

Белорусский национальный технический университет
Строительный факультет
Кафедра «Геотехника и строительная механика»

Согласовано
Заведующий кафедрой

_____ Т.М. Уласик

«__» _____ 2025 г.

Согласовано
Декан факультета

_____ С.Н. Ковшар

«__» _____ 2025 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
по учебной дисциплине

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

для студентов специальности
7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»

Составитель: Уласик Т.М.

Рассмотрено и утверждено на
на заседании Совета строительного факультета « 24 » февраля 2025 г.
протокол № 6

Перечень материалов

1. Теоретический раздел: конспект лекций;
2. Практический раздел:
 - Лабораторная работа № 1 «Основы работы с матрицами»;
 - Лабораторная работа № 2 «Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса»;
 - Лабораторная работа № 3 «Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами»;
 - Лабораторная работа № 4 «Нахождение наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора квадратной матрицы»;
 - Лабораторная работа № 5 «Решение задачи Коши методами Рунге-Кутты»;
 - Лабораторная работа № 6 «Решение краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений методом конечных разностей»;
 - Лабораторная работа № 7 «Численные методы оптимизации. Графический метод решения задач линейного программирования»;
 - Лабораторная работа № 8 «Симплекс-метод решения задач линейного программирования»;
3. Контроль знаний: перечень вопросов для подготовки к экзамену;
4. Вспомогательный раздел: учебная программа.

Пояснительная записка

Целью изучения дисциплины «Численные методы решения задач» на основе электронного учебно-методического комплекса (ЭУМК) является формирование у студентов знаний о методах вычислительной математики, их реализации и в практическом применении в задачах исследовательского и прикладного характера.

Основной задачей ЭУМК являются систематизация знаний и навыков в области численных методов решения задач строительства и подготовке обучающихся к постановке и решению учебных и прикладных математических и инженерных задач.

ЭУМК представляет собой совокупность взаимосвязанных учебно-методических материалов. Теоретический раздел содержит конспект лекций, сформированный в соответствии с основными разделами и темами учебной программы дисциплины «Численные методы решения задач». Практический раздел содержит указания для выполнения восьми лабораторных работ по изучаемой дисциплине и индивидуальные задания. Раздел контроля знаний содержит перечень вопросов для подготовки к экзамену. Вспомогательный раздел содержит утвержденную учебную программу по дисциплине.

Предлагаемый ЭУМК по учебной дисциплине «Численные методы решения задач» направлен на повышение эффективности изучения дисциплины студентам дневной и заочной форм получения образования по специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	4
ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ.....	53
КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ	87
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ.....	89

Матрица размера $1 \times n$ называется вектором-строкой, а матрица размера $m \times 1$ – вектором-столбцом.

Если $m = n$ (число строк = числу столбцов), то такая матрица называется **квадратной матрицей**, а n – **порядком** матрицы.

Совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющем левый верхний угол с правым нижним, называется **главной диагональю** матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется **диагональной**.

Квадратная матрица n -го порядка, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

называется **единичной**. Для ее обозначения используется буква **E**.

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны 0:

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратные матрицы могут быть **симметричными** (элементы расположены симметрично относительно главной диагонали), **треугольными** (элементы, равные нулю, расположены ниже (выше) главной диагонали), **ленточными** (ненулевые элементы образуют «ленту», параллельную диагонали), **клеточными** (ненулевые элементы образуют подобие клеток).

Определителем n -го порядка называется число Δ , которое символически записывается с помощью квадратной таблицы

$$\Delta = \det|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

и вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 n = 1, \Delta &= |a_{11}| = a_{11}; \\
 n = 2, \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \\
 n = 3; \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Суммой (разностью) двух матриц **A** и **B** одинаковых размеров называется третья матрица **C** тех же размеров, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}.$$

Транспонирование матрицы – это замена строк столбцами и наоборот. Операция транспонирования часто используется для более удобной записи векторов. Например, вместо того, чтобы изображать вектор в виде

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

его удобнее представить как $\vec{x} = [1 \ 2 \ 3]^T$.

При **умножении (или делении)** произвольной матрицы на число, отличное от нуля, получается матрица тех же размеров, все элементы которой получены умножением (или делением) элементов исходной матрицы на это число.

Две матрицы **A** и **B** можно перемножить между собой и получить третью матрицу **C** только в том случае, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**. Результирующая матрица имеет число строк, как у матрицы **A**, а число столбцов – как у **B**: $\underset{m \times n}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n \times p}{\mathbf{B}} = \underset{m \times p}{\mathbf{C}}$.

Элементы результирующей матрицы **C** определяются по формуле $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$, т.е. элементы i -й строки матрицы **A** перемножаются на соответствующие элементы k -го столбца матрицы **B** и все результаты суммируются.

Матричное произведение в общем случае не обладает перестановочным свойством. Так, если матрицы **A** и **B** из только что рассмотренного примера перемножить в обратном порядке **B**·**A**, то результирующая матрица **D** будет совершенно иной, чем **C**. Очень часто произведение двух матриц вообще невозможно либо возможно только в

$$b_i \rightarrow B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad x_j \rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

В общем случае, для СЛАУ, в которой m уравнений и n неизвестных, имеем следующие случаи:

- при $m > n$ (число уравнений больше числа неизвестных) – решения СЛАУ не существует;
- при $m < n$ (число уравнений меньше числа неизвестных) – существует бесконечно много решений СЛАУ;
- при $m = n$ (число уравнений равно числа неизвестных) – существует единственное решение СЛАУ.

Нас интересует случай, когда $m = n$.

В дальнейшем будем рассматривать системы уравнений, в которых число уравнений m и число неизвестных n одинаково.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}. \quad (1.4)$$

Порядок СЛАУ определяется порядком матрицы \mathbf{A} (в дальнейшем будем рассматривать СЛАУ порядка ≥ 2).

Решением СЛАУ называется совокупность чисел x_i ($i = \overline{1, n}$), которые при подстановке во все n уравнений обращают их в тождество. Сами числа x_i называются **корнями** системы.

Система имеет **единственное** решение, если **определитель (детерминант) $\det \mathbf{A} \neq 0$** . Это условие является **необходимым** и **достаточным**. В противном случае (матрица **вырожденная**), СЛАУ либо не имеет решения, либо имеет их бесконечное множество.

Если $\det \mathbf{A} \approx 0$, система называется **плохо обусловленной**, поскольку погрешности определения коэффициентов матрицы \mathbf{A} приводят к значительным изменениям решения системы.

Если матрица \mathbf{B} представляет собой нулевую матрицу (все элементы равны нулю), то СЛАУ называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Тема 1.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Прямые методы решения СЛАУ

Такие методы (иногда их называют «точные» или «конечные») позволяют найти ответ за определенное число операций. Если коэффициенты и свободные члены СЛАУ известны точно и при этом все вычисления проводить без округления (в простых дробях), то решение получается точным за конечное число арифметических действий. Однако, вследствие погрешностей округления при решении задач с помощью вычислительной техники, прямые методы на самом деле не приводят к точному решению и назвать их точными можно, лишь отвлекаясь от вычислительной погрешности.

К достоинству таких этих методов относят простоту и универсальность, что применимо для решения многих классов линейных систем. Недостатками являются необходимость большого объема памяти компьютера для хранения матриц, накапливание погрешностей в процессе решения, большое число арифметических операций. Поэтому эти методы применяют обычно для решения хорошо обусловленных систем уравнений с порядком $n < 1000$.

К прямым методам относят метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Гаусса, метод LU-разложения и др.

Метод Гаусса

Пусть задана система линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

где $n \geq 2$.

В матричном виде исходную систему можно представить как $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Требуется найти решение этой системы, т.е. такие значения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n , которые при подстановке во все уравнения системы обращают их в тождества.

Метод Гаусса состоит из двух основных **этапов (ходов)**: 1) прямого хода; 2) обратного хода.

Цель прямого хода – преобразовать заданную систему к верхнему (или нижнему) треугольному виду. Это означает, что первое уравнение новой системы сохранит свой прежний вид. Из второго уравнения исключается

неизвестное x_1 , из третьего – x_1 и x_2 и т.д. Таким образом, последнее уравнение будет содержать только одно неизвестное x_n .

Цель обратного хода – непосредственно определить значения неизвестных, причем вначале определяется x_n , затем x_{n-1}, \dots, x_1 .

