

где \bar{U}^T, \bar{U}^M — горизонтальное перемещение верха опоры со свободной вершиной от единичных силы (\bar{T}) и момента M ; $\bar{\varphi}^T, \bar{\varphi}^M$ — угол поворота опорного сечения верха опоры со свободной вершиной от единичных силы и момента; U^T, U^M — горизонтальные перемещения верха опоры от расчетных значений горизонтальной силы и момента с учетом упругого защемления; φ^T, φ^M — угол поворота опорного сечения верха опоры от расчетных значений горизонтальной силы и момента с учетом упругого защемления; r_1, r_2 — соответственно горизонтальная и вертикальная реакции в опорных частях от единичных деформаций, зависящие от материала и их исполнения.

Полученные результаты могут найти применение при расчете безростверковых опор транспортных сооружений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкляр В.Х., Федоров А.Г. Опоры мостов с бесплитными фундаментами. — В кн.: Ускорение научно-технического прогресса, повышение производительности труда и качества дорожных работ: Тездокл. и сообщений на VII Всесоюз. совещ. дорожников. М.: СоюздорНИИ, 1981, с. 48—50.
2. Жемочкин Б.Н. Расчет упругой заделки стержня. — М.: Стройиздат, 1948. — 67 с.
3. Босаков С.В. Расчет вертикальных конструкций, находящихся в упругом полупространстве. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — Минск: Бел. политехн. ин-т, 1976. — 20 с.
4. СНиП II-17-77. Свайные фундаменты: Нормы проектирования. — М.: Стройиздат, 1978. — 46 с.
5. Завриев К.С., Шпирю Г.С. Расчеты фундаментов мостовых опор глубокого заложения. — М.: Транспорт, 1970. — 214 с.

УДК 624.072.2

С.Г. БЫКОВСКИЙ, канд. техн. наук
(БПИ)

ОПТИМИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

При решении задач оптимизации конструкций методами математического программирования приходится многократно выполнить анализ их напряженно-деформированного состояния. Кроме того, алгоритмы, реализующие методы математического программирования, сложны и существенно замедляют сходимость в окрестности искомого экстремума. Все это требует значительных затрат времени ЭВМ при оптимизации сложных многоэлементных стержневых систем.

Наоборот, решение задач оптимизации конструкций как обратных задач строительной механики приводит к простым быстроходящимся алгоритмам. Оптимальность решения при этом связывается не с удовлетворением наилучшим образом критерия

оптимальности, а с удовлетворением выдвинутых требований к напряженно-деформированному состоянию оптимизируемой системы. Выдвигаемые требования могут иметь ясный физический смысл (равнонапряженность или полнонапряженность элементов) или быть формализованы (необходимые условия оптимальности — условия Куна—Таккера). Однако строго обосновать такой подход не удастся, хотя оптимальное решение, как показывают численные исследования, в большинстве случаев достигается.

В работах [1,2] так же, как и в данной, задачи объемной оптимизации сложных стержневых систем решаются как обратные задачи строительной механики. В качестве дополнительных условий оптимальности используются квазиравнонапряженность [1] и условия Куна—Таккера [2]. Каждое из нарушенных ограничений на перемещения, начиная с наиболее активных, удовлетворяется отдельно. В предлагаемом ниже решении, как и в [2], в качестве условий оптимальности приняты условия Куна—Таккера, но в отличие от [2] решение получено в усилиях, а не в перемещениях. Кроме того, все нарушенные ограничения на перемещения удовлетворяются одновременно, что в общем случае сокращает объем необходимых вычислений по сравнению с [1,2].

Таким образом, в настоящей работе, используя необходимые условия оптимальности — условия Куна—Таккера — решается задача минимизации объема линейно-упругодеформируемых шарнирно-стержневых систем. Учитываются условия прочности и устойчивости элементов, а также равновесия и совместности деформаций системы и ее допустимой жесткости. Показана возможность учета условий дискретности и унификации элементов.

