ницы, что всегда возможно сделать, увеличивая число конечных элементов за счет уменьшения длины.

Изложенное выше может быть распространено на задачи динамики и устойчивости рассматриваемых систем. Что касается систем с существенной геометрической нелинейностью, то их расчет можно вести на основе вышеизложенного любым шаговым методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидорович Е.М. Расчет шарнирно-стержневых систем произвольной структуры по деформированной схеме. — Изв. вузов: Стр-во и архитектура, 1975, № 2, с. 49—53. 2. Сидорович Е.М. Гармонические колебания геометрически нелинейных шарнирно-стержневых систем. — В кн.: Строительные конструкции и теория сооружений. Минск: БПИ, 1977, вып. 2, с. 147—153. 3. Сидорович Е.М. Расчет сооружений по деформированной схеме и асимптотические свойства получаемых решений. — В кн.: Вопросы строительства и архитектуры: Строительные конструкции и теория сооружений. Минск: Выш.шк., 1977, вып. VII, вып. 3, с. 153—159.

УДК 624.04

Б.П.СОЛОДОВ,
Т.А.АНДРУШЕВИЧ (БПИ)

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФЕРМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассматривается задача расчета статически определимых и неопределимых ферм с учетом геометрической и физической нелинейности на однократное загружение системой статически приложенных внешних сил. Предусматривается линейно-упругая, нелинейно-упругая и упруго-пластическая работа материала. Предполагается, что в процессе загружения ферм во всех стержнях значения усилий изменяются монотонно даже после того, как в некоторых из них возникнут пластические деформации, т.е. нагрузка вызывает только активные деформации элементов. Зависимость между напряжением и относительной деформацией может быть задана аналитически или в табличной форме. Для вычисления усилий в элементах фермы и перемещений ее узлов предлагается использовать метод перемещений в алгоритмической форме, что позволяет решать задачу практически с любой точностью без вывода громоздких аналитических выражений при записи уравнений равновесия. Используемый алгоритмический подход ранее был предложен для статического расчета вантовых комбинированных систем с учетом только геометрической нелинейности в работе [1]. Суть его применительно к расчету ферм с учетом как геометрической, так и физической нелинейности состоит в следующем. Пусть задана статически неопределимая или статически определимая ферма произвольной структуры. В узлы этой фермы введем линейные связи согласно расчету по методу перемещений, после чего загрузим ее заданной системой внешних сил; в результате во введенных связях возникнут реакции (вектор $\bar{R}$). Если теперь по какому-либо правилу варьировать значениями перемещений введенных связей (элементами вектора $\bar{Z}$), то по полученным перемещениям узлов можно вычислить усилия в стержнях фермы и реакции во введенных связях.

Рассчитываемая система нелинейна, поэтому реакция в каждой введенной связи является нелинейной функцией перемещений всех связей: $R_i = r_i(Z_1, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n)$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Равновесному состоянию системы будет способствовать такой вектор перемещений $\bar{Z}$, при котором вектор $\bar{R}$ окажется нулевым, что соответствует решению системы нелинейных алгебраических уравнений

$$r_i(Z_1, \ldots, Z_n) = 0, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Так как для любого заданного вектора $\bar{Z}$ можно вычислить вектор $\bar{R}$, то для решения системы уравнений (1) можно применять различные методы решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Поэтому нет необходимости записывать алгебраические формулы и выражения; уравнения (1) записаны в окончательном виде. Отметим особо, что при поиске равновесного состояния в процессе вычислений введенные связи будут перемещаться в положительном и отрицательном направлениях, что соответствует повторно-переменной деформации стержней. В связи с тем, что такой характер деформаций происходит лишь в недрах ЭВМ, предполагается, что стержни, работающие в пластической стадии, деформируются в строгом соответствии с заданной диаграммой как при нагружении, так и при разгрузке.

