*УДК 624.072.2*

Е.М.СИДОРОВИЧ, канд.техн.наук
(БПИ)

# РАСЧЕТ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ ФЕРМ, ВИСЯЧИХ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Особенности статического и динамического расчетов по деформированной схеме произвольных шарнирно-стержневых систем как геометрически изменяемых, так и неизменяемых, как с лишними связями, так и без них рассмотрены в работах [ 1, 2, 3]. Для расчетных моделей реальных конструкций, изменение геометрии которых остается в пределах, допускаемых нормами проектирования, практически целесообразным, за редким исключением, оказывается линеаризованный метод расчета. Он отличается от классического линейного расчета по недеформированной схеме наличием в разрешающих уравнениях блоков, учитывающих влияние начальных усилий исходного состояния (см. уравнения (13) в [ 3]).

В данной работе показано, как можно рассчитать по деформированной схеме произвольную комбинированную систему, раму или ферму (по рамной расчетной схеме). Предположим, что произвольная комбинированная система состоит из гибкой шарнирно-стержневой и жесткой изгибаемой частей, соединенных между собой в ряде узлов. Рассекая систему по этим узлам, получим две отдельные системы, совместная работа которых обеспечивается силами взаимодействия $Z_i$ (рис. 1). В исходном состоянии гибкая часть может иметь произвольные начальные усилия, зависящие от исходной нагрузки и предварительного напряжения. Жесткая же часть работает как обычная геометрически линейная система.

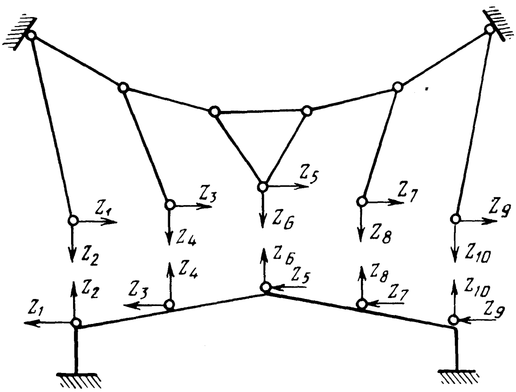


Рис. 1. Усилия взаимодействия гибкой и жесткой частей комбинированной системы.

Переход геометрически нелинейной гибкой части в расчетное состояние может быть описан системой линеаризованных уравнений (13) из [3]:

$$\begin{cases} AV + BU = P; \\ CV - DU = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где V — перемещения, а U — приращения погонных усилий, вызванные приращением нагрузки P. Остальные обозначения заимствованы из работ [1, 3].

Произведем перегруппировку строк и столбцов системы (1) так, чтобы столбцы перемещений и нагрузок можно было представить в виде

$$V = \begin{bmatrix} V_г \\ V_0 \end{bmatrix}; \qquad P = \begin{bmatrix} P_г \\ P_0 + \Delta Z \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $\Delta Z$ — приращение сил взаимодействия, а индексы г и о обозначают блоки, относящиеся соответственно к узлам, принадлежащим только гибкой части, и к узлам, общим для гибкой и жесткой частей.

Учитывая, что перемещения $V_0$ общих узлов одинаковы для гибкой и жесткой частей и что последняя — линейно деформируемая, выразим перемещения общих узлов через нагрузки, действующие на жесткую часть,

$$V_0 = -П_{00}\Delta Z + П_{ож}P_ж, \tag{3}$$

где $П_{оо}$ и $П_{ож}$ — матрицы податливости для жесткой части, рассматриваемой отдельно.

Найдем $\Delta Z$ из уравнения (3) и подставив в уравнения (2):

$$\begin{bmatrix} A_{гг} & A_{гс} \\ A_{ог} & A^*_{оо} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_г \\ V_о \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_г \\ B_о \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} P_г \\ P_о + R_{од}П_{ож}P_ж \end{bmatrix}; \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} C_г & C_о \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_г \\ V_о \end{bmatrix} - DU = 0,$$

где $A^*_{оо} = A_{оо} + R_{оо}$; $R_{оо} = П^{-1}_{оо}$, $R_{оо}$ есть матрица жесткости по направлениям сил взаимодействия для жесткой части. Решая второе уравнение системы (4) относительно U и исключая это неизвестное из первого уравнения, придем к решению в перемещениях $RV = R_p$, (5), где R — общая матрица жесткости; $R_p$ — матрица грузовых реакций.

