

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.072.046.3

АЛЯВДИН П.В., канд. техн. наук,
МУРАШКО В.П. (БПИ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Рассматривается задача определения предельной несущей способности геометрически нелинейной упругоидеальнопластической стержневой системы при повторно-переменном приложении внешней нагрузки. Условия приспособляемости конструкции обеспечиваются статической теоремой Мелана [1]. Оптимизация геометрически линейных упругопластических систем изучалась ранее в многочисленных работах, например в [2]. Влияние больших перемещений на предельную нагрузку с других позиций анализировалось в статье [3].

Конструкция находится под действием конечного множества независимых загрузений, пропорциональных параметру P , значение которого изменяется произвольно на отрезке $(0, P]$, $P > 0$. Во множество воздействий входит и нулевая нагрузка, соответствующая состоянию самонапряжения. Эти загрузки задаются нормами проектирования или определяются как невыгодные из класса силовых и других воздействий на конструкцию. Стержневая система моделируется совокупностью конечных элементов в виде стержней, соединенных в узлах. В качестве независимых переменных состояния принимаются перемещения узлов.

Задача оптимизации формулируется следующим образом. Найти максимальное значение параметра нагрузки

$$P \longrightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях по приспособляемости расчетных сечений

$$\xi_{ij}^{1,2} = (\sigma_T \mp \sigma^e(Z) \mp \sigma^r(\Delta) \mp \sigma_{\text{ост}})_{ij} \geq 0, \quad (2)$$

при ограничениях перемещений и (или) деформаций

$$Y^P + A^Z Z + A^\Delta \Delta \leq Y^d \quad (3)$$

и уравнениях состояния устойчивой прочности системы

$$r^Z Z + r^\Delta \Delta + R = 0, \quad (4)$$

где $\xi_{ij}^{1,2}$ — векторы запасов по приспособляемости сверху и снизу (индексы 1 и 2 соответственно); $i \in [1: I]$; I — количество расчетных сечений; $j \in [1: J]$; J — количество независимых нагружений; σ_T — предел текучести материала; $\sigma^e(Z)$ — вектор экстремальных напряжений в сечениях, определенных в предположении неограниченной упругости материала; $\sigma^e = \sigma^Z Z + \sigma^P$; σ^Z и σ^P — матрица и вектор напряжений в системе с закрепленными узлами; $\sigma^T(\Delta)$, $\sigma_{ост}$ — остаточные напряжения, обусловленные статической неопределимостью конструкции и сечений соответственно; Z — неизвестные уравнений состояния; $Z \in E_n$; n — степень кинематической неопределимости; A^Z , A^Δ — матрицы перемещений и (или) деформаций расчетных сечений в системе с закрепленными узлами от единичных значений Z и Δ соответственно; Y^P , Y^Δ — векторы аналогичных перемещений и (или) деформаций от внешней нагрузки и их предельных значений. Матрицы A^Z , A^Δ , r^Z , r^Δ и векторы Y^P , R вычисляются с учетом продольно-поперечного изгиба стержней по известным зависимостям [4, 5, 6]. Напряжения в матрице σ^Δ и в векторе σ^e выражаются через внутренние усилия M , N как функции перемещений Z и начальных смещений Δ в соответствии с технической теорией стержней. Влияние касательных напряжений в формулировке (1)–(4) может учитываться в соответствии с теорией Мизеса.

Согласно статической теореме Мелана, приспособляемость конструкции при фиксированном значении параметра нагрузки P обеспечена, если существует такое поле остаточных напряжений:

$$\sigma^T = \sigma^\Delta \Delta, \Delta \in E_k,$$

определяемых k независимыми параметрами Δ , которое удовлетворяет условиям (2)–(4). Здесь k — степень статической неопределимости. Элементы вектора Δ можно трактовать как начальные смещения, например вращения, происшедшие в пластических шарнирах при нагружении системы. Для получения линейно независимых столбцов матрицы σ^Δ необходимо, чтобы статически определимая система без удаленных связей, вдоль которых прикладываются начальные смещения Δ , была геометрически неизменяемой. Таким образом, для утверждения о допустимости σ^e необходимо установить, что множество параметров самонапряжений $\Omega \subset E_k$, определяемое условиями (2)–(4), не пусто.

Численное решение задачи (1)–(4) в напряжениях можно осуществить с помощью ее дискретизации путем выделения в плоскости изгиба стержня расчетных точек по высоте сечения. Однако такой метод требует решения задачи нелинейного математического программирования большой размерности. Для сокращения числа

переменных перейдем к обобщенным внутренним усилиям в сечениях сжато-изогнутого стержня, тогда линейные неравенства (2) станут нелинейными относительно M, N [7,8]. Их с требуемой точностью можно линеаризовать

$$a_t m + b_t n + c_t \leq 0, \quad t \in [1 : T], \quad (5)$$

где a_t, b_t, c_t — коэффициенты аппроксимации; T — количество аппроксимирующих прямых, обычно небольшое. Тогда задача оптимизации предельной нагрузки (1), (3), (4), (5) будет содержать нелинейность, обусловленную только влиянием продольных сил N в стержнях. При фиксированном параметре нагрузки P и продольных силах N условия (3), (4), (5), определяющие приспособляемость системы, станут линейными. Поэтому решение задачи целесообразно производить итерационным методом, последовательно увеличивая параметр P малыми шагами ΔP и в пределах каждого шага решая задачу линейного программирования.