Для решения системы уравнений (1) предлагается использовать метод Зейделя, который по физическому смыслу соответствует способу последовательного уравновешивания связей. Этот метод показал надежную сходимость при расчете различных вантовых комбинированных систем [1]. Достоинство этого метода заключается также в предельной простоте алгоритма: решение системы нелинейных уравнений сводится к последовательному решению одномерных задач

$$R_i = r_i(Z_i) = 0, \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Эти задачи обычно быстро решаются методом золотого сечения или методом касательных Ньютона. Если используется метод Ньютона, то производную необходимо вычислять приближенно, задаваясь конечными небольшими приращениями перемещения i-й введенной связи.

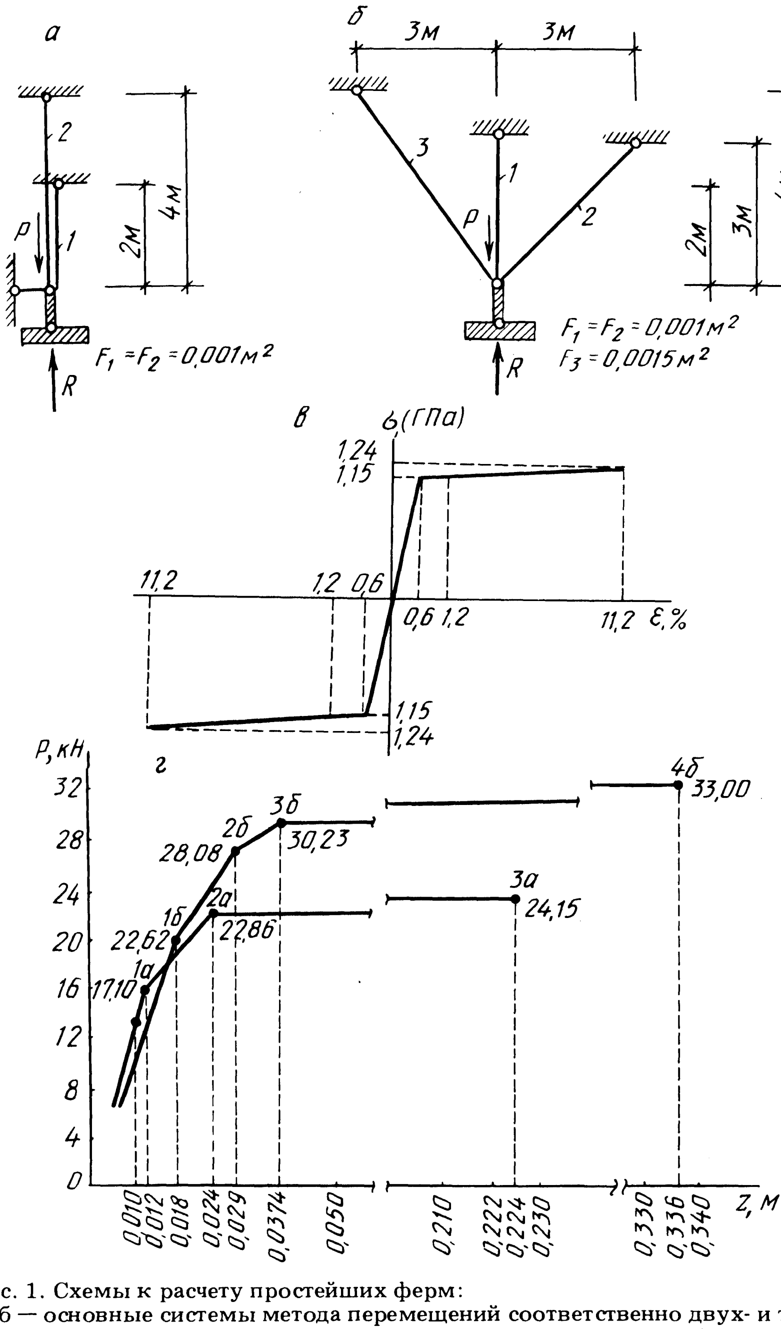

Рис. 1. Схемы к расчету простейших ферм:
а, б — основные системы метода перемещений соответственно двух- и трехстержневой ферм и нагрузки; в — принятая упрощенная диаграмма "растяжение—сжатие" материала; г — графическая зависимость значений перемещений от различных значений внешней нагрузки в состоянии равновесия.