Уравнение (5) применимо к любым комбинированным системам, у которых гибкая часть имеет произвольную структуру. Общая матрица жесткости представляет собой матрицу единичных реакций основной системы метода перемещений для гибкой части, элементы которой вычислены с учетом влияния начальных сил ис-

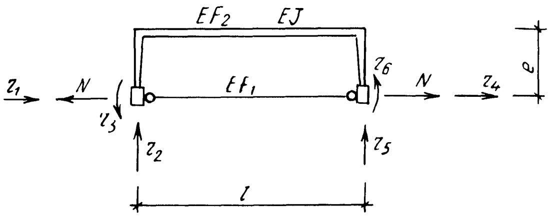


Рис. 2. Унифицированный конечный элемент.

ходного состояния. Уравнения (5) могут быть получены и из системы канонических уравнений метода перемещений для всей системы путем исключения перемещений узлов жесткой части. Более того, комбинированную систему можно не разбивать на составные части, а рассматривать как единое целое. При этом матрица коэффициентов системы канонических уравнений метода перемещений может быть получена по стандартной процедуре метода конечных элементов на основе унифицированного конечного элемента (рис. 2), состоящего из параллельно соединенных гибкого и жесткого стержней. Матрица жесткости этого конечного элемента при отсутствии начальных усилий в жесткой части имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & -f & -a & 0 & +f \\ 0 & b & h & 0 & -b & h \\ -f & h & c & +f & -h & d \\ \hline -a & 0 & +f & a & 0 & -f \\ 0 & -b & -h & 0 & b & -h \\ +f & h & d & -f & -h & c \end{array}\right]$$

где $a = (EF_1 + EF_2)/l$; $c = (4EJ + e^2EF_2)/l$; $f = eEF_2/l$; $b = (12EJ + Nl^2)/l^3$; $d = (2EJ - e^2EF_2)/l$; $h = 6EJ/l^2$; $N$ — начальная продольная сила; $e$ — эксцентриситет жесткого стержня по отношению к гибкому; $r_i$ — реакции (их приращения) от единичных перемещений.

Полученная матрица жесткости унифицированного конечного элемента и сам элемент применимы к расчету по деформированной схеме как шарнирно-стержневых и комбинированных систем, в том числе и геометрически изменяемых, так и только изгибаемых систем (жестких нитей, рам, ферм, рассматриваемых как рамы), а также систем с переменной расчетной схемой, получаемых путем включения ограждающих конструкций в совместную работу с несущими конструкциями. Для случаев, когда в жестком стержне есть начальные продольные силы, также можно пользоваться полученной матрицей жесткости без введения поправочных функций из теории устойчивости сооружений. Для этого необходимо только, чтобы характеристический параметр $\nu^2 = Nl^2/(EJ)$ был меньше единицы, что всегда возможно сделать, увеличивая число конечных элементов за счет уменьшения длины.

Изложенное выше может быть распространено на задачи динамики и устойчивости рассматриваемых систем. Что касается систем с существенной геометрической нелинейностью, то их расчет можно вести на основе вышеизложенного любым шаговым методом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сидорович Е.М. Расчет шарнирно-стержневых систем произвольной структуры по деформированной схеме. — Изв. вузов: Стр-во и архитектура, 1975, № 2, с. 49—53. 2. Сидорович Е.М. Гармонические колебания геометрически нелинейных шарнирно-стержневых систем. — В кн.: Строительные конструкции и теория сооружений. Минск: БПИ, 1977, вып. 2, с. 147—153. 3. Сидорович Е.М. Расчет сооружений по деформированной схеме и асимптотические свойства получаемых решений. — В кн.: Вопросы строительства и архитектуры: Строительные конструкции и теория сооружений. Минск: Выш.шк., 1977, вып. VII, вып. 3, с. 153—159.

*УДК 624.04*

Б.П.СОЛОДОВ,
Т.А.АНДРУШЕВИЧ (БПИ)

# СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФЕРМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Рассматривается задача расчета статически определимых и неопределимых ферм с учетом геометрической и физической нелинейности на однократное загружение системой статически приложенных внешних сил. Предусматривается линейно-упругая, нелинейно-упругая и упруго-пластическая работа материала. Предполагается, что в процессе загружения ферм во всех стержнях значения усилий изменяются монотонно даже после того, как в некоторых из них возникнут пластические деформации, т.е. нагрузка вызывает только активные деформации элементов. Зависимость между напряжением и относительной деформацией может быть задана аналитически или в табличной форме. Для вычисления усилий в элементах фермы и перемещений ее узлов предлагается использовать метод перемещений в алгоритмической форме, что позволяет решать задачу практически с любой точностью без вывода громоздких аналитических выражений при записи уравнений равновесия. Используемый алгоритмический подход ранее был предложен для статического расчета вантовых комбинированных систем с учетом только геометрической нелинейности в работе [1]. Суть его применительно к расчету ферм с учетом как геометрической, так и физической нели-