когда потенциал узла С станет равным e_1 , открывается диод D_1 и напряжение в этом узле становится равным постоянной величине $U_C = e_1$. При отрицательном потенциале узла С, когда открывается диод D_2 , $U_C = -e_2$.

Если считать, что напряжения $U_{1...4}$ эквивалентны линейным перемещениям концов стержня, то из сравнения выражений (1) и (5) видно, что они аналогичны.

Уравнения электрического тока для рассматриваемой схемы, записанные для узлов 1...4 по методу узловых потенциалов, при малых значениях U_C имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4gU_1 - 2g2U_1 + g2U_C - gU_C = gU_C; \\ I_2 &= 2gU_2 - g2U_2 - gU_C = -gU_C; \\ I_3 &= 4g_o U_3 - 2g_o 2U_3 + g_o 2U_C - g_o U_C = g_o U_C; \\ I_4 &= 2g_o U_4 - g_o 2U_4 - g_o U_C = -g_o U_C. \end{aligned} \quad (6)$$

Если потенциал узла С станет равным e_1 , то

$$I_1 = ge_1; \quad I_2 = -ge_1; \quad I_3 = g_o e_1; \quad I_4 = -g_o e_1. \quad (7)$$

Если $U_C = -e_2$, то

$$I_1 = -ge_2; \quad I_2 = ge_2; \quad I_3 = -g_o e_2; \quad I_4 = g_o e_2. \quad (8)$$

После подстановки в уравнения (6) значения U_C из уравнения (5) и сравнения полученных выражений с уравнениями (2) видим, что они аналогичны. Аналогичны также уравнения (7), (8) и (4). Условия эквивалентности следующие:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \gamma_i N_n \cos \alpha; \quad n=1, 2\tau, *; \\
 I_2 &= -\gamma_i N_n \cos \alpha; \\
 I_3 &= \gamma_i N_n \sin \alpha; \quad I_4 = -\gamma_i N_n \sin \alpha; \\
 U_1 &= \gamma_u x_i; \quad U_2 = \gamma_u x_k; \\
 U_3 &= \gamma_u y_i; \quad U_4 = \gamma_u y_k; \\
 g &= \gamma_g 3(\cos^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \frac{EF}{l}; \\
 g_o &= \gamma_g 3(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \frac{EF}{l}; \\
 e_{1\tau} &= \gamma_u \frac{\epsilon_{1\tau}}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)}; \quad e_{2\tau} = \gamma_u \frac{\epsilon_{2\tau}}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где γ_i , γ_u , γ_g - масштабные коэффициенты токов, напряжений и проводимостей.

Следует отметить, что схема на рис. 1,б может быть использована для стержня, выполненного из линейного материала. Тогда в схеме устраняются диоды и источники опорного напряжения.

Рассмотрим случай, когда нелинейная зависимость между ϵ и σ аппроксимирована ломаной линией 3, которая, как это видно из рис. 2,а, получена в результате суммирования графиков 1 и 2. Напряжения в стержне и усилия в нем в зависимости от того, на каком участке диаграммы работает материал, соответственно равны:

$$\begin{aligned}
 \sigma_I &= \operatorname{tg} \psi \epsilon + \operatorname{tg} \theta \epsilon; \quad N_I = F \sigma_I; \\
 \sigma_{II} &= \operatorname{tg} \psi \epsilon + \operatorname{tg} \theta \epsilon_1; \quad N_{II} = F \sigma_{II}; \\
 \sigma_{III} &= -(\operatorname{tg} \psi \epsilon + \operatorname{tg} \theta \epsilon_2); \quad N_{III} = F \sigma_{III},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где F - площадь сечения стержня, $\operatorname{tg} \psi$ и $\operatorname{tg} \theta$ имеют смысл модулей упругости материала, а относительное укорочение ϵ стержня определяется по формуле (1).