Прямой ход. Чтобы исключить x_1 из второго уравнения, найдем множитель

$$m = a_{21} / a_{11}$$

(предполагаем, что коэффициент a_{11} , который в методе Гаусса называется первым ведущим элементом, отличен от нуля). Затем первое уравнение системы умножим на полученный множитель и почленно вычтем из второго уравнения. При этом его коэффициенты и свободный член получают новые значения:

$$a_{21}^{(1)} = a_{21} - a_{11} \cdot m = a_{21} - a_{11} \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{12} \cdot m$$

.....

$$a_{2n}^{(1)} = a_{2n} - a_{1n} \cdot m$$

$$b_2^{(1)} = b_2 - b_1 \cdot m.$$

В результате получили, что во втором уравнении отсутствует x_1 .

Чтобы исключить x_1 из третьего и последующих уравнений, надо найти множители

$$m = a_{31}/a_{11}, \dots, m = a_{n1}/a_{11},$$

умножить на них все то же первое уравнение и почленно вычесть его из третьего и последующих уравнений.

В результате всех этих действий исходная система примет вид

$$\underline{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\underline{a_{22}^{(1)}}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

.....

$$a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + \underline{a_{nn}^{(1)}}x_n = b_n^{(1)},$$

где первый и второй ведущие элементы специально выделены.

Переходим к исключению x_2 из третьего и последующих уравнений, полагая, что второй ведущий элемент $a_{22}^{(1)}$ не равен нулю. Находя множители

$$m = a_{32}^{(1)} / a_{32}^{(1)}, \dots, m = a_{n2}^{(1)} / a_{22}^{(1)},$$

умножаем на них (поочередно) второе уравнение и почленно вычитаем из третьего, ..., n -го уравнений.

Аналогично проводится исключение x_3, \dots, x_{n-1} .

Все действия, направленные на исключение неизвестного x_i из j -го уравнения, можно представить тремя формулами:

$$\begin{aligned} m &= a_{ji}^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)} \\ a_{jl}^{(i)} &= a_{jl}^{(i-1)} - a_{il}^{(i-1)} \cdot m \quad (l = i+1, \dots, n), \\ b_j^{(i)} &= b_j^{(i-1)} - b_i^{(i-1)} \cdot m. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вычисления по второму выражению в формуле (1.5) следовало бы начать со значения l , равного не $i+1$, а i . Но получаемая при этом величина $a_{ji}^{(i)}$ заведомо равна нулю (как, например, $a_{21}^{(1)}$ при исключении x_1 из второго уравнения). Такие величины в последующем решении не участвуют, и тратить время на их нахождение не следует.

Проведя вычисления по формулам (1.5) при изменении i от 1 до $n-1$, а j от $i+1$ до n , получим систему верхнего треугольного вида

$$\begin{aligned} \underline{a_{11}}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \underline{a_{22}^{(1)}}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{a_{nn}^{(n-1)}}x_n &= b_n^{(n-1)}, \end{aligned}$$

в которой ни один из ведущих элементов не должен быть равен нулю.

Обратный ход. В последнее уравнение входит только одно неизвестное x_n . Поэтому оно определится как

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}. \quad (1.6)$$

Предпоследнее уравнение преобразованной системы имеет вид

$$a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n = b_{n-1}^{(n-2)}.$$

Подставляя в него найденное значение x_n , получим

$$x_{n-1} = (b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n) / a_{n-1,n-1}^{(n-2)}.$$

Продолжая этот процесс, достигнем первого уравнения, из которого

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) / a_{11}.$$

Все действия, совершаемые на обратном ходе при определении $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$, можно описать одной формулой

$$x_i = \left(b_i^{(i-1)} - \sum_{s=i+1}^n a_{is}^{(i-1)} x_s \right) / a_{ii}^{(i-1)}, \quad (1.7)$$

где $i = n-1, \dots, 1$.

После завершения обратного хода найденные значения x_1, x_2, \dots, x_n надо подставить во все уравнения исходной системы, чтобы убедиться в том, что они обращаются в тождества и что x_1, x_2, \dots, x_n образуют решение.

Примечания.

1. Решая систему методом Гаусса, надо следить за тем, чтобы какой-нибудь ведущий элемент не оказался равным нулю, так как деление на нуль невозможно, а именно в операции деления и участвуют ведущие элементы. Нулевой ведущий элемент может появиться в двух случаях. Во-первых, когда система вырожденная, т.е. когда ее определитель равен нулю. В этом случае решение вообще не существует либо имеется множество решений. Исследованием этого вопроса мы заниматься не будем, полагая, что все решаемые системы являются невырожденными. Во-вторых, заданная система, будучи невырожденной, может иметь коэффициент $a_{11} = 0$.

2. Описанный формулами (1.5) – (1.7) алгоритм можно обобщить на случай решения системы с k правыми частями. В этом случае свободные члены и неизвестные имеют два индекса и образуют матрицы (массивы) с размерами $n \times k$. Третья из формул (1.5), а также формулы (1.6) и (1.7) теперь будут выглядеть так:

$$\begin{aligned} b_{jl}^{(i)} &= b_{jl}^{(i-1)} - b_{il}^{(i-1)} \cdot m \\ x_{nl} &= b_{nl}^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)} \\ x_{il} &= (b_{il}^{(i-1)} - \sum_{s=i+1}^n a_{is}^{(i-1)} x_{sl}) / a_{ii}^{(i-1)}, \end{aligned}$$

где $l = 1, \dots, k$.

Вычисление определителя методом Гаусса

Определитель исходной матрицы \mathbf{A} можно вычислить используя следующую формулу:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} = \prod_{i=1}^n a_{ii}^{(i-1)},$$

т.е. $\det \mathbf{A}$ равен произведению n ведущих элементов.

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса

Исходя из определения обратной матрицы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ и используя для наглядности обозначение $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений вида $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$, решение которой и будут составлять элементы обратной матрицы.

Метод LU разложения

Задана система линейных алгебраических уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Матрицу \mathbf{A} представим в виде произведения двух новых матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Тогда исходную СЛАУ можно записать в виде $\mathbf{LUX} = \mathbf{B}$ и представить в виде совокупности систем

$$\begin{aligned} \mathbf{LY} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{UX} &= \mathbf{Y}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Матрицы \mathbf{L} и \mathbf{U} имеют следующий вид (для СЛАУ 3 порядка):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \text{ — нижняя треугольная матрица;}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \text{ — верхняя треугольная матрица.}$$

Идея метода заключается в нахождении элементов матриц \mathbf{L} и \mathbf{U} , подстановке их в выражение (1.1.8) и в последовательном нахождении элементов матриц \mathbf{Y} (выступает в роли вспомогательной) и \mathbf{X} .

Итерационные методы решения СЛАУ

Такая группа методов (иногда называют методы «последовательных приближений») основана на использовании повторяющегося (циклического) процесса и позволяет получить решение в результате выполнения последовательных приближений. Эти методы требуют задания некоторого начального приближения. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют итерацию. Итерации продолжаются до получения решения с

заранее заданной точностью. То есть, по своей сути, эти методы являются приближенными, однако при вычислениях на компьютере погрешность полученного результата можно сделать меньшей, чем в случае использования прямых методов. Кроме того, итерационные методы могут использоваться для уточнения решения, полученного прямыми методами.

К итерационным методам относят: метод простой итерации (Якоби), метод ускоренных итераций (Гаусса-Зейделя), метод релаксации и др.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений n -го порядка

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Метод Гаусса предъявляет к решаемой системе единственное требование: она должна быть невырожденной. Для итерационных методов этого требования недостаточно, и они выдвигают дополнительное условие, которое называется **условием сходимости**.

Будем использовать «достаточное» условие сходимости. Оно называется **условием диагонального преобладания** и формулируется следующим образом: для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модуль диагонального элемента матрицы **A** был больше суммы модулей остальных элементов матрицы **A** в каждой строке:

$$\begin{aligned} |a_{11}| &> |a_{12}| + \dots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| &> |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}| \\ \dots\dots\dots \\ |a_{nn}| &> |a_{n1}| + \dots + |a_{n,n-1}|. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В отдельных случаях допускается строгое равенство.

В математике имеется строгое доказательство того факта, что условие диагонального преобладания поглощает собой свойство невырожденности системы. Это значит, что если диагональные коэффициенты доминируют в каждом уравнении системы, то ее определитель отличен от нуля. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Итак, **первым этапом** в решении системы уравнений (1.9) итерационным методом является проверка условия диагонального преобладания (1.10).

