УДК 624.072.045.012.35

Т.М.ПЕЦОЛЬД, канд.техн.наук,
Т.Н.МАЛАШ (БПИ)

МЕТОД ЭКВИГРАДИЕНТА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Центрифугированные железобетонные элементы кольцевого сечения сравнительно недавно начали применяться в строительстве. Определяющими при решении оптимизационных задач являются выбор и обоснование критерия оптимальности и затем формирование соответствующей ему целевой функции. Наиболее полным технико-экономическим показателем, характеризующим эффективность конструктивного решения, является уровень приведенных затрат по его реализации и эксплуатации [1]. Но для однотипных конструкций достаточно учесть изменяющиеся под влиянием исследуемых параметров факторы. В задаче оптимизации параметров железобетонных центрифугированных колонн в качестве критерия оптимизации принята стоимость "в деле" 1 м колонны. Аналитическое выражение функции стоимости получено в процессе анализа и обобщения стоимостных характеристик колонн на различных стадиях их создания и эксплуатации с использованием методов развернутого калькулирования затрат и аппроксимации полученных зависимостей стоимостных характеристик от параметров поперечного сечения колонны по методу наименьших квадратичных уклонений. Полученная целевая функция имеет вид

$$U = [a_2 + a_4 + a_5 - (b_2 + b_4 + b_5)\delta - c_4(D - d_4) - c_5\delta^2]F_б +$$
$$+ (a_1 + a_3 - b_1 d - b_3 P - c_1 d^2 - c_3 P^2)F_a, \qquad (1)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i — удельные стоимостные коэффициенты для бетона и арматуры; $F_б$, F_a — площадь бетона и арматуры соответственно; D — наружный диаметр колонны; δ — толщина стенки элемента; d — диаметр стержней арматуры (рабочей).

Однако выражение (1), достаточно точно отражая стоимость железобетонных центрифугированных колонн "в деле", включает большое количество разномерных коэффициентов, что затрудняет его оперативное использование. Оценка влияния различных параметров на стоимость "в деле" бетона и арматуры показала, что решающее значение имеет фактор тонкостенности, и функция стоимости железобетонной центрифугированной колонны может быть удовлетворительно аппроксимирована выражением

$$U = (a - b\delta)\pi\delta(D - \delta) + cF_a, \qquad (2)$$

где a, c — удельные стоимостные коэффициенты, характеризующие часть стоимости бетона и арматуры, не зависящую от параметров конструкции; b — стоимостный коэффициент, характеризующий снижение стоимости 1 м^3 бетона с возрастанием толщины стенки. Стоимостные коэффициенты функции (2) различны для разных марок центрифугированного бетона и видов арматуры. В качестве ограничения задачи принято условие прочности по СНиП II-21-75:

$$Nl_0 \leqslant (R_{пр} F_б r_{ср} + R_а F_а r_а) \frac{\sin \pi \alpha_2}{\pi} + R_а F_а k_а z_а , \qquad (3)$$

где

$$\alpha_k = \frac{N + A_а R_а F_а}{R_{пр} F + (R_а + B_а R_а) F_а} ; \; K_а = A_а - B_а \alpha_k ; \; z_а = k_1 r_а =$$

$$= (0,2 + 1,3\alpha_k) r_а \leqslant r_а .$$

Влияние прогиба учитывается умножением левой части выражения (3) на коэффициент η, нахождение которого также регламентировано СНиП. Проблема определения таких параметров колонны, которые обеспечивали бы минимум функции (2) при соблюдении условия (3) приводит к отысканию экстремума функции (2) при ограничении (3), которое в свою очередь зависит от величины η. Задача эта не может быть решена классическими аналитическими методами, поэтому в качестве метода решения использован принцип эквиградиентности, разработанный Г.А.Гениевым и использованный автором для решения задач устойчивости стержневых систем [2]. В задаче оптимального проектирования центрифугированных колонн использована модификация метода, излагаемая следующим образом.

Пусть нужно найти значение параметров $P_1, P_2, \ldots, P_n$, которые обеспечивают минимум суммы

$$U = P_1 + P_2 + \ldots + P_n \qquad (4)$$

при наличии ограничения

$$Q(P_1, P_2, \ldots, P_n) = M . \qquad (5)$$

Как видим, в приложении к задаче оптимизации строительных конструкций выражение (4) является функцией стоимости, определяемой в зависимости от размеров конструкции, удельных стоимостных коэффициентов (бетона, арматуры), затрат на изготовление, транспортировку, монтаж, эксплуатацию и т.д.