Применительно к нормам проектирования металлических конструкций математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$\min_V V = \sum_{i=1}^I F_i L_i ; \quad (1)$$

$$\max_{q=1, \dots, Q} \sum_{i=1}^I \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}}{E_i F_i} L_i - [Y_j] \leq 0, \quad j = 1, \dots, J ; \quad (2)$$

$$F_i \geq \max \left(\frac{N_i^+}{\alpha_i R_i}, \frac{-N_i^-}{\varphi_i m_i R_i}, F_{\min_i} \right), \quad i = 1, \dots, I, \quad (3)$$

где V — теоретический объем элементов системы; L_i, F_i, F_{\min_i} — соответственно длина, площадь поперечного сечения и ее минимально допустимое значение для i -го элемента; \bar{N}_{ij}, N_{iq} — усилие в i -м стержне, вызванное соответственно единичной силой, приложенной по j -му направлению и q -м сочетанием нормативных значений нагрузок; E_i, R_i — модуль упругости и расчетное сопротивление материала i -го стержня; $[Y_j]$ — предельное значение перемещений по j -му направлению; N_i^+, N_i^- — соответственно максимально и

минимально возможные усилия в i -м элементе, вызываемые расчетными сочетаниями нагрузок; a_i , φ_i , m_i — коэффициенты соответственно ослабления сечения, продольного изгиба и условий работы i -го элемента; I, J, Q — количество соответственно элементов в системе, направлений, перемещения по которым ограничены, и сочетаний нормативных значений нагрузок.

К математической модели (1) — (3) следует добавить в формализованном виде условия статической и кинематической совместности системы. Но они не представлены здесь, так как не фигурируют ни в ниже полученном решении задачи, ни в промежуточных выкладках, однако подразумевается их обязательный учет.

Сначала решим задачу минимизации целевой функции (1) при учете только ограничений на перемещения (2). Функция Лагранжа для них имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=1}^I F_i L_i + \sum_{j=1}^J \tau_j \left(\max_{q=1, \dots, Q} \sum_{i=1}^I \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}}{E_i F_i} L_i - [Y_j] \right), \quad (4)$$

где Λ , τ_j — функция Лагранжа и множитель Лагранжа, связанный с j -м ограничением на перемещение.

Запишем условия Куна—Таккера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \tau_j} &= \max_{q=1, \dots, Q} \sum_{i=1}^I \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}}{E_i F_i} L_i - [Y_j] = \sum_{i=1}^I \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}^j}{E_i F_i} L_i - [Y_j] = \\ &= 0, \quad j = 1, \dots, J; \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial F_i} &= L_i - \sum_{j=1}^J \tau_j \frac{\bar{N}_{ij} N_{iq}^j}{E_i F_i^2} L_i = 0, \quad i = 1, \dots, I, \end{aligned}$$

где q^j — номер сочетания нормативных нагрузок, вызывающего наибольшее перемещение по j -му направлению.

При взятии частных производных от выражения (4) по F_i величины \bar{N}_{ij} , N_{iq} полагались константами, что обусловлено малым влиянием вариации одного параметра на напряженно-деформированное состояние системы.

Применяя далее методика работы [3], получаем рекуррентные зависимости, связывающие значения множителей Лагранжа на $(k-1)$ -й и k -й итерациях и оптимизируемых параметров на k -й и $(k+1)$ -й итерациях:

$$\tau_j^k = \tau_j^{k-1} \left(\frac{1}{[Y_j]} \sum_{i=1}^I \frac{\bar{N}_{ij}^k N_{iq}^k}{E_i F_i^k} L_i \right)^{\frac{1}{\eta}}, \quad j = 1, \dots, J; \quad (5)$$

$$F_i^{k+1} = F_i^k \left[\sum_{j=1}^J \tau_j^k \frac{\bar{N}_{ij}^k N_{iq}^k}{E_i (F_i^k)^2} L_i \right]^{\frac{1}{\alpha}}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (6)$$

Теперь таким же образом решим приближенно задачу минимизации целевой функции (1) при учете ограничений (3). Приближенность решения заключается в том, что из необходимых условий оптимальности используются только условия равенства нулю частных производных по множителям Лагранжа. В результате получаем следующее выражение:

$$F_i^{k+1} = F_i^k \left\{ \frac{1}{F_i^k} \max \left[\frac{(N_i^+)^k}{\alpha_i R_i}, \frac{(-N_i^-)^k}{\varphi_i^k m_i^k R_i}, F_{\min_i}^k \right] \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, I.$$

При показателе степени в выражении (7), равном единице, получаем известное выражение последовательного итерационного перерасчета значений параметров системы.

Предлагаемый алгоритм оптимизации рассматриваемых систем, объединяющий оба полученных решения, представленных выражениями (6), (5) и (7), заключается в следующем.

