Данная однопараметрическая задача определения предельной нагрузки P допускает естественное обобщение на случай многопараметрической нагрузки, оптимизация которой производится аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о й т е р В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М.: Изд-во иностр.лит., 1961. — 79 с. 2. К р ы ж а н о в с к и й В.П., Л а н т у х Л.Г., П е р е л ь м у т е р А.В. О расчете упругопластических конструкций при повторно-переменном нагружении. — В кн.: Материалы по металлическим конструкциям. М.: Стройиздат, 1972, вып. 16, с. 67—71. 3. Т и м о ф е е в В.И. К определению предельной прогрессивной нагрузки. — В кн.: Строительная механика: Межвуз. темат. сб. тр. Л.: Изд-во Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1977, № 2 (128), с. 106—113. 4. К о р н о у х о в Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. — М.: Госстройиздат, 1949. — 376 с. 5. К л е м п е р т Ю.З., П а р и к о в В.Н., С л и в к е р В.И О процедуре вычисления матрицы жесткости призматического стержня. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1974, вып. 16, с. 179—190. 6. З ы л е в В.Б., С о л о в ь е в Г.П. Расчет стержневой системы на большие прогибы методом конечных элементов. — В кн.: Расчет транспортных и строительных конструкций с применением ЭВМ: Тр. ин-тов инж. ж.-д. трансп. М.: Моск. ин-т инж.трансп., 1981, вып. 656, с. 95—101. 7. Г о х ф е л ь д Д.А., Ч е р н я в с к и й О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. — М.: Машиностроение, 1979. — 263 с. 8. Г е м м е р л и н г А.В. Расчет стержневых систем. — М.: Стройиздат, 1974. — 208 с. 9. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач/Под ред. В.Ф.Демьянова, В.Н.Малоземова. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 192 с.

УДК 624.072.21/23

А.И.АРЕСТОВИЧ (БПИ)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАСХОДУ МАТЕРИАЛА ФЕРМ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ

В статье исследуются вопросы оптимизации фермы с позиций надежности. Рассматривается задача оптимизации шарнирно-стержневой системы с учетом надежности [1]. В качестве случайных величин, входящих в математическую модель оптимизируемой системы, выступают прочность материала, с одной стороны, и напряжения в стержнях — с другой. На основании центральной предельной теоремы можно полагать, что напряжения в элементах системы подчиняются нормальному закону распределения, поскольку на них влияют многие взаимно независимые случайные факторы, например погибы, отклонения в размерах, отклонения в значении и местах приложения нагрузки, в расположении опорных закреплений, в их податливости и т.д. Принимаем, что прочность также имеет нормальное распределение. Оптимизируемой функцией является теоретический объем шарнирно-стержневой системы. Ограничением в задаче оптимизации служит вероятность безотказной работы системы, которая представляет один из показателей надежности.

Плотности вероятностей одномерного распределения прочности и напряжения выражаются формулами [2]:

$$f(R) = \frac{1}{\hat{R}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\bar{R}}{\hat{R}}\right)^2\right];$$

$$f(S) = \frac{1}{\hat{S}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{S-\bar{S}}{\hat{S}}\right)^2\right],$$

где $\bar{R}$ и $\bar{S}$ — математические ожидания, а $\hat{R}$ и $\hat{S}$ — стандартные отклонения прочности и напряжения.

Введем новый случайный вектор $У = R - S$. (1).
Формула (1) — основная расчетная формула надежности системы [3] и выражает ту мысль, что прочность элемента системы всегда больше, чем возникающее в нем напряжение.

Учитывая свойства математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин, получим

$$\bar{У} = \bar{R} - \bar{S},\ \hat{У} = \hat{R} + \hat{S}.$$

Вероятность безотказной работы элемента можно записать выражением [2,3]:

$$Q_i = P(Y_i \geqslant 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\hat{y}_i\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i-\bar{y}_i}{\hat{y}_i}\right)^2\right]dy_i.$$

Введем новую переменную $Z_i = \dfrac{y_i - \bar{y}_i}{\hat{y}_i}$.

После преобразований получим формулу надежности элемента:

$$Q_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_i}^\infty \exp\left(-\frac{z_i^2}{2}\right)dz_i = \Phi(\gamma_i),$$

где $\Phi(\gamma_i)$ — функция Лапласа, а $\gamma_i = (\bar{R}_i - \bar{S}_i)/\sqrt{\hat{R}_i + \hat{S}_i}$ — аргумент этой функции.