Ограничение (5) является нормативным требованием, обеспечивающим прочность (устойчивость) конструкции (элемента), а также может быть ограничением по деформативности или трещиностойкости, где М — параметр, характеризующий несущую способность конструкции.

Решая задачу классическим методом неопределенных множителей Лагранжа, получим

$$\partial Q/\partial P_1 = \partial Q/\partial P_2 = \ldots = \partial Q/\partial P_n . \qquad (6)$$

Однако указанный способ решения системы (6) применительно к подбору оптимального сечения внецентренно сжатых центрифугированных колонн кольцевого сечения неприменим. Строгое соблюдение требований СНиП на ограничение по прочности (устойчивости) с учетом коэффициента η приводит к необходимости вычисления сложнейших производных $\partial Q/\partial P_i$ и решения полученной системы существенно нелинейных уравнений, что затруднительно даже при наличии современных ЭВМ. Ввиду этого обратимся к трактовке принципа эквиградиентности. Представим зависимость (6) в форме малых конечных приращений параметров ΔP_i и соответствующих им приращений ΔQ_i

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta P_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta P_2} = \ldots = \frac{\Delta Q_n}{\Delta P_n}, \tag{7}$$

где ΔP_i — конечное приращение параметра P_i, вызывающее соответствующее приращение ΔQ_i, т.е. при включении ΔP_1 в P_1 получаем ΔQ_1; ΔP_2 в P_2 — получаем ΔQ_2 и т.д.

Необходимым условием оптимальности системы (4) при наличии ограничения (5) будет требование прямой пропорциональной связи между приращениями ΔP_i и ΔQ_i. Если же принять, что приращения ΔP_i одинаковы, т.е. $\Delta P_1 = \Delta P_2 = \ldots = \Delta P_n$, то из этого следует, что и приращения ΔQ_i должны быть одинаковыми

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_i = \ldots = \Delta Q_n, \tag{8}$$

т.е. в оптимальной системе равные приращения параметров ΔP_i вызывает равные приращения ΔQ_i.

Докажем это положение, применяя доказательство от противного, т.е. мы предположим, что имеем минимальную систему (4), в которой равным приращениям ΔQ_i соответствуют неравные приращения ΔP_i, и докажем, что из этого неравенства приращений возникает возможность уменьшить значение системы (4), т.е. она не минимальна. Итак, предполагаем, что имеется $U_{мин}$ при определенных значениях P_1, P_2, ..., P_n. Подберем теперь значения ΔP_i так, чтобы при включении их в P_i приращения ΔQ_i были одинаковыми.

Допустим, что при этом не все ΔP_i будут равны между собой. Не теряя общности решения, так как нумерация значения не имеет, можно записать $\Delta P_7 > \Delta P_2 > \ldots > \Delta P_n$.

Рассмотрим теперь изменение ΔQ при последовательном малом изменении $(P_1 - \Delta P_1)$ и $(P_n + \Delta P_n)$.

Из условия подбора ΔP_i следует, что суммарное приращение равно нулю $\Delta Q = -\Delta Q_1 + \Delta Q_n = 0$, т.е. ограничение (5) выполняется. В то же время

$$U = (P_1 - \Delta P_1) + P_2 + \ldots + (P_n + \Delta P_n) = U_{min} - \Delta P_1 + \Delta P_n < U_{min},$$

что противоречит принятой предпосылке, что достигнуто U_{min}.

Следовательно, при минимальном значении U равные изменения

P_i влекут за собой равные изменения Q_i и наоборот. Из доказательства вытекает решение вопроса о нормировке малой конечной величины ΔP_i . Это должна быть величина такого порядка, чтобы с достаточной степенью точности выполнялось равенство

$$Q[P_1, P_2, \ldots, (P_n + \Delta P_n)] = -Q[P_1, P_2, \ldots, (P_n - \Delta P_n)], \tag{9}$$

причем, конечно, для всех P_i .

Итак, рассмотрим окончательную процедуру поиска минимального значения (4). Пусть имеется начальный набор значений P_i , удовлетворяющих условию (5). Подобрав удовлетворяющее требованиям (9) для каждого P_i значение ΔP_i (т.е. минимальное значение ΔP_i), находим соответствующие изменения ΔQ_i.

