УДК 624.072

С.И.Мошинский

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Силовое состояние статически неопределимой системы целиком определяется вектором $\vec{X}$ лишних неизвестных. Поэтому при оптимизации одной из главных задач должно быть определение при заданных геометрической схеме и нагрузке усилий в лишних связях статически неопределимой системы, обеспечивающих минимальное значение целевой функции (веса, стоимости), после чего определяются соответствующие усилия для всех элементов системы.

В [1] на основе метода наименьших квадратов было показано, что $\vec{X}^{(0)}$ для системы постоянной жесткости элементов близко к $\vec{X}^*$ для оптимальной системы но норме

$$\sum_{i=1}^{m} |N_i^{(0)}|\, l_i \simeq \sum_{i=1}^{m} |N_i^*|\, l_i \;, \tag{1}$$

где m – число элементов статически неопределимой стержневой системы; N– расчетное усилие в элементе; l – длина элемента; $\sum_{i=1}^{m} |N_i|\, l_i$ – "силовой вес" [3].

Здесь исследуем вопрос о максимальной величине отношения

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} |N_i^{(0)}|\, l_i \Big(\sum_{i=1}^{m} |N_i^*|\, l_i \Big)^{-1} \;, \tag{2}$$

т.е. вопрос о целесообразности выбора в итеративных процедурах оптимизации начального приближения на основании метода наименьших квадратов.

Рассмотрим модель статически неопределимой однородной стержневой системы с группой сжатых и группой растянутых стержней (рис. 1,а). Отметим, что варьируемый параметр y, учитывающий условия нагружения, заключен в открытом интервале (0; 1), так как можно принять $l = 1$, а значения параметра $y = 0$ и $y = 1$ лишены физического смысла.

Тогда: а) при выборе параметра y из интервалов (0;0,5) и (0,5; 1), согласно теореме Максвелла [3], оптимальными являются статически определимые системы (рис. 1, б, в); б) при $y = 0,5$ оптимальной является и исходная статически неопределимая система постоянного сечения (рис. 1, г).

Выразим через постоянное внешнее нагружение P и параметр y (из условий равновесия и совместности деформаций) усилия в стержнях обеих групп для множества систем постоянной жесткости элементов ($EF = 1$):

$$N_1^{(0)} = P(1-y); \quad N_2^{(0)} = -Py. \qquad (3)$$

Тогда для всех систем этого множества

$$\varepsilon = 2y(1-y)(l^*)^{-1}, \qquad (4)$$

где $l^* = y$ при $0 < y < 0{,}5$ и $l^* = 1-y$ при $0{,}5 < y < 1$.

Таким образом, $\varepsilon = 1$ при $y = 0{,}5$, т.е. в этом случае решение, найденное методом наименьших квадратов, является оптимальным. Если $y \to 0$ или $y \to 1$, то $\varepsilon \to 2$, но это означает, что оптимальной является "вырожденная" система, в которой сохранилось только около половины стержней.

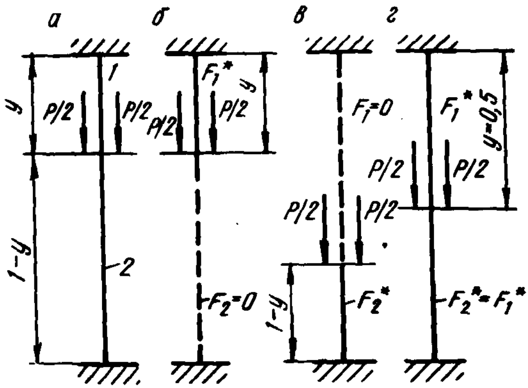

Рис. 1. Модели однородных стержневых систем.

Рассмотрим случай, когда по конструктивным соображениям исключать стержни нельзя. Тогда в зависимости от y оптимальными будут статически неопределимые системы с группами конструктивных стержней (рис. 2, а, б). Величина усилия в конструктивном стержне при одинаковом допускаемом напряжении на растяжение и сжатие σ ограничена значением

$$[N] = F_0 \sigma, \qquad (5)$$

где F_0 – минимально допустимое значение площади сечения элемента. Считая, что напряжения в основных стержнях равны допускаемым, выразим из уравнений равновесия и совместности деформаций усилия в оптимальных системах с конструктивными стержнями через ограничитель усилия $[N]$ и параметр y:

$$N_1^* = P - y(1-y)^{-1}[N], \quad N_2^* = y(1-y)^{-1}[N], \; 0<y<0{,}5; \qquad (6)$$

$$N_1^* = (1-y)y^{-1}[N], \quad N_2^* = P - (1-y)y^{-1}, \quad 0{,}5 < y < 1 . \tag{7}$$

Сравним "силовой вес" оптимальных "вырожденных" систем и систем с конструктивными связями.