Если это условие выполняется, переходят ко **второму** этапу – преобразованию системы к виду, удобному для проведения итераций. Такое преобразование может быть выполнено бесконечно большим числом

способов. Наиболее просто это делается путем разрешения первого уравнения относительно x_1 , второго – относительно x_2 и т.д.

Получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 \dots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - c_{12}x_2 - \dots - c_{1n}x_n \\ x_2 &= d_2 - c_{21}x_1 - c_{23}x_3 - \dots - c_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= d_n - c_{n1}x_1 - \dots - c_{n,n-1}x_{n-1}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$d_i = b_i / a_{ii}, c_{ij} = a_{ij} / a_{ii} \quad (j \neq i), \quad c_{ii} = 0. \tag{1.12}$$

Система уравнений, приведенная к виду (1.11), называется **нормальной**.

На **третьем** этапе необходимо задать начальные значения неизвестных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, которые называются также **начальным приближением**.

Наиболее часто используются два варианта задания начальных значений:

1) $x_i^{(0)} = 0$; 2) $x_i^{(0)} = d_i$, где $i = 1, \dots, n$. Однако итерационный процесс сходится к одним и тем же значениям неизвестных при задании в качестве начального приближения любых чисел, если выполняется условие сходимости.

На **четвертом** этапе строится итерационный процесс, состоящий в том, чтобы от взятых величин $x_i^{(0)}$ последовательными однотипными шагами (итерациями) приблизиться к истинным значениям x_i . Причем на первой итерации ($k = 1$), используя начальные значения, находят первое приближение $x_i^{(1)}$, на второй итерации ($k = 2$) – второе приближение и т.д.

Метод простой итерации (Якоби)

Для вычисления $x_i^{(1)}$ в методе простой итерации начальные значения подставляют в правые части всех уравнений нормальной системы (1.11):

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= d_1 - c_{12}x_2^{(0)} - \dots - c_{1n}x_n^{(0)} \\x_2^{(1)} &= d_2 - c_{21}x_1^{(0)} - c_{23}x_3^{(0)} - \dots - c_{2n}x_n^{(0)} \\&\dots\dots\dots \\x_n^{(1)} &= d_n - c_{n1}x_1^{(0)} - \dots - c_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}.\end{aligned}$$

Соответственно, для получения второго приближения $x_i^{(2)}$ в правые части нормальной системы надо подставить первое приближение:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= d_1 - c_{12}x_2^{(1)} - \dots - c_{1n}x_n^{(1)} \\x_2^{(2)} &= d_2 - c_{21}x_1^{(1)} - c_{23}x_3^{(1)} - \dots - c_{2n}x_n^{(1)} \\&\dots\dots\dots \\x_n^{(2)} &= d_n - c_{n1}x_1^{(1)} - \dots - c_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}.\end{aligned}$$

На k -й итерации ($k \geq 1$) находится k -е приближение $x_i^{(k)}$:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= d_1 - c_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - c_{1n}x_n^{(k-1)} \\x_2^{(k)} &= d_2 - c_{21}x_1^{(k-1)} - c_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - c_{2n}x_n^{(k-1)} \\&\dots\dots\dots \\x_n^{(k)} &= d_n - c_{n1}x_1^{(k-1)} - \dots - c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k-1)}.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Метод ускоренных итераций (Гаусса-Зейделя)

Является модификацией метода простой итерации и отличается от последнего только способом вычисления приближений:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)} &= d_1 - c_{12}x_2^{(k-1)} - \dots - c_{1n}x_n^{(k-1)} \\x_2^{(k)} &= d_2 - c_{21}x_1^{(k)} - c_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - c_{2n}x_n^{(k-1)} \\&\dots\dots\dots \\x_n^{(k)} &= d_n - c_{n1}x_1^{(k)} - \dots - c_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Это значит, что $x_1^{(k)}$ находится так же, как и в методе простой итерации, т.е. в правую часть первого уравнения вместо x_2, \dots, x_n подставляются значения $x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$, полученные на предыдущей, $(k-1)$ -ой итерации. При вычислении $x_2^{(k)}$ в правую часть вместо x_1 подставляется только что найденное значение $x_1^{(k)}$, а величины x_3, \dots, x_n берутся из предыдущей, $(k-1)$ -ой итерации.

Можно сказать, что в методе ускоренных итераций значение $x_i^{(k)}$ используются для определения всех последующих величин $x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ на той же k -ой итерации.

Примечания.

1. На первых итерациях изменение величин $x_i^{(k)}$ носит, как правило, хаотичный характер. Однако постепенно их значения стабилизируются: сначала устанавливается правильный знак числа, затем появляется и начинает повторяться первая правильная цифра, затем вторая и т.д. Это свидетельствует о том, что итерационный процесс сходится. Причем сходится независимо от того, с какого начального приближения он начинался.

2. Процесс вычислений по формулам (1.13) и (1.14) является в принципе бесконечным. И остановить его надо в тот момент, когда будет получено решение с наперед заданной точностью (m верных значащих цифр). Необходимое число итераций зависит не только от требуемой точности результата, но и от свойств самой системы (большей или меньшей степени выраженности ее диагонального преобладания, порядка), а также величины свободных членов и начальных значений неизвестных.

Если система невысокого порядка решается с использованием калькулятора с последовательной записью на бумаге всех значений $x_i^{(k)}$, то имеется возможность в процессе решения наблюдать за их поведением. При этом легко обнаруживается тот момент, когда все неизвестные в двух соседних итерациях совпадают друг с другом до $m + 1$ верных значащих цифр. Тогда, округлив $x_i^{(k)}$ до m цифр, гарантировано получают результат требуемой точности.

При счете на компьютере следить визуально за ходом вычислений практически невозможно. Поэтому на каждой итерации надо выполнять проверку

$$\left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (1.15)$$

где ε – некоторое малое, наперед заданное число. Вычислительный процесс прекращается, если условие (1.15) выполняется для всех i от 1 до n . Это условие не срабатывает в одном случае, а именно, когда $x_i^{(k)}$ окажется равным нулю. Чтобы предупредить этот случай, представим (1.15) в виде

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon \left| x_i^{(k)} \right|,$$

а затем добавим к правой части малую величину ε :

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon \left| x_i^{(k)} \right| + \varepsilon. \quad (1.16)$$

Это условие будет «работать» при любом $x_i^{(k)}$. В частности, при $x_i^{(k)} = 0$ оно вырождается в следующее:

$$|x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon.$$

Что касается величины ε , то для получения результата с m верными значащими цифрами надо принять ε не более, чем $5 \cdot 10^{-(m+2)}$.

3. Немедленный ввод в вычисления найденного на этой же итерации значения неизвестного, как это предусматривает формула (1.14), приводит к ускорению сходимости. В связи с этим метод ускоренных итераций требует, как правило, меньшего числа итераций для получения результата той же точности.

4. Если попытаться решать итерационными методами систему, не имеющую диагонального преобладания, то вычислительный процесс будет, как правило, расходящимся. Это значит, что с увеличением номера итерации значения неизвестных не стабилизируются, а неограниченно возрастают со знаком плюс, или минус, или с переменной знака.

5. Область применения итерационных методов – решение, главным образом, систем с диагональным преобладанием. Это недостаток итерационных методов, причем довольно существенный. Хотя в расчетной практике такие системы встречаются довольно часто. Однако эти методы имеют и преимущества. Например, они, в отличие от прямых методов, дают результаты заданной точности. Поэтому итерационные методы можно использовать для уточнения решения, полученного прямыми методами (при этом значения неизвестных, найденные прямым методом, берутся в качестве начального приближения для итерационного уточнения).

Раздел II. Собственные значения и собственные вектора матрицы

Тема 2.1. Полная и частичная проблема собственных значений

Задача на нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы формулируется следующим образом:

$$\mathbf{A}\vec{X} = \lambda\vec{X}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{A} – некоторая квадратная матрицы порядка n ; λ – некоторое число, называемое **собственным** значением; \vec{X} – ненулевой вектор размерности $n \times 1$, удовлетворяющий такому соотношению. Такой вектор называется **собственным** вектором.

Возникает вопрос – как определить λ и \vec{X} . Соотношение (2.1) равносильно следующему равенству

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\vec{X} = 0. \quad (2.2)$$

Такая система называется **однородной**.

Если $\vec{X} = 0$, то равенство выполняется. Такое решение называется **тривиальным**.

Ненулевое решение будет в случае, когда матрица $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ вырожденная, т.е. когда ее определитель $\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$.

