

тыги расчета и их сравнение с результатами работ [ 2, 4 ] приведены в табл. 1. Наши результаты оказались несколько лучше, чем в работе [ 2 ], по расходу материала, но при большем количестве итераций. Это объясняется назначением нами слишком строгого критерия сходимости итерационного процесса по объему (0,5 %). Наши результаты также несколько лучше, чем в работе [ 4 ], где задача решалась методами математического программирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О л ь к о в Я.И., А н т и п и н А.А. Алгоритм оптимального распределения материала в статически неопределимых системах с учетом дискретности сортамента. — Изв. вузов: Стр-во и архитектура, 1979, № 12, с. 9—13.
2. Х а н М.Р., У и л м е р т К.Д., Т о р н т о н В.А. Метод критериев оптимальности для крупных конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 7, с. 102—112.
3. Б ы к о в с к и й С.Г. Способ оптимальной корректировки сечений элементов шарнирно-стержневых систем по условиям допустимой жесткости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш.шк., 1983, вып. 10, с. 69—74.
4. Ш м и т м л., Ф а р ш и . Некоторые концепции аппроксимации для синтеза конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 5, с. 145—155.

УДК 531

Г.А.ГЕРАЩЕНКО, канд. техн. наук (БПИ)

### ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Равновесие сплошной среды при отсутствии массовых сил описывается системой однородных уравнений. В классической (линейной) теории они имеют вид

$$\nabla_i \sigma^{ik} = 0. \quad (1)$$

Здесь и компоненты тензора напряжений  $\sigma^{ik}$ , и ковариантная производная  $\nabla_i$  отнесены к начальным векторным базисам — основному  $\bar{r}_i$  и взаимному  $\bar{r}^i$  произвольной криволинейной системы координат.

Общее инвариантное решение системы (1) в компонентах тензора функций напряжений было дано Б.Финци (1934), А.Ю.Крутковым (1949), В.И.Блохом (1950) [ 1 ] :

$$\sigma^{ik} = \lambda^{mti} \lambda^{nsk} \nabla_{mn} \chi_{st}, \quad (2)$$

где  $\lambda^{mti} = \bar{r}^m (\bar{r}^t \times \bar{r}^i)$  — компоненты дискриминантного тензора;  $\nabla_{mn}$  — вторая ковариантная производная;  $\chi_{st}$  — компоненты тензора функций напряжений. В качестве последнего может быть взят любой симметричный тензор, компоненты которого и их производные требуемого порядка — непрерывные функции.

При переходе к общей (нелинейной) теории различают начальные векторные базисы  $\bar{r}_i, \bar{r}_i^1$  и базисы в деформированном состоянии  $\bar{r}_i^*, \bar{r}_i^{1*}$ . Они связаны между собой прямым и обратным преобразованиями:

$$\bar{r}_i^* = \alpha_i^m \bar{r}_m; \bar{r}_i^1 = \beta_m^i \bar{r}_m^1. \quad (3)$$

Коэффициенты прямого преобразования находятся через компоненты метрического тензора и тензора дисторсии:

$$\alpha_i^m = g_i^m + \nabla_i u^m$$

( $u^i$  — компоненты вектора перемещения). Якобиан прямого преобразования  $D = |\alpha_m^i|$  полагается отличным от нуля, что позволяет определить коэффициенты обратного преобразования как

$$\beta_m^i = (1/D) \partial D / \partial \alpha_i^m.$$

Тензор напряжений нелинейной механики определяется в базисе  $\bar{r}_i^*$ . Если еще и ковариантные производные вычисляются в метрике деформированного состояния (мы будем помечать их звездочкой), то уравнения равновесия [2] по внешнему виду совпадают с (1):

$$\nabla_i^* \sigma^{ik} = 0. \quad (4)$$

Естественно, что и решение Финци—Круткова—Блоха остается справедливым:

$$\sigma^{ik} = \lambda_*^{m ti} \lambda_*^{nsk} \nabla_{mn}^* \chi_{st} \quad (5)$$

(компоненты дискриминантного тензора  $\lambda_*^{m ti}$  также определены в базисе  $\bar{r}_i^*$ ).

Структура уравнений (4) и их решения (5) достаточно проста, однако их использование в приложениях к частным задачам о равновесии твердых деформируемых тел неудобно по разным причинам. Например, в решаемых задачах, как правило, известны первоначальные положения точек тела и ограничивающих его поверхностей. Поэтому граничные условия (статические, кинематические и др.) проще всего задаются в начальной векторном базисе.

Что касается уравнений равновесия, то их вид в начальной метрике известен [3]:

$$\nabla_i (\alpha_k^j D \sigma^{ik}) = 0. \quad (6)$$

(напряжения  $\sigma^{ik}$  относятся по-прежнему к базису  $\bar{r}_i^*$ ).

Представляет определенный интерес и решение (5), преобразованное к начальной метрике.

Развернутые выражения ковариантных производных второго порядка громоздки, в литературе их приводят исключительно для векторов.