1. При исходном приближении оптимизируемых параметров — площадей поперечных сечений элементов — определяются усилия в них. Исходные значения параметров рекомендуется принимать одинаковыми, если они не регламентированы другими условиями.

2. По выражению (7) при $\beta = 1$ определяются требуемые значения площадей сечений, и при этих значениях находят усилия в элементах и перемещения по направлениям, по которым они ограничены.

3. Начальные значения множителей Лагранжа в выражении (6) назначаются пропорциональными степени нарушения ассоциированных с ними ограничений на перемещения и такими, чтобы наибольшее по $i = 1, \dots, I$ значение в квадратных скобках в (6) было не меньше единицы. Затем подобранные таким образом значения множителей умножаются или на отношения полученных значений перемещений к их предельно допустимым значениям, или на заданный множитель, больший единицы.

4. Далее в итерационном цикле выполняются следующие действия:

а) проверяется выполнение ограничений на перемещения и сходимость итерационного процесса по объему (объемы системы на двух смежных итерациях не должны отличаться более, чем на заданную величину). Если оба условия выполняются, то оптимальное решение найдено, в противном случае расчет продолжается;

б) по выражениям (5) пересчитываются значения множителей Лагранжа для нарушенных ограничений на перемещения;

в) по выражениям (6) определяются значения параметров, требуемых по условиям допустимой жесткости;

г) по выражениям (7) определяются значения параметров, требуемые по условиям прочности и устойчивости с учетом ограничений снизу;

д) из значений, найденных по выражениям (6) и (7), для каждого стержня выбирается большее. При этих значениях выполняется расчет стержневой системы и действия, начиная с пункта а), повторяются.

Элементы реальных стержневых конструкций должны удовлетворять условиям унификации и дискретности. Учесть эти условия можно после получения оптимального решения. Однако лучшие результаты достигаются, если условия дискретности и унификации учитываются в процессе поиска решения, т.е. в пункте д) алгоритма, перед тем как выполнить анализ напряженно-деформированного состояния системы, необходимо привести сечения элементов в соответствие заданному сортаменту и произвести их унификацию.

Описанная методика реализована в программе для ЭВМ на языке ПЛ/1 и иллюстрируется примером.

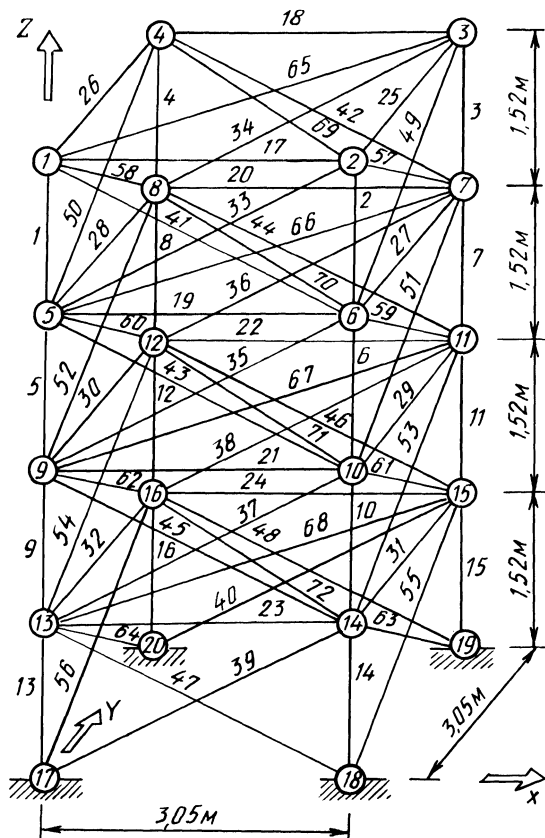


Рис. 1. 72-элементная ферма.

Пример. Оптимизировалась 72-элементная ферма (рис. 1), заимствованная из работ [2, 4]. Расчет производился на два независимых сочетания узловой нагрузки: 1) $P_{1x} = P_{1y} = 22,5$ кН; $P_{1z} = -22,5$ кН; 2) $P_{1z} = P_{2z} = P_{3z} = P_{4z} = -22,5$ кН, где P_{1x} — сила, приложенная в узле 1 по направлению оси X. Аналогичный смысл имеют и другие индексы. Перемещения узлов 1—4 ограничивались до $\pm 0,645$ см по направлениям осей X, Y, Z. Для всех $i = 1, \dots, I$ принималось $E_i = 68950$ МПа; $R_i = 172,5$ МПа; $F_{\min i} = 0,645$ см²; $\alpha_i = 1$; $\varphi_i = m_i = \text{const} = 1$. Показатели степени были $\beta = \lambda = \eta = 2$. Учитывались условия унификации элементов, т.е. они были предварительно разбиты на 16 групп, и на каждой итерации площади сечений элементов назначались одинаковыми внутри группы по наибольшему требуемому значению площади в группе. Принадлежность элементов к группам унификации, а также резуль-

Т а б л и ц а 1.