Матрица $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ называется **характеристической**. Распишем ее на примере матрицы третьего порядка

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix}$$

Определитель такой матрицы называется **характеристическим**.

В развернутом виде определитель матрицы является многочленом n -ой степени от λ и называется **характеристическим многочленом (полиномом)**. Корни этого многочлена λ называются **собственными (или характеристическими)** значениями матрицы \mathbf{A} .

В общем случае найденных значений λ может быть несколько:

$$\lambda = \lambda^{(i)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Если каждое из этих значений $\lambda^{(i)}$ подставить в систему (2.2)

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda^{(i)} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} - \lambda^{(i)} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = 0,$$

то ненулевой вектор $\vec{X}^{(i)}$, удовлетворяющий такой системе, являются **собственным вектором**. Говорят, что собственный вектор **принадлежит (соответствует)** собственному значению $\lambda^{(i)}$.

Совокупность всех значений $\lambda^{(i)}$ называется **спектром матрицы**.

Расположив все собственные значения по возрастанию

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \leq \dots \leq \lambda^{(n)},$$

то среди этих чисел можно выделить:

$\max|\lambda^{(i)}| = \rho$ – максимальное по модулю собственное значение, называемое **спектральным радиусом**;

$\min|\lambda^{(i)}|$ – минимальное по модулю собственное значение.

Различают **две проблемы** собственных значений и собственных векторов матрицы: **полную** и **частичную**.

Если необходимо найти все собственные значения $\lambda^{(i)}$ (т.е. весь спектр), то это **полная** проблема. Если надо найти только какое-то одно значение $\lambda^{(i)}$, то это **частичная** проблема.

В общем случае, для любой заданной матрицы необходимо отыскать все собственные значения и все собственные вектора, им соответствующие.

Чаще всего такая задача является сложной и плохообусловленной. Собственные значения матрицы с действительными элементами могут быть вещественными и комплексными.

Практически полная проблема разрешима только для некоторых частных видов матриц: диагональной, треугольной, симметричной и т.д. и не слишком высокого порядка. Многие методы основаны на приведении матрицы общего вида к одному из такого типа матриц. Практически, полная проблема может быть успешно решена только для матриц ограниченных размеров. порядок которых не превышает несколько сотен.

На практике матрицы, которые часто встречаются в инженерных расчетах, являются симметричными. Для таких матриц есть важное свойство: для любой симметричной матрицы все собственные значения вещественные.

Симметричная матрица, у которой все собственные значения положительные, называется **положительно определенной**, а если все собственные значения отрицательные, то **отрицательно определенной**. Такие матрицы называют **знакопостоянными**. Если собственные значения принимают и положительные и отрицательные значения, то такая матрица называется **знаконеопределенной**.

Одним из методов определения всех собственных значений и собственных векторов матрицы является метод непосредственного разветвления: для этого необходимо составить характеристический полином и определить его корни

Для определения максимального или минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора используются итерационные методы: степенной и модифицированный степенной.

Степенной метод

Пусть задана квадратная матрица \mathbf{A} произвольного порядка n . Требуется решить для нее с заданной точностью частичную проблему собственных значений по определению λ_1 и \bar{x}_1 , т.е. такого числа λ_1 и такого вектора \bar{x}_1 , которые удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{A}\bar{x}_1 = \lambda_1\bar{x}_1 \quad (2.3)$$

(как известно, аналогичным соотношениям удовлетворяют второе и последующие собственные значения: $\mathbf{A}\bar{x}_2 = \lambda_2\bar{x}_2, \dots$).

Для решения этой задачи степенным итерационным методом нужно задаться начальным вектором $\bar{y}^{(0)}$ порядка n , имеющим произвольные, но ненулевые компоненты. Затем строится итерационный процесс

$$\bar{y}^{(k)} = \mathbf{A}\bar{y}^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots - \text{номера итераций}),$$

в результате которого образуется последовательность векторов

$$\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(1)} = \mathbf{A}\bar{y}^{(0)}, \bar{y}^{(2)} = \mathbf{A}\bar{y}^{(1)}, \dots$$

В ходе вычисления этих векторов можно находить все более уточняющееся значение λ_1 по формуле

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{y_s^{(k)}}{y_s^{(k-1)}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.4)$$

где $y_s^{(k)}$ – s -я (любая, $s = 1, \dots, n$) компонента вектора $\bar{y}^{(k)}$ на k -й итерации;

$y_s^{(k-1)}$ – соответствующая компонента вектора $\bar{y}^{(k-1)}$ на предыдущей итерации.

Что касается первого собственного вектора, то его k -е приближение можно брать как

$$\bar{x}_i^{(k)} = \bar{y}^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Для доказательства формул (2.4) и (2.5) разложим начальный вектор $\vec{y}^{(0)}$ по собственным векторам матрицы \mathbf{A}

$$\vec{y}^{(0)} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 + \dots + a_n \vec{x}_n, \quad (2.6)$$

где a_i ($i = 1, \dots, n$) – некоторые числа, причем $a_1 \neq 0$.

Тогда

$$\vec{y}^{(1)} = \mathbf{A}\vec{y}^{(0)} = a_1 \mathbf{A}\vec{x}_1 + a_2 \mathbf{A}\vec{x}_2 + \dots + a_n \mathbf{A}\vec{x}_n.$$

В соответствии с определением собственных значений и собственных векторов

$$\mathbf{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1, \quad \mathbf{A}\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{A}\vec{x}_n = \lambda_n \vec{x}_n. \quad (2.7)$$

Поэтому

$$\vec{y}^{(1)} = a_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + a_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + a_n \lambda_n \vec{x}_n.$$

Переходя ко второму вектору, получаем

$$\vec{y}^{(2)} = \mathbf{A}\vec{y}^{(1)} = a_1 \lambda_1 \mathbf{A}\vec{x}_1 + a_2 \lambda_2 \mathbf{A}\vec{x}_2 + \dots + a_n \lambda_n \mathbf{A}\vec{x}_n$$

или

$$\vec{y}^{(2)} = a_1 \lambda_1^2 \vec{x}_1 + a_2 \lambda_2^2 \vec{x}_2 + \dots + a_n \lambda_n^2 \vec{x}_n. \quad (2.8)$$

Теперь очевидно, что вектор $\vec{y}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) содержит в своем разложении собственные значения, возведенные в k -ю степень (отсюда и название рассматриваемого метода – степенной). Но поскольку λ_1 – наибольшее из всех n собственных значений матрицы, то доля первого слагаемого в разложениях (2.7), (2.8) с увеличением номера итерации будет все более возрастать. Это дает основание в записанных выше и последующих разложениях отбросить второе, третье, ..., n -е слагаемое, записав приближенные равенства:

$$\begin{aligned} \vec{y}^{(0)} &= a_1 \vec{x}_1, \\ \vec{y}^{(1)} &= a_1 \lambda_1 \vec{x}_1, \\ \vec{y}^{(2)} &= a_1 \lambda_1^2 \vec{x}_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Такие же зависимости справедливы и для отдельных компонентов входящих сюда векторов:

$$\begin{aligned} y_s^{(0)} &= a_1 x_{s1}, \\ y_s^{(1)} &= a_1 \lambda_1 x_{s1}, \\ y_s^{(2)} &= a_1 \lambda_1^2 x_{s1}, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

где s может принимать любое значение среди чисел $1, \dots, n$.

Разделив второе равенство на первое, получим λ_1 в первом приближении

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{y_s^{(1)}}{y_s^{(0)}}.$$

Чтобы получить второе приближение для λ_1 , нужно разделить третье равенство на второе:

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{y_s^{(2)}}{y_s^{(1)}}.$$

На любой k -й итерации имеем формулу (2.4).

Справедливость формулы (2.5) вытекает из приближенных равенств (2.9). При этом следует вспомнить, что собственный вектор остается таким же, будучи умноженным на любое число, отличное от нуля. Поскольку $a_1 \neq 0$, то на первой итерации за \vec{x}_1 можно взять вектор $a_1 \lambda_1 \vec{x}_1$ или \vec{y}_1 , на второй – $a_1 \lambda_1^2 \vec{x}_1$ или $\vec{y}^{(2)}$ и т.д.