Если один из компонентов уравнения (8) окажется большим по сравнению с другими, то из этого следует, что соответствующий ему параметр P_i имеет заниженное значение, что вытекает из отношений (7). Наоборот, если один из компонентов (8) окажется

Таблица 1.

Пример оптимизации параметров центрифугированной колонны

№ шага	P_1	P_2	P_3	D, см	δ, см	F_a, см^2	M, кН·м	ΔM, кН·м	U, руб/м	Примечание
I этап	14,145	−5,489	7,724	50	8	55	211	—	16,38	$U = U_0$ Начало $\Delta P = 0,5$
1	14,645	−5,489	7,724				248,6	37,6		$P_1 + \Delta P$
2	14,145	−4,989	7,724				250,4	39,4		$P_2 + \Delta P$
3	14,145	−5,489	8,224				223,0	12,0		$P_3 + \Delta P$
II этап	15,823	−6,14	4,426	55	8	31,5	211		14,11	Вариант 1
1	16,323	−6,14	4,426				246,5	35,5		$P_1 + \Delta P$
2	15,823	−5,64	4,426				245,6	34,6		$P_2 + \Delta P$
3	15,823	−6,14	4,926				224,5	13,5		$P_3 + \Delta P$
III этап	17,516	−6,797	1,588	60	8	11,3	211		12,33	Вариант 2
1	17,816	−6,797	1,588				230,4	19,4		$P_1 + \Delta P$
2	17,516	−6,497	1,588			227,9	227,9	16,9		$P_2 + \Delta P$
3	17,516	−6,797	1,888				219,9	8,9		$P_3 + \Delta P$
IV этап	18,01	−6,99	0,94	61,458		6,7	211		11,96	Окончание $\mu = \mu_{min}$

меньшим по сравнению с другими, то из этого следует, что соответствующий параметр P_i имеет завышенное значение.

Рассмотрим численный пример использования принципа эквиградиента, аналогичный представленному в [3]. Типовой серией для нагрузки $N = 2000$ кН; $M = 211$ кН·м рекомендована колонна $D = 50$ см, $\delta = 8$ см, $F_a = 55$ см^2, ($l_0 = 882$ см). Принимая стоимостные коэффициенты целевой функции (2) $a = 134$ руб/м^3; $b = 6{,}5$ руб/м^3 · см; $c = 1405$ руб/м^3, определим стоимость исходного варианта $U_{нач} = 16{,}38$ руб. Затем, согласно вышеприведенному алгоритму, представим функцию (2) в виде (4) и, задавшись $\Delta P = 0{,}5$, последовательно добавим ΔP к каждому слагаемому целевой функции (4), наблюдая за изменением значений параметра M. Результаты расчета запишем в табл. 1.

Анализируя полученные в ходе трех итераций приращения ΔM, делаем вывод, что для уменьшения стоимости рассматриваемой колонны необходимо снизить значение параметра P_3 и увеличить P_2, что соответственно скажется на характеристиках сечений D_1, δ, F_a. Для полученного нового сечения повторяем вышеописанную операцию (см. этап II, шаги 1, 2, 3 в табл. 1). Шаги повторяем до тех пор, пока не будет исчерпана несущая способность элемента либо процент армирования не достигнет минимально допустимого. Как видно из результатов расчета, применение принципа эквиградиентности позволяет существенно снизить стоимость конструкции "в деле", а именно, общее снижение стоимости 1 м колонны по сравнению с первоначальным вариантом может составить 26 % (1,38—11,96/16,38), или с учетом наличия сортамента центрифугированных колонн достигнутое снижение составит 24 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. С к л а д н е в Н.Н. Проблемы оптимального проектирования железобетонных конструкций. — Изв. вузов: Стр-во и архитектура, 1976, № 10, с.18—26. 2. Г е н и е в Г.А. О принципе эквиградиентности и применении его к оптимизационным задачам устойчивости стержневых систем. — Строит. механика и расчет сооружений, 1979, № 6, с. 8—14. 3. П е ц о л ь д Т.М., М а л а ш Т.Н. Оптимизация параметров железобетонных центрифугированных колонн по критерию стоимости. — Стр-во и архитектура Белоруссии, 1981, № 4, с. 34—36.

УДК 624.012.35:624.078+69.024.8

Н.А.РАК (БПИ)

ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ УЗЛОВ СОПРЯЖЕНИЯ СТРОПИЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С КОЛОННАМИ

Железобетонный каркас одноэтажного производственного здания представляет собой статически неопределимую систему, состоящую из отдельных элементов, соединенных между собой в узлах.