Чтобы определить вероятность безотказной работы статически определимой системы, можно воспользоваться формулой безотказной работы последовательно соединенных элементов. При этом система разрушается по слабейшему элементу. Вероятность безотказной работы системы находится по формуле $Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$, (2), где Q_i — вероятность безотказной работы отдельного стержня. При этом имеется в виду, что вероятности отказов элементов выступают как независимые события [1, 3, 4]. Обоснованность такой предпосылки для многомерного случайного вектора вполне оправдана, ибо определение корреляционной связи между проекциями вектора вызывает серьезные математические трудности. В задаче оптимизации выражение (2) представляет ограничение типа равенства. Целевая функция есть теоретический объем сооружения

$$V = F^T L = \sum_{i=1}^{n} F_i l_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Требуется найти оптимальную точку F^*, чтобы [5]

$$V(F^*) = \min_{F \in D} V(F); \quad D = \{F : \varphi(F) = 0\}.$$

Длина стержней и их площадь — величины детерминированные. Для отыскания оптимального решения используют метод множителей Лагранжа. Лагранжиан целевой функции имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{n} F_i l_i + \lambda (Q - \prod_{i=1}^{n} Q_i), \tag{3}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Запишем условия стационарности функции (3):

$$\frac{\partial L}{\partial F_i} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Раскрывая последние, получим

$$l_i - \frac{\lambda \partial (Q - \prod_{i=1}^{n} Q_i)}{\partial F_i} = 0.$$

Выполним необходимые преобразования с целью исключения множителя Лагранжа [5]

$$l_i - \frac{\lambda \partial [\prod_{i=1}^{n} \Phi(\gamma_i)]}{\partial \gamma_i} \frac{\partial \gamma_i}{\partial F_i} =$$

$$= l_i - \lambda \Phi'(\gamma_i) \Phi(\gamma_1) \ldots \Phi(\gamma_{i-1}) \Phi(\gamma_{i+1}) \ldots \Phi(\gamma_n) \partial \gamma_i / \partial F_i;$$

$$l_{i+1} = \lambda \Phi'(\gamma_{i+1}) \Phi(\gamma_1) \ldots \Phi(\gamma_i) \Phi(\gamma_{i+2}) \ldots \Phi(\gamma_n) \partial \gamma_{i+1} / \partial F_{i+1};$$

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{\Phi'(\gamma_i) \Phi(\gamma_{i+1}) \partial F_{i+1} / \partial \gamma_{i+1}}{\Phi'(\gamma_{i+1}) \Phi(\gamma_i) \partial F_i / \partial \gamma_i}. \tag{4}$$

Учитывая, что $S = N/F$, получим

$$\gamma \sqrt{\hat{R} + \hat{N}/F^2} = \bar{R} - \bar{N}/F, \tag{5}$$

где $\bar{N}$ и $\hat{N}$ — соответственно математическое ожидание и дисперсия усилия в стержне; F — площадь поперечного сечения при условии, что она является детерминированной величиной.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) напряжение — случайная величина, а прочность — детерминированная, тогда

$$\gamma \frac{\hat{N}}{F} = R - \frac{\bar{N}}{F} \quad \text{или} \quad F = \frac{\hat{N}\gamma + \bar{N}}{R}.$$

Найдя производную $\partial F / \partial \gamma$ и подставив в формулу (4), найдем отношение

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{\Phi'(\gamma_i)\Phi(\gamma_{i+1})\hat{N}_{i+1}R_i}{\Phi'(\gamma_{i+1})\Phi(\gamma_i)\hat{N}_i R_{i+1}}; \tag{6}$$

б) прочность — случайная величина, напряжение — детерминированная

$$F = \frac{N}{\bar{R} - \gamma\hat{R}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial \gamma} = \frac{N\hat{R}}{(\bar{R} - \gamma\hat{R})^2};$$

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{\Phi'(\gamma_i)\Phi(\gamma_{i+1})N_{i+1}\hat{R}_{i+1}(\bar{R}_i - \gamma_i\hat{R}_i)^2}{\Phi'(\gamma_{i+1})\Phi(\gamma_i)N_i\hat{R}_i(\bar{R}_{i+1} - \gamma_{i+1}\hat{R}_{i+1})^2}; \tag{7}$$