Конечно, проводя вычисления по формулам (2.4) и (2.5), мы получим для λ_1 и \vec{x}_1 на первых итерациях самые немыслимые значения. Однако постепенно искомые величины будут стабилизироваться, пока не сойдутся с заданной точностью к своим истинным значениям, что можно проверить подстановкой в соотношение (2.3). Момент окончания счета определяется так же, как и в итерационных методах решения систем линейных алгебраических уравнений.

Степенной итерационный метод обладает рядом существенных недостатков:

1) если $|\lambda_1| > 1$ (как это имеет место в нашем примере), то с увеличением номера итерации k компоненты вектора $\vec{y}^{(k)}$ могут возрасти настолько, что превысят верхнюю границу области допустимых значений для

вещественных чисел и произойдет аварийная остановка программы при ее выполнении на компьютере;

2) если $|\lambda_1| < 1$, то с увеличением номера итерации k компоненты вектора $\bar{y}^{(k)}$ могут уменьшиться настолько, что они окажутся меньше нижней границы области допустимых значений для вещественных чисел и будут заменены машинным нулем, что означает потерю информации;

3) в ходе итерационного процесса компоненты вектора $\bar{y}^{(k)}$ могут менять знак;

4) сходимость процесса можно отслеживать не только по λ_1 . Между тем, компоненты собственного вектора могут иметь более медленную сходимость, что может быть установлено только при проверке результатов.

Модифицированный степенной метод

Существенные недостатки, присущие степенному итерационному методу, явились предпосылкой для внесения изменений в метод.

Самая простая модификация заключается в том, что последовательность векторов строится по формулам

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(0)} &= \frac{1}{y_s^{(0)}} \bar{y}^{(0)}, \\ \bar{y}^{(1)} &= \mathbf{A} \bar{x}^{(0)}, \quad \bar{x}^{(1)} = \frac{1}{y_s^{(1)}} \bar{y}^{(1)}, \\ \bar{y}^{(2)} &= \mathbf{A} \bar{x}^{(1)}, \quad \bar{x}^{(2)} = \frac{1}{y_s^{(2)}} \bar{y}^{(2)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Здесь $y_s^{(k)}$ – наибольшая по модулю компонента вектора $\bar{y}^{(k)}$. Это означает, что на каждой итерации выполняется нормирование вектора (деление его компонент на наибольшую по модулю компоненту). Такой нормированный вектор используется для нахождения следующего вектора $\bar{y}^{(k+1)}$.

При таком построении итерационного процесса формула (2.4) примет вид

$$\lambda_1^{(k)} = y_s^{(k)} / x_s^{(k-1)}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.10)$$

где $y_s^{(k)}$ – наибольшая по модулю компонента вектора $\bar{y}^{(k)}$, а $x_s^{(k-1)}$ – соответствующая компонента вектора $\bar{x}^{(k-1)}$.

На одной-двух первых итерациях номер s компоненты, имеющей наибольший модуль, может меняться. Дальше s устанавливается и сохраняет свое значение, после чего на всех итерациях $x_s^{(k-1)}$ будет равен единице и формула (2.10) упрощается:

$$\lambda_1^{(k)} = y_s^{(k)}, (k = 1, 2, \dots). \quad (2.11)$$

В качестве k -го приближения первого собственного вектора можно взять $\vec{x}^{(k)}$. Это будет нормированный вектор:

$$\vec{x}_1^{(k)} = \vec{x}^{(k)}, (k = 1, 2, \dots). \quad (2.12)$$

Можно построить и другой модифицированный степенной метод, нормируя компоненты вектора $\vec{y}^{(k)}$ путем их деления на длину вектора $|\vec{y}^{(k)}|$.

В этом случае строится последовательность векторов

$$\begin{aligned} \vec{y}^{(0)}, & \quad \vec{x}^{(0)} = \frac{1}{|\vec{y}^{(0)}|} \vec{y}^{(0)}, \\ \vec{y}^{(1)} = A \vec{x}^{(0)}, & \quad \vec{x}^{(1)} = \frac{1}{|\vec{y}^{(1)}|} \vec{y}^{(1)}, \\ \vec{y}^{(2)} = A \vec{x}^{(1)}, & \quad \vec{x}^{(2)} = \frac{1}{|\vec{y}^{(2)}|} \vec{y}^{(2)}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

При этом k -е приближение для первого собственного значения определяется по формуле

$$\lambda_1^{(k)} = (\vec{y}^{(k)}, \vec{x}^{(k-1)}), (k = 1, 2, \dots),$$

что означает скалярное произведение двух векторов

$$\lambda_1^{(k)} = \sum_{i=1}^n y_i^{(k)} x_i^{(k-1)}, (k = 1, 2, \dots). \quad (2.14)$$

k -е приближение для первого собственного вектора, нормированного к единице, находится как

$$\vec{x}_1^{**k} = \vec{x}^{(k)}, (k = 1, 2, \dots). \quad (2.15)$$

Для определения **минимального по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора**, необходимо сначала перейти от исходной матрицы к обратной, а затем применить или степенной или модифицированный степенной метод. Найденные для обратной матрицы максимальное по модулю собственное значение и собственный вектор будут

являться для исходной матрицы минимальным по модулю собственным значением и соответствующим ему собственным вектором.

Раздел III. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 3.1. Дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется уравнение, содержащее одну независимую переменную, искомую функцию и одну или несколько производных этой функции.

Например, $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$. Здесь x – независимая переменная, $y^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ – i -я производная неизвестной искомой функции $y(x)$; F – некоторая функция от переменных x, y, y', y'', \dots .

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком n входящей в уравнение производной.

Если в уравнении старшую производную выразить через производные более низкого порядка и независимую переменную, то получаются уравнения, **разрешенные относительно старшей производной**. Например, $y'''(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x))$.

Дифференциальные уравнения бывают линейные и нелинейные. **Линейным** называется уравнение, в котором неизвестная функция и ее производные входят в первой степени. Например, $y''(x) = 2xy(x) + x^2$. Остальные уравнения называются нелинейными.

Решением дифференциального уравнения называется произвольная функция $\varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение ОДУ n -го порядка содержит n произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n . **Частное решение** получается из общего путем задания определенных значений произвольным постоянным c_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Для выделения частного решения из общего нужно задать столько дополнительных условий, сколько произвольных постоянных содержится в общем решении, т.е. каков порядок дифференциального уравнения.

Для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в качестве дополнительных условий задаются значения искомой функции и ее производных при некоторых x . В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения различают два типа задач: **задача Коши** и **краевые задачи**.

Если дополнительные условия задаются в **начальной точке** x_0 , то такая постановка называется **задачей Коши**, а дополнительные условия – **начальными условиями**.

Для уравнения первого порядка задается одно начальное условие $y(x_0) = y_0$, т.е. начальное значение искомой функции.

Для уравнения второго порядка задаются два начальных условия $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$, т.е. начальное значение искомой функции и ее первой производной.

В общем случае для уравнения n -го порядка задаются:
 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Обычно задача Коши связана с изучением процессов, протекающих во времени (колебания строительных конструкций, процесс распределения тепла и т.д.). Поэтому аргумент в таких задачах (время) обозначается через t , а производные записываются с использованием точки.

Если дополнительные условия для ОДУ задаются в нескольких точках, то есть при разных независимой переменной x , то такая задача называется **краевой**, а дополнительные условия – **краевыми** или **граничными условиями**. Обычно граничные условия задаются в точках $x = a$ и $x = b$, являющихся границами области решения дифференциального уравнения.

Решение задачи Коши для одного ОДУ первого порядка

Пусть задана задача Коши

$$\dot{y} = f(t, y), y(t_0) = y_0.$$

Требуется решить ее численно, т.е. найти значения y_1, y_2, \dots при значениях аргумента t_1, t_2, \dots , отстоящих друг от друга на шаг Δt . Это означает, что

$$t_1 = t_0 + \Delta t; t_2 = t_1 + \Delta t, \dots$$

Существует много методов решения этой задачи, которые делятся на две группы – одношаговые и многошаговые. В одношаговых методах величина y_i определяется по информации, имеющейся в предыдущем узле $i - 1$. В многошаговых методах используется информация в k предыдущих узлах ($k \geq 2$). Точность многошаговых методов, как правило, выше.

Самым простым и исторически первым является **метод ломаных Леонардо Эйлера**. Вместе с тем, это и самый неточный метод (первый порядок точности). В нем очередное значение искомой функции определяется по формуле

$$y_i = y_{i-1} + k_{i-1}\Delta t, \tag{3.1}$$

где k_{i-1} – тангенс угла наклона касательной к графику искомой функции в точке (t_{i-1}, y_{i-1}) . Чтобы его определить, надо величины t_{i-1} и y_{i-1} подставить в правую часть решаемого уравнения соответственно вместо t и y , т.е.

$$k_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1}).$$

Геометрическая интерпретация метода показана на рисунке 3.1.