Подставив значения ϵ из формулы (1) в выражения (10), получим три варианта усилия в стержне. Проекция этого усилия

на оси x и y определяются так: если стержень работает на участке I диаграммы, то

$$\begin{aligned} N_I \cos \alpha &= \operatorname{tg} \psi F \epsilon \cos \alpha + \operatorname{tg} \theta F \epsilon \cos \alpha; \\ -N_I \cos \alpha &= -\operatorname{tg} \psi F \epsilon \cos \alpha - \operatorname{tg} \theta F \epsilon \cos \alpha; \\ N_I \sin \alpha &= \operatorname{tg} \psi F \epsilon \sin \alpha + \operatorname{tg} \theta F \epsilon \sin \alpha; \\ -N_I \sin \alpha &= -\operatorname{tg} \psi F \epsilon \sin \alpha - \operatorname{tg} \theta F \epsilon \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Если стержень работает на участке II, то

$$\begin{aligned} N_{II} \cos \alpha &= \operatorname{tg} \psi F \epsilon \cos \alpha + \operatorname{tg} \theta F \epsilon_1 \cos \alpha; \\ -N_{II} \cos \alpha &= -\operatorname{tg} \psi F \epsilon \cos \alpha - \operatorname{tg} \theta F \epsilon_1 \cos \alpha; \\ N_{II} \sin \alpha &= \operatorname{tg} \psi F \epsilon \sin \alpha + \operatorname{tg} \theta F \epsilon_1 \sin \alpha; \\ -N_{II} \sin \alpha &= -\operatorname{tg} \psi F \epsilon \sin \alpha - \operatorname{tg} \theta F \epsilon_1 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

Если стержень работает на участке III, то уравнения проекций усилий на горизонтальную и вертикальную оси будут аналогичны выражениям (12); в формулах вместо ϵ_1 будет ϵ_2 и знаки всех слагаемых будут изменены на противоположные.

В работе [3] описано электронное устройство, предназначенное для моделирования стержня из билинейного материала с диаграммой на рис. 2,а. Это устройство содержит компараторы напряжения, предназначенные для электромеханического переключения параметров схемы-аналога с помощью реле, включенных на выходах компараторов. Основной недостаток устройства [3] - наличие переключаемых при помощи контактов реле цепей. Устройство на рис. 2,б не содержит переключаемых с помощью реле элементов, что выгодно отличает его от схемы-аналога [3]. Устройство на рис. 2,б, предназначенное для моделирования нелинейной зависимости 3 (рис. 2,а), синтезировано путем параллельного суммирования двух схем-аналогов: первая из них предназначена для моделирования линейной зависимости 1 (она приведена в работе [4]), вторая - для моделирования нелинейной зависимости 2 (она также показана на рис 1,а). Переключение с одного участка работы материала на другой в электронной модели на рис. 2,б происходит бесконтактным способом.

Исходя из условия, что сумма токов в узле С равна нулю, а также учитывая, что для инверторов напряжения, выполненных на операционных усилителях, $\frac{R_0}{R} = 1$, $\frac{R_0}{R_1} = 2$, определим потенциал узла С. Он выразится формулой (5), полученной для устройства на рис. 1, б. Если открывается диод

1), то потенциал узла равен e_1 , если D_2 - то e_2 . Проводимости g_3, g_4, g_5, g_6 , определяются из условия, чтобы суммарные проводимости узлов 1...4 были эквивалентны соответствующим коэффициентам уравнений типа (2) при неизвестных, моделируемых узловыми напряжениями $U_{1...4}$. В случае, когда реализуется линейная зависимость (рис. 2, а). Так, например, для узлов 1 и 2 суммарная проводимость каждого узла должна быть равна по величине проводимости g_1 , которая эквивалентна коэффициенту при x_1 и x_k в первом и втором уравнениях системы (2). Таким образом, для этих узлов имеем (определим соответствующие части сумм токов в узлах)

$$\begin{aligned} \Sigma I(1) &= (g_1 + G + \frac{G}{2} + g_3 + g + g) U_1 - g_3 2U_1 = \\ &= g_1 U_1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Sigma I(2) = (g_1 + G + \frac{G}{2} + g_4 + g) U_2 - g_4 2U_2 = g_1 U_2,$$