При работе элементов в упругой стадии систему можно сразу загружать полной нагрузкой и искать ее равновесное состояние. Если предполагается пластическая работа растянутых стержней, а также разрушение некоторых сжатых стержней, то при полном загружении система может превратиться в механизм. Поэтому нагрузку следует прикладывать небольшими ступенями, для каждой из которых определяется равновесное состояние. Перемещения, вычисленные на предыдущей ступени, принимаются в качестве исходных для расчета системы на действие последующей ступени.

В соответствии с предложенной методикой рассчитаны двухстержневая и трехстержневая фермы, основные системы метода перемещений которых показаны на рис. 1, а и 1, б соответственно, а также линейно-упругая геометрически нелинейная консольная ферма, расчетная схема которой и основная система приведены на рис. 2. Материал конструкции — сталь 35 ГС упрочненная, предел текучести которой 1,15 ГПа, предел прочности — 1,24 ГПа, увеличение деформации без изменения усилия в элементе прекращается при 1,2 % первоначальной длины, разрыв стержня — при 11,2 % первоначальной длины элемента (эти характеристики взяты из [2]). При $P_{упр} < P < P_{пп}$ образец в пределах расчетной длины деформируется равномерно, поэтому существует однородное распределение напряжений по длине образца (см. [3] с. 45). Исходя из вышесказанного, была принята упрощенная диаграмма растяжения, показанная на рис. 1, в. Положительный участок диаграммы соответствует эксперименту, а нижняя часть условно принята обратно симметричной относительно оси абсцисс. Нагрузка прикладывалась небольшими ступенями; для каждой ступени находилось равновесное состояние системы. В трехстержневой ферме горизонтальное перемещение нагруженного узла оказалось малым, что позволило решать одномерную задачу.

Для каждой из рассматриваемых ферм перемещения введенных связей, соответствующие равновесному состоянию, определялись методом золотого сечения. В результате каждому значению силы P было найдено соответствующее ей значение перемещения Z. По

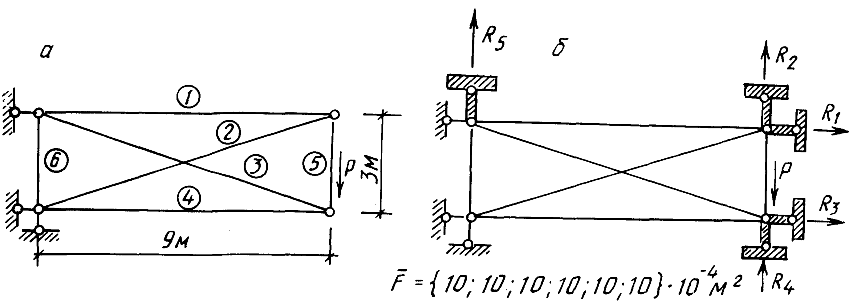

Рис. 2. Расчетная схема фермы с нагрузкой (а) и основная система метода перемещений (б).

Таблица 1.

Усилия в элементах фермы и перемещения узлов по направлению введенных связей при P = 7 кН

№ элемента	Усилие, кН	№ узла	Перемещение, м	Количество итераций
1	10,529	1	0,0439	
2	−11,085	2	−0,322	
3	11,099	3	−0,0543	23
4	−10,297	4	−0,326	
5	3,516	5	−0,0066	
6	− 4,228			

этим парам чисел было построено два графика изменения перемещения Z в зависимости от прикладываемой силы (рис. 1, г). Точки 1а и 1б на этих графиках соответствуют таким значениям силы P, при которых в стержнях под номером 1 в обеих фермах напряжения достигнут предела текучести. Точки 2а и 2б соответствуют пределу текучести для стержней с номером 2. Точка 3а соответствует перемещению узла и внешней нагрузке, вызывающей разрыв стержня 1 двухстержневой фермы. Точка 4б соответствует разрушению стержня 1 трехстержневой фермы.