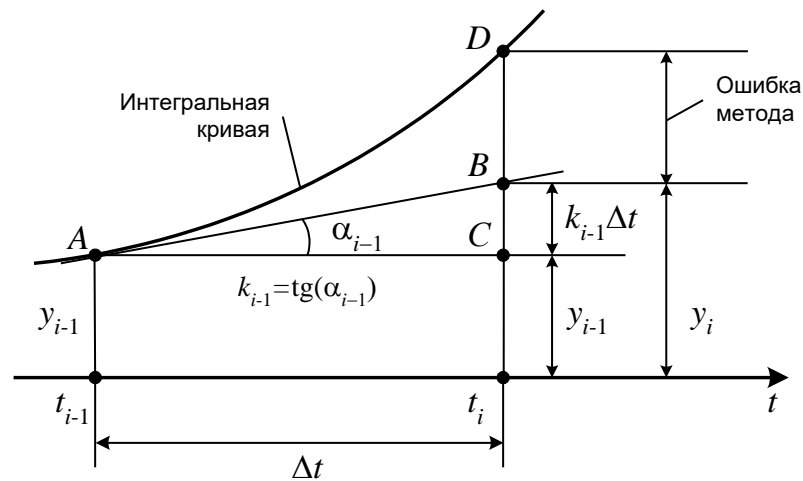


Рисунок 3.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

К интегральной кривой, проходящей через точку A с координатами t_{i-1} и y_{i-1} , проведена касательная AB . Тангенс угла наклона ее к горизонту α_{i-1} обозначен через k_{i-1} . Очередное значение искомой функции y_i складывается из предыдущего значения y_{i-1} и приращения BC , которое можно определить следующим образом:

$$|BC| = |AC| \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{i-1}) = k_{i-1} \cdot \Delta t.$$

Из рисунка видно, что найденное значение y_i отличается от истинного значения на величину BD , являющуюся ошибкой метода, и наряду с ошибкой округления делающую результат приближенным. Ошибки способны накапливаться, снижая точность решения с каждым шагом. Единственный способ повысить точность решения в методе Эйлера – уменьшить шаг.

В методе Эйлера с пересчетом (второй порядок точности) вначале делается пробный шаг в узел i , как и методе первого порядка

$$\begin{aligned} k_{i-1} &= f(t_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i^* &= y_{i-1} + k_{i-1} \cdot \Delta t. \end{aligned}$$

Затем находят тангенс угла α_i^* наклона касательной к интегральной кривой в точке (t_i, y_i^*)

$$k_i^* = f(t_i, y_i^*)$$

и определяют более точное значение искомой функции

$$y_i = y_{i-1} + 1/2 \cdot (k_{i-1} + k_i^*) \cdot \Delta t \quad (3.2)$$

(касательная из точки A проводится под углом, тангенс которого равен полусумме тангенсов k_{i-1} и k_i^*).

Решение задачи Коши для системы ОДУ первого порядка

Пусть задана задача Коши для системы n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, z, \dots), y(t_0) = y_0 \\ \dot{z} &= g(t, y, z, \dots), z(t_0) = z_0 \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где t – независимая переменная или аргумент; $y = y(t)$, $z = z(t)$, ... – искомые функции аргумента t .

Решая систему n дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, мы находимся в пространстве $(n + 1)$ измерений. Положение точки в таком пространстве определяется $(n + 1)$ числами – моментом времени t и значениями функций $y(t)$, $z(t)$, Через каждую точку пространства проходит n интегральных кривых $y = y(t)$, $z = z(t)$, К каждой из них можно провести свою касательную и определить тангенсы углов наклона через правые части соответствующих уравнений: $k = f(t, y, z, \dots)$, $l = g(t, y, z, \dots)$,

Получаем:

для метода Эйлера (метод первого порядка):

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + k_{i-1} \cdot \Delta t \\ z_i &= z_{i-1} + l_{i-1} \cdot \Delta t \quad (i = 1, 2, \dots) \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $k_{i-1} = f(t_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \dots)$ – тангенс угла наклона касательной к графику y в точке $(t_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \dots)$; $l_{i-1} = g(t_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, \dots)$ – то же к графику z .

для метода Эйлера с пересчетом (метод второго порядка):

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + 1/2 \cdot (k_{i-1} + k_i^*) \cdot \Delta t \\ z_i &= z_{i-1} + 1/2 \cdot (l_{i-1} + l_i^*) \cdot \Delta t, \quad (i = 1, 2, \dots) \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где k_{i-1} и l_{i-1} – то же, что и в формуле (3.4); $k_i^* = f(t_i, y_i^*, z_i^*, \dots)$ – тангенс угла наклона касательной к графику y в точке $(t_i, y_i^*, z_i^*, \dots)$, причем $y_i^* = y_{i-1} + k_{i-1} \cdot \Delta t$, $z_i^* = z_{i-1} + l_{i-1} \cdot \Delta t$; $l_i^* = g(t_i, y_i^*, z_i^*, \dots)$ – то же, что и k_i^* , но к графику z .

Результаты расчета по методам Эйлера приводят к значительной погрешности при расчетах. Чтобы минимизировать ошибку, немецкие математики К.Рунге и В.Кутта разработали целую гамму одношаговых методов, отличающихся порядком. Сюда входят: метод первого порядка

(совпадает с методом Эйлера), метод второго порядка (совпадает с методом Эйлера с пересчетом) и т.д. Чем выше порядок метода, тем точнее результат (при одном и том же шаге), но тем больше арифметических действий надо выполнить. В настоящее время широкое применение в расчетной практике получил метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Одна из реализаций метода Рунге-Кутты четвертого порядка имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}), \text{ где}$$

$$k_i^{(1)} = \Delta t \cdot f(t_i, y_i),$$

$$k_i^{(2)} = \Delta t \cdot f\left(t_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^{(1)}}{2}\right),$$

$$k_i^{(3)} = \Delta t \cdot f\left(t_{i+1/2}, y_i + \frac{k_i^{(2)}}{2}\right),$$

$$k_i^{(4)} = \Delta t \cdot f(t_{i+1}, y_i + k_i^{(3)}).$$

При решении ОДУ и их систем изложенные выше методы на каждом шаге вычислительного процесса дают некоторую погрешность, способную накапливаться и зависящую от порядка метода, величины шага, свойств самого решения. Поэтому возникает вопрос не просто о численном решении задачи Коши, а о получении результата заданной точности.

Существует несколько подходов к решению этой проблемы. Самый простой, но и самый трудоемкий подход состоит в следующем: пусть требуется получить решение для дифференциального уравнения на отрезке $[t_0, t_k]$ с m верными значащими цифрами. Разобьем отрезок $[t_0, t_k]$ на две части, найдем шаг $\Delta t = (t_k - t_0)/2$ и зафиксируем на отрезке узлы t_1 и $t_2 = t_k$. Решив затем задачу Коши выбранным методом, получим значения $y_1^{(0)}$ и $y_2^{(0)}$. После этого уменьшим шаг вдвое и, зафиксировав узлы $t_1, t_2, t_3, t_4 = t_k$, снова решим ту же задачу и получим значения $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)}$. Проверяем условие

$$|y_4^{(1)} - y_2^{(0)}| \leq \varepsilon |y_4^{(1)}| + \varepsilon.$$

Это означает, что относительное расхождение между решениями на конце отрезка сравнивается с малой величиной, которую можно взять, например, равной $5 \cdot 10^{-(m+1)}$, где m – требуемое количество значащих цифр. Если это условие выполняется, то решение $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}, y_4^{(1)}$ можно считать найденным. В противном случае, шаг Δt вновь уменьшается вдвое, из решения задачи находятся $y_1^{(2)}, \dots, y_8^{(2)}$ и проверяется условие $|y_8^{(2)} - y_4^{(1)}| \leq \varepsilon |y_8^{(2)}| + \varepsilon$ и т.д.