Из этих равенств находим

$$g_3 = 2g + 1,5G, \quad g_4 = g + 1,5G. \quad (14)$$

Аналогично для узлов 3 и 4

$$g_5 = 2g_0 + 1,5G; \quad g_6 = g_0 + 1,5G \quad (15)$$

Уравнения электрического тока для схемы на рис. 2, б в случае, если потенциал узла С не достиг величины e_1 или e_2 , имеют следующий вид (с учетом формул (14) и (15)):

$$\begin{aligned} I_{11} &= (g_1 + G + \frac{G}{2} + g_3 + g + g) U_1 - g_3 2U_1 - g_1 U_2 + \\ &+ \frac{G}{2} 2U_3 - GU_4 - gU_c + 2U_c = g_1 (U_1 - U_2) + \\ &+ G(U_3 - U_4) + gU_c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{21} &= -g_1 U_1 + (g_1 + G + \frac{G}{2} + g_4 + g) U_2 - g_4 2U_2 - \\ &- GU_3 + \frac{G}{2} 2U_4 - gU_c = -g_1 (U_1 - U_2) - \\ &- G(U_3 - U_4) - gU_c; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 I_{3I} &= \frac{G}{2} 2U_1 - GU_2 + (\mathfrak{g}_2 + G + \frac{G}{2} + \mathfrak{g}_5 + \mathfrak{g}_o + \mathfrak{g}_o) U_3 - \\
 &\quad - \mathfrak{g}_5 2U_3 - \mathfrak{g}_2 U_4 - \mathfrak{g}_o U_c + \mathfrak{g}_o 2U_c = \\
 &= G(U_1 - U_2) + \mathfrak{g}_2(U_3 - U_4) + \mathfrak{g}_o U_c; \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{4I} &= -GU_1 + \frac{G}{2} 2U_2 - \mathfrak{g}_2 U_3 + (\mathfrak{g}_2 + G + \frac{G}{2} + \mathfrak{g}_6 + \\
 &\quad + \mathfrak{g}_o) U_4 - \mathfrak{g}_6 2U_4 - \mathfrak{g}_o U_c = -G(U_1 - \\
 &\quad - U_2) - \mathfrak{g}_2(U_3 - U_4) - \mathfrak{g}_o U_c,
 \end{aligned}$$

где U_c определяется выражением (5).

Если потенциал узла С станет равным e_1 , то

$$\begin{aligned}
 I_{1II} &= \mathfrak{g}_1(U_1 - U_2) + G(U_3 - U_4) + e_1 \mathfrak{g}; \\
 I_{2II} &= -\mathfrak{g}_1(U_1 - U_2) - G(U_3 - U_4) - e_1 \mathfrak{g}; \\
 I_{3II} &= G(U_1 - U_2) + \mathfrak{g}_2(U_3 - U_4) + e_1 \mathfrak{g}_o; \\
 I_{4II} &= -G(U_1 - U_2) - \mathfrak{g}_2(U_3 - U_4) - e_1 \mathfrak{g}_o.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Если потенциал узла С станет равным e_2 , то схема будет определяться уравнениями, аналогичными уравнениям (17), но с противоположными знаками и с заменой e_1 на e_2 . Для получения условий эквивалентности механические уравнения типа (11) и (12) и электрические уравнения типа (16) и (17) необходимо записать в развернутой форме. Проведем эту операцию для первых уравнений систем (11) и (16):

$$\begin{aligned}
 N_I \cos \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \psi F}{1} \cos^2 \alpha (x_i - x_k) + \frac{\operatorname{tg} \psi F}{1} \cos \alpha \sin \alpha \times \\
 &\quad \times (y_i - y_k) + \frac{\operatorname{tg} \theta F}{1} \cos^2 \alpha (x_i - x_k) + \\
 &\quad + \frac{\operatorname{tg} \theta F}{1} \cos \alpha \sin \alpha (y_i - y_k), \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$I_{11} = g_1(U_1 - U_2) + G(U_3 - U_4) + \\ + \frac{g^2}{3(g+g_0)}(U_1 - U_2) + \frac{gg_0}{3(g+g_0)}(U_3 - U_4).$$