1. При $0 < y < 0{,}5$ имеем:

а) для оптимальной статически определимой системы

$$\sum_{i=1}^{m} N_i^* \mid l_i = Py \; ; \tag{8}$$

б) для оптимальной системы с конструктивными стержнями

$$\sum_{i=1}^{m} \mid N_i^* \mid l_i = Py + [N]\,y - [N]\frac{y^2}{1-y} \, . \tag{9}$$

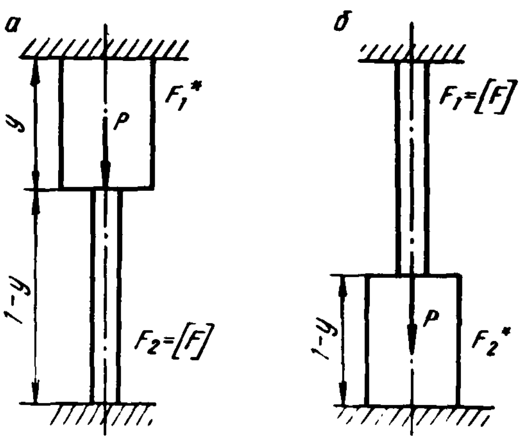

Рис. 2. Модели оптимальных статически неопределимых систем с группами конструктивных стержней.

2. При $0{,}5 < y < 1$:

а) для статически определимой оптимальной системы

$$\sum_{i=1}^{m} \mid N_i^* \mid l_i = P(1-y) \; ; \tag{10}$$

б) для оптимальной системы с конструктивными стержнями

$$\sum_{i=1}^{m} \mid N_i^* \mid l_i = P(1-y) + [N](1-y) - [N](1-y)^2 y^{-1} . \tag{11}$$

Так как $y > y^2(1-y)^{-1}$ при $0 < y < 0{,}5$ и $1-y > (1-y)^2 y^{-1}$ при $0{,}5 < y < 1$, то сумма (9) всегда больше суммы (8), а сумма (11) больше суммы (12).

Если же $y = 0{,}5$, то $\sum_{i=1}^{m} / N_i^* / \, l_i$ для "вырожденного" оптимального решения и для оптимальной системы с конструктивными связями имеет одинаковое значение.

Из вышеизложенного вытекает следующее свойство оптимальных ферм: при заданном постоянном внешнем нагружении всегда

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 , \qquad (12)$$

где ε_2 – отношение (2) для оптимальной статически неопределимой системы с конструктивными стержнями; ε_1 – отношение (2) для оптимальной системы с меньшим числом связей ("вырожденное" решение).

Исследуем изменение ε в случае учета условий унификации сечений. С этой целью к параметру y введем некоторый коэффициент k, стремящийся перевести оптимизируемую однородную стержневую систему в систему постоянного сечения (т.е. такой k, при котором $0 < ky < 1$ и $ky \to 0,5$). Тогда, заменив в правых частях равенств (8), (9), (10) и (11) параметр y на произведение ky так, что $ky \to 0,5$, получим:

а) при $0 < ky < 0,5$ суммы (8) и (9) возрастают (при этом значение суммы (9) остается бо́льшим значения суммы (8));

б) при $0,5 < ky < 1$ суммы (10) и (11) возрастают (значение суммы (11) остается бо́льшим значения суммы (10));

в) при $y = 0,5$ суммы (8), (9), (10) и (11) имеют одинаковые значения.

Проведенный анализ показывает, что при учете условий унификации сечений значение "силового веса" систем возрастает, а значение ε уменьшается. Следовательно,

$$\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 , \qquad (13)$$

где ε_3 – отношение (2) для оптимальной системы при учете условий унификации сечений.

Таким образом, наличие конструктивных связей и учет унификации сечений сближают решение, полученное методом наименьших квадратов, с глобально оптимальным решением.

Литература

1. Михайлищев В.Я., Мошинский С.И. Практический синтез оптимальных металлических ферм. – Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1974, № 10. 2. Комаров А.А. Основы проектирования силовых конструкций. – Куйбышев, 1965. 3. Сергеев Н.Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций– Л., 1971.