Применив аналогичную методику к тензорам второго ранга, получим

$$\begin{aligned}
\nabla_{mn}^* \chi_{st} = & \frac{\partial^2 \chi_{st}}{\partial x^m \partial x^n} - \Gamma_{ns}^{*p} \nabla_m^* \chi_{pt} - \Gamma_{nt}^{*p} \nabla_m^* \chi_{ps} - \Gamma_{mn}^{*p} \nabla_p^* \chi_{st} - \\
& - \Gamma_{ms}^{*p} \nabla_n^* \chi_{pt} - \Gamma_{mt}^{*p} \nabla_n^* \chi_{ps} - \left( \frac{\partial \Gamma_{ns}^{*p}}{\partial x^m} + \Gamma_{ns}^{*q} \Gamma_{mq}^{*p} \right) \chi_{pt} - \\
& - \left( \frac{\partial \Gamma_{nt}^{*p}}{\partial x^m} + \Gamma_{nt}^{*q} \Gamma_{mq}^{*p} \right) \chi_{ps} - \left( \Gamma_{ns}^{*p} \Gamma_{mt}^{*q} + \Gamma_{nt}^{*p} \Gamma_{ms}^{*q} \right) \chi_{pq}. \quad (7)
\end{aligned}$$

По определению символ Кристоффеля второго рода

$$\Gamma_{ns}^p = \frac{\partial \bar{\Gamma}_n^*}{\partial x^s} \cdot \bar{\Gamma}_s^{*p}. \quad (8)$$

Используя преобразования (3) и определение (8) в начальной метрике, будем иметь

$$\Gamma_{ns}^{*p} = \frac{\partial}{\partial x^s} (\alpha_n^1 \bar{\Gamma}_1) \cdot \beta_\nu^p \bar{\Gamma}^\nu = \left( \frac{\partial \alpha_n^1}{\partial x^s} + \alpha_n^1 \Gamma_{1s}^\nu \right) \beta_\nu^p.$$

Переходя затем от обычной производной к ковариантной и вводя обозначение

$$\gamma_{ns}^p = \beta_1^p \nabla_n \alpha_s^1,$$

окончательно получим

$$\check{\Gamma}_{ns}^{*p} = \Gamma_{ns}^{*p} + \gamma_{ns}^p.$$

С использованием этого выражения удается легко преобразовать и ковариантные производные первого порядка:

$$\nabla_m^* \chi_{pt} = \check{\nabla}_m \chi_{pt} - \gamma_{mp}^q \chi_{qt} - \gamma_{mt}^q \chi_{pq}.$$

Теперь все величины, входящие в (7), в принципе определены. Несложные, но довольно громоздкие выкладки дают окончательное решение уравнений (6) в виде

$$\begin{aligned}
\sigma^{ik} = & \lambda^{mti} \lambda^{nsk} \frac{1}{D^2} (\nabla_{mn} \chi_{st} - \gamma_{ms}^p \nabla_n \chi_{pt} - \gamma_{mn}^p \nabla_p \chi_{st} - \\
& - \gamma_{nt}^p \nabla_m \chi_{ps} - \gamma_{ms}^p \gamma_{nt}^q \chi_{pq}). \quad (9)
\end{aligned}$$

Отсюда могут быть получены решения для частных вариантов теории. Например, полагая  $D = 1$  и  $\gamma_{ms}^p = 0$ , приходим к решению (2) линейной теории. Далее по сложности идет квадратичная теория. В ней коэффициенты решения (9) надо определить с точностью до первой степени перемещений и их производных. С этой точностью, в частности, получаем

$$D = 1 + \nabla_p u^p; \quad \gamma_{ms}^p = \nabla_{ms} u^p.$$

Тогда для квадратичной теории

$$\sigma^{ik} = \lambda^{mti} \lambda^{nsk} [(1 - 2\nabla_p u^p) \nabla_{mn} \chi_{st} - \nabla_{ms} u^p \nabla_n \chi_{pt} - \\ - \nabla_{mn} u^p \nabla_p \chi_{st} - \nabla_{nt} u^p \nabla_m \chi_{st}].$$

Тензор функций напряжений используется в решении трехмерных задач и является обобщением функции Эри в плоской задаче и функции Прандтля в задачах на кручение стержней.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А.И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 939 с. 2. Л у р ь е А.И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с. 3. Г р и н А., А д к и н с Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. — 455 с.

УДК 622.692.23.004.001.24:519.85

Л.А.ГУРЬЕВА, канд.техн.наук,  
О.К.ВИРБОЛ (Новополоцк.политехн.ин-т)

### ОПТИМИЗАЦИЯ СТАЛЬНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ ПО ВЕСУ

В последние годы в связи с увеличением пропускной способности магистральных нефте- и нефтепродуктопроводов наметилась тенденция к увеличению вместимости резервуаров.

В ЦНИИпроектстальконструкции разработаны проекты резервуаров с оптимальными габаритами (высотой, диаметром и полезным объемом). При этом в резервуарах объемом 10—100 тыс.м<sup>3</sup> за оптимальную принята высота 18 м [ 1 ]. Резервуары относятся к инженерным сооружениям, работающим в сложном напряженно-деформированном состоянии [ 2 ].

Цель настоящей статьи — разработка и реализация методики определения оптимальных значений геометрических параметров, обеспечивающих минимум показателя веса при выполнении условий прочности и устойчивости резервуаров большой вместимости со стационарным сферическим покрытием. При этом габаритные размеры считаются заданными. Для решения поставленной задачи была построена оптимизационная модель выбора наилучших значений параметров резервуара, для которой целевая функция — показатель расхода материала на конструкцию (рис. 1) — имеет вид

$$V = 2\pi(R_{ц} h_{ст} \sum_{i=1}^{H/h_{ст}} \delta_i + R_{ц} F_{шп} + R_{сф} h_{сф} \delta_{сф}), \quad (1)$$