Тема 3.2. Дифференциальные уравнения с заданными краевыми условиями

Краевыми задачами называются такие задачи, в которых для решения линейных обыкновенного дифференциального уравнения дополнительные условия задаются при двух значениях независимой переменной на концах рассматриваемого участка. Конкретные краевые условия (иногда их называют граничные условия) выбираются из физической постановки задачи. Для одного ОДУ первого порядка краевую задачу поставить нельзя, так как в этом случае для выделения частного решения требуется только одно дополнительное условие, а в краевой задаче два конца, и, следовательно, минимальное количество дополнительных условий равно двум. Т.е., краевую задачу можно сформулировать только для дифференциальных уравнений второго и старшего порядков.

Для уравнений второго порядка возможны следующие простейшие варианты краевых условий: 1) на двух концах отрезка задаются значения искомой функции; 2) на одном из концов отрезка задается значение искомой функции, на втором – значение первой производной.

Основная идея метода конечных разностей (МКР) состоит в том, что он сводит решение краевой задачи к решению системы алгебраических уравнений относительно значений искомой функции (решения) на заданном множестве точек. Это достигается заменой производных, входящих в дифференциальное уравнение и в краевые условия, их **конечными разностями**.

Рассмотрим аппроксимацию первой производной для функции $y = f(x)$, заданной таблично в виде $y = y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ при $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ (рисунок 3.2). Считаем, что узлы равноудалены друг от друга. Тогда шаг Δx (разность между соседними значениями аргумента) будет постоянным.

В зависимости от способа вычисления конечных разностей получают разные формулы для вычисления первой производной (первая разность) в одной и той же точке:

$$\text{левая разность } y'_i \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}; \quad (3.6)$$

$$\text{правая разность } y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}; \quad (3.7)$$

$$\text{центральная разность } y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.8)$$

Конечно-разностные выражения для старших производных получаются по принципу "разность от разности".

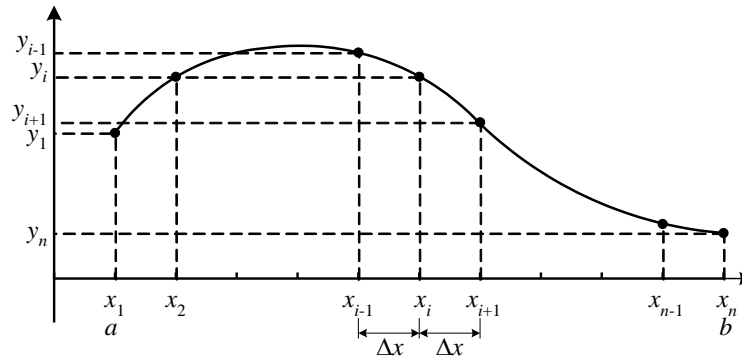


Рисунок 3.2. Фрагмент отрезка $[a, b]$ с нанесенными на нем узлами и узловыми ординатами искомой функции

Можно получить формулы для:

второй производной (вторая разность)

$$y_i'' = (y_i')' \approx \frac{y_i' - y_{i-1}'}{\Delta x} = \frac{(y_{i+1} - y_i)/\Delta x - (y_i - y_{i-1})/\Delta x}{\Delta x} = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2}; \quad (3.9)$$

третьей производной (третья разность)

$$\begin{aligned} y_i''' &\approx \frac{y_{i+1}'' - y_{i-1}''}{2\Delta x} = \frac{(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})/\Delta x^2 - (y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i)/\Delta x^2}{2\Delta x} = \\ &= \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2\Delta x^3}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

четвертой производной (четвертая разность)

$$\begin{aligned} y_i^{IV} &= \frac{y_{i-1}'' - 2y_i'' + y_{i+1}''}{\Delta x^2} = \frac{(y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i) - 2(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})}{\Delta x^4} = \\ &= \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{\Delta x^4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

и т.д., являющиеся формулами численного дифференцирования, точность которых существенно зависит от Δx .

Пусть имеется краевая задача, состоящая из линейного ОДУ второго или старших порядков и краевых условий на концах отрезка $[a, b]$. Требуется найти значения искомой функции в узлах, равномерно расположенных на отрезке. Решение краевой задачи методом конечных разностей можно разделить на четыре основных этапа.

Этап 1. Подготовка к решению задачи.

Отрезок $[a, b]$ разбивается на m частей (шагов) длиной $\Delta x = (b - a)/m$. Точки деления (узлы) нумеруются слева направо: например 1, 2, ..., m . Узлы 1 и m называются контурными, а узлы 2, 3, ..., $m-2$, $m-1$ – внутренними. В некоторых случаях приходится вводить еще и законтурные узлы, расположенные за пределами отрезка. Неизвестными задачи выступают

узловые значения искомой функции во внутренних узлах. Если значение искомой функции в одном из контурных узлов не задано краевыми условиями, то в число неизвестных надо включить узловое значение функции в соответствующем контурном узле.

Этап 2. Составление прямоугольной СЛАУ.

В решаемом дифференциальном уравнении аргумент x заменяется узловым значением x_i , искомая функция $y(x)$ – узловым значением $y_i = y(x_i)$, производные искомой функции $y'(x), y''(x), \dots$ – соответствующими конечными разностями y'_i, y''_i, \dots . Если в уравнении содержится некоторая неизвестная функция аргумента x , например, $f(x)$, то она также заменяется узловым значением $f_i = f(x_i)$.

В результате таких замен дифференциальное уравнение превращается в алгебраическое, называемое конечно-разностным для произвольного узла i или шаблоном.

По этому шаблону составляются уравнения

во-первых, во всех внутренних узлах ($i = 2, \dots, m-1$);

во-вторых, для того контурного узла 1 или m , в котором не задана величина y_a или y_b .

В совокупности составленные уравнения образуют СЛАУ, имеющую прямоугольную структуру, т.к. число неизвестных в ней превышает количество уравнений. Причем превышает на величину, равную порядку решаемого уравнения или, что одно и то же, количеству краевых условий.

Этап 3. Приведение прямоугольной СЛАУ к квадратному виду.

Такое приведение может быть выполнено, по крайней мере, двумя способами. Первый состоит в том, что к составленным добавляются недостающие уравнения, в качестве которых используются краевые условия. Второй способ заключается в преобразовании составленных уравнений с помощью краевых условий, в результате чего число неизвестных сокращается до числа уравнений. Первый способ более простой как при ручном, так и автоматизированном формировании системы, но ее порядок оказывается выше, чем при использовании второго способа.

Этап 4. Решение квадратной СЛАУ.

Используя любой метод (например, метод Гаусса, метод прогонки и т.д.) систему решают и получают приближенные узловые значения искомой функции. Приближенность результатов решения краевой задачи методом конечных разностей обусловлена влиянием ошибки метода и ошибки округления. Первая возникает вследствие замены производных приближенными конечно-разностными выражениями, а вторая – главным образом при решении СЛАУ. Сделать первую ошибку малой можно, дробя шаг (при этом возрастают размеры СЛАУ), а вторую – переходя к машинной арифметике удвоенной точности.

Раздел IV. Численные методы математического программирования

Тема 4.1. Линейное математическое программирование

Под **математическим программированием** понимают совокупность методов, предназначенных для отыскания экстремума заданной функции нескольких переменных при определенных ограничениях, накладываемых на эти переменные.

В **общем виде задача математического программирования** может быть записана (поставлена) следующим образом.

Решить задачу оптимизации означает определить такие значения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которые доставляют экстремальное значение (т.е. максимум или минимум) функции

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (4.1)$$

при ограничениях

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq ; = ; \geq \} b_i, \text{ где } b_i - \text{ числа, } i = 1, m. \quad (4.2)$$

Величины $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **переменные задачи**.

Функция $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **целевой функцией (функцией цели)**.

Совокупность указанных значений переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется **оптимальным планом**.

Задачи оптимизации описывают явления и процессы в различных областях науки, техники, экономики. Большую роль они играют и в строительстве (оптимальное проектирование конструкций, транспортная задача и другие).

В зависимости от типа функций $f(X)$ и $g_i(X)$ различают следующие важные классы задач математического программирования.

Задача (4.1) – (4.2) называется **задачей линейного программирования**, если все функции $f(X)$ и $g_i(X)$ являются линейными относительно переменных X . Методы решения задач линейного программирования применяются на промышленных предприятиях при оптимизации производственной программы, распределении ее по цехам, участкам, при ассортиментной загрузке оборудования, в задачах текущего, перспективного и технологического планирования, при планировании грузопотоков, при определении плана товарооборота и его распределении, составлении оптимальных смесей, решении транспортных и производственно-транспортных задач и т. д.