При решении третьего примера сразу прикладывалась нагрузка. Для решения системы нелинейных уравнений (2) пятого порядка использован метод линеаризованных итераций Ньютона. Производные реакций (во введенных связях) по перемещениям вычислялись приближенно с использованием конечных значений приращений перемещений. Результаты расчета сведены в табл. 1.

При нагрузке в 6 кН количество итераций при расчете данной фермы было равно 6. Увеличение количества итерации до 23 произошло из-за того, что нагрузка в 7 кН близка к той, при которой начинается пластическое течение элементов фермы, в результате чего меняется закон зависимости $R_i = r_i(Z_i)$. В этом случае предлагается при расчете методом Ньютона использовать алгоритм с переменным шагом приращения перемещений.

Предложенная методика позволяет исследовать работу ферм с учетом их физической и геометрической нелинейности, а также получить картину разрушения конструкции. При этом используются различные численные методы решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов Б.П. Расчет на ЭВМ вантовых комбинированных систем в нелинейной постановке на основе метода перемещений. — В кн.: Современные методы и алгоритмы расчета и проектирования строительных конструкций с применением ЭВМ: Тез. докл. Всесоюз. конф. (Таллин, 18—20 октября

1979 г.). Таллин: Таллин.политехн.ин-т, 1979, с. 89—90. 2. Тимошук Л.Т. Механические испытания металлов. — М.: Металлургия, 1971. — 223 с. 3. Методы испытания, контроля и исследования машиностроительных материалов: (Справочное пособие) / Под ред. А.Т.Туманова. — М.: Машиностроение, 1974, т. 2. — 320 с.

УДК 624.04:539.3

Р.И.ФУРУНЖИЕВ, канд.техн.наук
(БИМСХ)

МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ, МАСС И ДЕМПФИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТНЫХ, ИНЕРЦИОННЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СВОЙСТВ УЗЛОВЫХ СВЯЗЕЙ

Недостатком многих известных способов формирования матриц жесткости конечных элементов с учетом упругой податливости узловых связей является их неуниверсальность. Единый подход к формированию таких матриц с учетом особенностей узловых связей возможен на основе многоуровневого представления расчетной модели или на основе метода суперэлементов. В работах [1, 2] , например, такой подход применен для формирования матриц жесткости стержневых конечных элементов, имеющих упругоподатливые прикрепления к узлам. В работах [3, 4] приведены аналитические выражения матриц жесткости стержневых конечных элементов, полученные на основе моделирования узловых связей в виде контактных конечных элементов,

Формирование матрицы жесткости конечных элементов произвольного вида с учетом особенностей узловых связей рекомендуется производить по формуле [2]

$$k^* = k_0 - k_0(k + k_0)^{-1}k_0 \quad , \tag{1}$$

где k^*, k_0 — квадратные матрицы жесткости конечных элементов соответственно с учетом и без учета реальных жесткостных свойств узловых связей; k_0 — матрица, составленная из компонент жесткостных свойств узловых связей [4] .

Формирование матрицы жесткости k^* конечных элементов с учетом особенностей узловых связей осуществляется по универсальной подпрограмме для ЭВМ по формуле (1). Исходными данными служит матрица k конечных элементов с жесткими узловыми связями и диагональная матрица k_0 , составленная по значениям жесткостей узловых связей [4] .

Матрица масс (и демпфирования) конечных элементов произвольного типа с учетом податливости узловых связей может быть сформирована по формуле

$$m^* = m_0 + k_0 k_{11}^{-1} m_{11} k_{11}^{-1} k_0 - m_0 k_{11}^{-1} k_0 - k_0 k_{11}^{-1} m_0 \,, \tag{2}$$