в) напряжение и прочность — случайные величины. Находим производную неявной функции (5)

$$P(F, \gamma) = \gamma\sqrt{\hat{R}F^2 + \hat{N}} - \bar{R}F + \bar{N} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma} = -\frac{P'_\gamma}{P'_F} = \frac{\hat{R}F^2 + \hat{N}}{\bar{R}\sqrt{\hat{R}F^2 + \hat{N}} - \gamma\hat{R}F}$$

и, подставляя ее в выражение (4), получим

$$\frac{l_i}{l_{i+1}} = \frac{[\hat{R}_{i+1}F^2_{i+1} + N_{i+1}][R_i\sqrt{\hat{R}_iF_i^2 + \hat{N}_i} - \gamma_iR_iF_i]\Phi'(\gamma_i)\Phi(\gamma_{i+1})}{[\bar{R}_{i+1}\sqrt{\hat{R}_{i+1}F^2_{i+1} + \hat{N}_{i+1}} - \gamma_{i+1}\hat{R}_{i+1}F_{i+1}][\hat{R}_iF_i^2 + \hat{N}_i]\Phi'(\gamma_{i+1})\Phi(\gamma_i)}. \tag{8}$$

Таким образом, для отыскания оптимальной фермы необходимо решить систему уравнений, из которых $0{,}5\,(n-1)\,n$ будут типа выражений (6), (7), (8) и одно — типа (2).

Результаты исследования могут быть применены в практике проектирования статически определимых шарнирно-стержневых систем, для которых распределение напряжения и прочности можно аппроксимировать нормальными законами распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а й н у л л и н а С.Х. Учет надежности при проектировании конструкций наименьшего веса. — В кн.: Проблемы надежности строительной механики: Материалы 2-й Всесоюз. конф. по проблемам надежности в строит. механике. Вильнюс: Центр.правл.науч.-техн.о-ва стройиндустрии, 1968, с. 41—43.
2. К а п у р К., Л а м б е р с о н Л. Надежность и проектирование систем. —

М.: Мир. 1980. — 605 с. 3. Р ж а н и ц ы н А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. — М.: Стройиздат, 1978. — 239 с. 4. Р а й н ш к е К. Модели надежности и чувствительности систем. — М.: Мир, 1979. — 452 с. 5. М а л к о в В.П., У г о д ч и к о в А.Г. Оптимизация упругих систем. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

УДК 624.04

А.А.БОРИСЕВИЧ, канд.техн.наук (БПИ)

О РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УПРУГОПОДАТЛИВЫМИ СВЯЗЯМИ

Соединения элементов стержневых систем по ряду причин не всегда удовлетворяют требованиям, которые к ним предъявляются и которые закладываются в проектной документации. Напряженно-деформированное состояние системы со связями, статические и кинематические характеристики которых изменчивы, может существенно отличаться от состояния системы со связями с детерминированными характеристиками. Для нормальной эксплуатации система должна быть работоспособной ("устойчивой") не только при фиксированных параметрах элементов, а и в некоторой области изменения их. Поскольку разбросы характеристик связей носят случайный характер, практически любая задача статического расчета и оптимизации таких систем является стохастической.

Характеристикой таких связей будем считать их податливость δ^* или жесткость $r^* = 1/\delta^*$. Оценка напряженного состояния статически определимых систем должна производиться проверкой условий прочности по наиболее нагруженным сечениям, а также по сечениям, обладающим податливостью с учетом того, что жесткость по сечению является функцией δ^*. Определение перемещений выполняется в обычной постановке с учетом податливости связей. Расчет статически неопределимых систем приводит к записи уравнений совместности деформаций в виде

$$(A + \sum^{i} A_i^*)X + B + \sum^{i} B_i^* = 0 ,$$

где A_i^*, B_i^* — матрицы, определяющие влияние податливости связи на коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений.

Испытания сборных железобетонных элементов (см., например, [1]) показывают, что деформации узлов сопряжения этих элементов при расчетных нагрузках значительно отличаются от деформаций, подсчитанных для монолитных узлов, что обеспечивает существенное перераспределение усилий в конструкции. Влияние податливости связей на напряженное состояние статически неопределимых систем оценить можно численно, если установить воздействие возмущения матриц податливости (жесткости) и вектора перемещений (усилий) на решение уравнения $AX + B = 0$. Если X +