Предлагаемый алгоритм сводится, таким образом, к следующему. Вначале принимается некоторое малое значение параметра нагрузки $P, P > 0$. Затем на s -м шаге формируются векторы m_{js}^P, n_{js}^P и матрицы $m_{js}^Z, n_{js}^Z, m_{js}^\Delta, n_{js}^\Delta$ при фиксированных значениях продольных сил $n_{js} = n_{j(s-1)}(m_{j(s-1)} + \Delta P_s n_{js}^E),$ где $n_{js}^E = (n_{j(s-1)} - n_{j(s-2)})/\Delta P_{s-1}$; остальные обозначения и индексы аналогичны использованным выше для напряжений. Далее рассматривается задача гарантированной оптимизации запасов конструкции по приспособляемости $\forall t \in [1 : T] :$

$$\begin{aligned} \max_{i \in [1 : I], j \in [1 : J]} & (a m_{ij}^P + b n_{ij}^P + (a m_{ij}^Z + b n_{ij}^Z) Z + \\ & + (a m_{ij}^\Delta + b n_{ij}^\Delta) \Delta + c) \longrightarrow \min_{Z \in E_n, \Delta \in E_k} \end{aligned} \quad (6)$$

при выполнении ограничений (3), (4). Ее решение осуществляется методом линейного программирования с использованием алго-процедуры [9], реализованной на ЕС ЭВМ. После определения вектора Δ производится уточнение n_{js} и повторное решение задачи (6). При достаточно малом приращении параметра ΔP уточнения усилий n_{js} не требуется.

Увеличение значения параметра нагрузки P производится до тех пор, пока не нарушается совместность ограничений (3), (4), (5), а значение задачи (6) не обращается в нуль. При этом на каждом шаге уточняются координаты узлов конструкции и корректируются элементы матрицы уравнений состояния системы (4) и их свободные члены. Кроме того, контролируется монотонность возрастания перемещений конструкции при увеличении параметра P , что характеризует устойчивое состояние системы.

Данная однопараметрическая задача определения предельной нагрузки P допускает естественное обобщение на случай многопараметрической нагрузки, оптимизация которой производится аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о й т е р В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М.: Изд-во иностр.лит., 1961. — 79 с. 2. К р ы ж а н о в с к и й В.П., Л а н т у х Л.Г., П е р е л ь м у т е р А.В. О расчете упругопластических конструкций при повторно-переменном нагружении. — В кн.: Материалы по металлическим конструкциям. М.: Стройиздат, 1972, вып. 16, с. 67—71. 3. Т и м о ф е е в В.И. К определению предельной прогрессивной нагрузки. — В кн.: Строительная механика: Межвуз. темат. сб. тр. Л.: Изд-во Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1977, № 2 (128), с. 106—113. 4. К о р н о у х о в Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем. — М.: Госстройиздат, 1949. — 376 с. 5. К л е м п е р т Ю.З., П а р и к о в В.Н., С л и в к е р В.И. О процедуре вычисления матрицы жесткости призматического стержня. — В кн.: Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат, 1974, вып. 16, с. 179—190. 6. З ы л е в В.Б., С о л о в ь е в Г.П. Расчет стержневой системы на большие прогибы методом конечных элементов. — В кн.: Расчет транспортных и строительных конструкций с применением ЭВМ: Тр. ин-тов инж. ж.-д. трансп. М.: Моск. ин-т инж.трансп., 1981, вып. 656, с. 95—101. 7. Г о х ф е л ь д Д.А., Ч е р н я в с к и й О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. — М.: Машиностроение, 1979. — 263 с. 8. Г е м м е р л и н г А.В. Расчет стержневых систем. — М.: Стройиздат, 1974. — 208 с. 9. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач/Под ред. В.Ф.Демьянова, В.Н.Малоземова. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 192 с.

УДК 624.072.21/23

А.И.АРЕСТОВИЧ (БПИ)

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО РАСХОДУ МАТЕРИАЛА ФЕРМ С УЧЕТОМ НАДЕЖНОСТИ

В статье исследуются вопросы оптимизации фермы с позиций надежности. Рассматривается задача оптимизации шарнирно-стержневой системы с учетом надежности [1]. В качестве случайных величин, входящих в математическую модель оптимизируемой системы, выступают прочность материала, с одной стороны, и напряжения в стержнях — с другой. На основании центральной предельной теоремы можно полагать, что напряжения в элементах системы подчиняются нормальному закону распределения, поскольку на них влияют многие взаимно независимые случайные факторы, например погибы, отклонения в размерах, отклонения в значении и местах приложения нагрузки, в расположении опорных закреплений, в их податливости и т.д. Принимаем, что прочность также имеет нормальное распределение. Оптимизируемой функцией является