Аналогично записываются остальные уравнения в системах (11), (12) и (16), (17). Из сравнения уравнений (18) и других аналогичных уравнений легко находятся условия эквивалентности, в том числе и величины проводимостей:

$$I_{1j} = \gamma_i N_j \cos \alpha ; \quad I_{2j} = -\gamma_i N_j \cos \alpha ; \\ j = I, II, III, \\ I_{3j} = \gamma_i N_j \sin \alpha ; \quad I_{4j} = -\gamma_i N_j \sin \alpha ; \\ U_1 = \gamma_u x_i ; \quad U_2 = \gamma_u x_k ; \quad (19) \\ U_3 = \gamma_u y_i ; \quad U_4 = \gamma_u y_k ;$$

$$g_1 = \gamma_g \frac{\operatorname{tg} \psi F}{1} \cos^2 \alpha ; \quad g_2 = \gamma_g \frac{\operatorname{tg} \psi F}{1} \sin^2 \alpha ;$$

$$G = \gamma_g \frac{\operatorname{tg} \psi F}{1} \cos \alpha \sin \alpha ;$$

$$g = \gamma_g 3(\cos^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha) \frac{\operatorname{tg} \theta F}{1} ;$$

$$g_0 = \gamma_g 3(\sin^2 \alpha + \cos \alpha \sin \alpha) \frac{\operatorname{tg} \theta F}{1} ;$$

$$e_1 = \gamma_u \frac{\epsilon_1 l}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)} ; \quad e_2 = \gamma_u \frac{\epsilon_2 l}{3(\cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

Проводимости g_3, g_4, g_5, g_6 подсчитываются по формулам (14), (15).

Таким образом, на четырех полюсах (1...4) синтезированных на рис. 1, б и 2, б устройств обрабатываются напряжения, эквивалентные горизонтальным и вертикальным перемещениям концов стержня, воспринимающего продольное усилие, и токи, аналогичные горизонтальным и вертикальным проек-

циям усилия в стержне с учетом работы материала на трех участках нелинейной диаграммы (либо на рис. 1, а, либо на рис. 2, а). Переход с одного участка на другой в электронных моделях происходит плавно.

При электромоделировании систем, содержащих рассмотренные стержни, их схемы-аналоги соединяются между собой в соответствии с геометрической схемой конструкции с целью реализации уравнений равновесия в узлах. Для ферм такими уравнениями являются суммы проекций всех усилий в каждом узле на оси x и y . Узловая нагрузка при моделировании ферм вводится в виде узловых источников тока. После набора задачи на машине и ввода источников тока решение получается практически мгновенно. В качестве моделирующих установок могут быть использованы существующие машины ЭМСС-7М и ЭМСС-8 ("Альфа"), модернизированные соответствующим образом.

Л и т е р а т у р а

1. Овсянко В.М. Выбор рабочей расчетной схемы на АВМ как основной этап расчета конструктивно нелинейной стержневой системы на ЭЦВМ. - Весті АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. Минск, 1976, №3.
2. Овсянко В.М. Функциональный преобразователь двух переменных. А.с. 680000. (СССР) - Бюл. изобрет., 1979, №30.
3. Овсянко В.М. Учет физической нелинейности материала при электромоделировании ферм. Изв. вузов. Строительство и архитектура. Новосибирск, 1976, №5.
4. Овсянко В.М. Электронные модели стержней, работающих на продольные усилия. - Изв. вузов. Приборостроение. Л., 1976, т. XIX, №5.
5. O v s y a n k o V. M. The Theory of Synthesis of Electronic Circuits of Linear and Nonlinear Objects of Structural Mechanics and Applied Elasticity Theory. - Analogová a hybridne výpočetní technika (14 Seminár MEDA), 2 dil.- Praha, 1977.