Расчет оптимизации 72-элементной фермы

Номера групп унификации	Номера элементов в группе	Площади сечений элементов в группе, см ²		
		данная работа	работа [2]	работа [4]
1	2	3	4	5
1	1, 2, 3, 4	0,980	0,964	1,02
2	5, 6, 7, 8	4,510	4,022	1,71
3	9, 10, 11, 12	10,260	7,791	7,15
4	13, 14, 15, 16	11,00	11,566	13,4
5	33, 34, 41, 42, 49, 50, 57, 58	3,901	3,676	3,83
6	35, 36, 43, 44, 51, 52, 59, 60	2,511	3,375	3,54
7	37, 38, 45, 46, 53, 54, 61, 62	3,147	3,360	3,74
8	39, 40, 47, 48, 55, 56, 63, 64	2,891	3,370	3,25
9	17, 18, 25, 26	2,044	2,861	2,20
10	19, 20, 27, 28	0,645	0,645	0,645
11	21, 22, 29, 30	0,645	0,645	0,645
12	23, 24, 31, 32	0,645	0,645	0,645
13	65, 69	6,202	3,350	3,920
14	66, 70	0,645	1,266	0,975
15	67, 71	0,645	0,645	0,645
16	68, 72	0,645	0,645	0,645
Объем системы, см ³		62092	63316	63683
Количество итераций		15	13	22

тыги расчета и их сравнение с результатами работ [2, 4] приведены в табл. 1. Наши результаты оказались несколько лучше, чем в работе [2], по расходу материала, но при большем количестве итераций. Это объясняется назначением нами слишком строгого критерия сходимости итерационного процесса по объему (0,5 %). Наши результаты также несколько лучше, чем в работе [4], где задача решалась методами математического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. О л ь к о в Я.И., А н т и п и н А.А. Алгоритм оптимального распределения материала в статически неопределимых системах с учетом дискретности сортамента. — Изв. вузов: Стр-во и архитектура, 1979, № 12, с. 9—13.
2. Х а н М.Р., У и л м е р т К.Д., Т о р н т о н В.А. Метод критериев оптимальности для крупных конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 7, с. 102—112.
3. Б ы к о в с к и й С.Г. Способ оптимальной корректировки сечений элементов шарнирно-стержневых систем по условиям допустимой жесткости. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Минск: Выш.шк., 1983, вып. 10, с. 69—74.
4. Ш м и т м л., Ф а р ш и. Некоторые концепции аппроксимации для синтеза конструкций. — Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 5, с. 145—155.

УДК 531

Г.А.ГЕРАЩЕНКО, канд. техн. наук (БПИ)

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В МЕХАНИКЕ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

Равновесие сплошной среды при отсутствии массовых сил описывается системой однородных уравнений. В классической (линейной) теории они имеют вид

$$\nabla_i \sigma^{ik} = 0. \quad (1)$$

Здесь и компоненты тензора напряжений σ^{ik} , и ковариантная производная ∇_i отнесены к начальным векторным базисам — основному \bar{r}_i и взаимному \bar{r}^i произвольной криволинейной системы координат.

Общее инвариантное решение системы (1) в компонентах тензора функций напряжений было дано Б.Финци (1934), А.Ю.Крутковым (1949), В.И.Блохом (1950) [1] :

$$\sigma^{ik} = \lambda^{mti} \lambda^{nsk} \nabla_{mn} \chi_{st}, \quad (2)$$

где $\lambda^{mti} = \bar{r}^m (\bar{r}^t \times \bar{r}^i)$ — компоненты дискриминантного тензора; ∇_{mn} — вторая ковариантная производная; χ_{st} — компоненты тензора функций напряжений. В качестве последнего может быть взят любой симметричный тензор, компоненты которого и их производные требуемого порядка — непрерывные функции.