Если хотя бы одна из функций $f(X)$ и $g_i(X)$ являются нелинейной, то задача (4.1) – (4.2) называется **задачей нелинейного программирования**. Нелинейное программирование используется при расчете оптимальной

партии выпуска деталей, управлении комплектными поставками и запасами, распределении ограниченных ресурсов, оптимизации некоторых показателей производственно-экономической деятельности и т. д.

Если на переменные $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ наложено условие дискретности (целочисленности значений), то имеем задачу **дискретного (целочисленного)** программирования. Такие задачи возникают при оптимизации выпуска неделимой продукции, маршрутизации, календарного планирования, управления поставками при заданных транзитных нормах отпуска, размещения производственно-складской структуры и т. д.

Линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) – раздел математического программирования, содержащий методы отыскания экстремума (максимума или минимума) линейной функций нескольких переменных при линейных ограничениях, накладываемых на переменные.

Общая постановка задачи линейного программирования звучит следующим образом.

Требуется отыскать экстремум линейной функции n переменных

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min). \quad (4.3)$$

При этом на переменные x_1, \dots, x_n накладываются линейные ограничения следующего вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq; =; \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq; =; \geq) b_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq; =; \geq) b_m$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0 \quad (4.5)$$

Здесь c_j, a_{ij}, b_i – некоторые числа, $i = 1, m; j = 1, n$.

Ограничения (4.4) называются **нетривиальными**.

Ограничения (4.5) называются **тривиальными** (дополнительными, вспомогательными) и в общем случае могут отсутствовать.

Любой вектор (x_1, \dots, x_n) удовлетворяющий условиям (4.4) и (4.5) называется **допустимым решением (допустимым планом)**.

Допустимое решение, при котором достигается требуемый экстремум целевой функции, называется **оптимальным решением (оптимальным планом)**. Его обозначают как X^* .

Совокупность уравнений (4.3) – (4.5) называется **математической моделью** задачи линейного программирования.

Таким образом, **решение задачи ЛП** сводится к нахождению некоторой совокупности значений переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, доставляющих линейной функции цели Z экстремальное значение и удовлетворяющих системе ограничений в виде равенств или неравенств.

В общем случае задача (4.3) – (4.5) может иметь одно решение, не иметь решения или иметь их бесконечно много.

Методы решения задач линейного программирования можно разделить на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи ЛП. Специальные методы учитывают особенности целевой функции и системы ограничений.

Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод решения задач ЛП целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами.

Постановка задачи ЛП при использовании графического метода:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max (\min). \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 (\leq; =; \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 (\leq; =; \geq) b_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

...

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 (\leq; =; \geq) b_m \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Неравенства (4.7) и (4.8) определяют **область допустимых решений**.

Области допустимых решений могут быть 3 типов: неограниченная область, выпуклый многоугольник, пустое множество.

Целевая функция (4.6) определяет на плоскости семейство параллельных прямых, называемых **линиями уровня целевой функции**, каждой из которых соответствует определенное значение целевой функции z .

Найдем частные производные целевой функции по x_j :

$$\partial z / \partial x_j = c_j \quad (j = 1, 2)$$

Вектор

$$\text{grad} \vec{Z} = (\partial z / \partial x_1 ; \partial z / \partial x_2) = (c_1 ; c_2) = \vec{C}$$

– это вектор **наискорейшего возрастания целевой функции** (вектор градиентного направления).

Направление, противоположное направлению вектора \vec{C}

$$-\vec{C} = (-c_1 ; -c_2),$$

есть направление **наискорейшего убывания целевой функции** или **антиградиентное**.

Алгоритм графического метода решения задачи ЛП состоит из следующих этапов:

1. Построение области допустимых значений
 - а) строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в системе ограничений знаков неравенств на знаки равенств;
 - б) находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи;
 - в) находят многоугольник решений.
 2. Построение вектора градиентного направления $grad\vec{Z}$, перпендикулярного к целевой функции и определяющего направление наискорейшего возрастания функции Z .
 3. Построение произвольной линии уровня Z , проходящей через многоугольник решения.
 4. При решении на максимум перемещают прямую $z = const$ в направлении вектора $grad\vec{Z}$, пока она не коснется области допустимых решений в крайней точке.
- В случае решения задачи на минимум линию уровня целевой функции $z = const$ перемещают в антиградиентном направлении до крайней точки касания с областью допустимых решений.
5. Определяют оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$.
 6. Вычисляют значение целевой функции Z .

При определении оптимального плана возможны следующие случаи.

- а) оптимальный план **единственный**. Тогда линия уровня и область допустимых решений в крайнем положении будут иметь одну общую точку.
- б) оптимальных планов может быть **бесконечное множество**. В этом случае в крайнем положении линия уровня проходит через грань области допустимых решений.
- в) целевая функция не ограничена. Линия уровня, сколько бы ее ни перемещали, будет иметь общие точки с областью допустимых решений. **В этом случае оптимального плана нет**.
- г) задача **решения не имеет**. Область допустимых решений – пустое множество, т. е. система ограничений несовместна. **В этом случае оптимального плана нет**.

Тема 4.2. Универсальные методы решения задач линейного программирования

Графический метод решения задач линейного программирования (ЗЛП) позволяет сделать два важных вывода:

- 1) ЗЛП может:
 - а) иметь единственное решение;
 - б) иметь бесконечное множество решений;
 - в) не иметь решения.
- 2) Если ЗЛП имеет решение, то оно достигается в одной или нескольких вершинах ОДР.

Распространяя эти выводы на ЗЛП с n переменными, можно предложить, следующий простой алгоритм: надо найти координаты всех вершин ОДР, вычислить во всех вершинах значения функции цели и, сравнив их между собой, выбрать ту из них, где функция цели наибольшая или наименьшая. Но дело в том, что в задаче с n переменными ОДР представляет собой сложный геометрический объект, ограниченный уже не отрезками прямых, а так называемыми гиперплоскостями. Число вершин в таком объекте и сложность определения их координат столь велики, что это не под силу сделать даже компьютеру.

Из стремления обойти эти трудности и возник универсальный метод решения ЗЛП с любым числом переменных, а именно, симплекс-метод. Суть его заключается в следующем. Вначале, используя специальный алгоритм, находят любую вершину ОДР (ее координаты называются начальным планом). Применяя некоторые формальные признаки, эту вершину исследуют на оптимальность. Если оказывается, что оптимальной она не является, то опять по строго определенным правилам переходят в соседнюю вершину, функция цели в которой больше или, по крайней мере, равна тому значению, которое она имела в предыдущей вершине. Новую вершину также проверяют на оптимальность и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута оптимальная вершина либо не будет доказано, что поставленная задача решения не имеет. Опыт показывает, что происходит в итоге сравнительно небольшого числа шагов.

Симплекс-метод состоит из трех основных **этапов**:

- 1) Приведение ЗЛП к каноническому виду и запись ее в начальную жорданову таблицу.
- 2) Нахождение начального плана.
- 3) Нахождение оптимального плана.

Жордановы преобразования

Пусть имеется система двух уравнений

$$\begin{aligned}y_1 &= 2x_1 - 5x_2 + 4x_3; \\y_2 &= 8x_1 + 2x_2 - 3x_3.\end{aligned}$$

Переменные x_1, x_2, x_3 , стоящие в правой части уравнений, назовем свободными или независимыми. Они могут принимать любые значения. Переменные y_1, y_2 , находящиеся в левой части, наоборот, будут зависимыми или несвободными. Их значения определяются выбором свободных переменных. Например, если принять $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, то и y_1, y_2 будут равны нулю. А если $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$, то $y_1 = 4, y_2 = 3$.

Поставим задачу поменять местами какие-нибудь свободные и несвободные переменные, например, x_2 и y_2 . Такая замена и составляет суть жордановых исключений.

Разрешим второе уравнение относительно x_2 :

$$x_2 = -4x_1 + 0,5y_2 + 1,5x_3$$

и подставим это выражение в первое уравнение:

$$y_1 = 2x_1 - 5(-4x_1 + 0,5y_2 + 1,5x_3) + 4x_3 = 22x_1 - 2,5y_2 - 3,5x_3.$$

Получили преобразованную систему

$$\begin{aligned}y_1 &= 22x_1 - 2,5y_2 - 3,5x_3; \\x_2 &= -4x_1 + 0,5y_2 + 1,5x_3.\end{aligned}$$

в которой свободными переменными выступают уже x_1, y_2, x_3 , а несвободными – y_1 и x_2 .

Запишем исходную и преобразованную системы в жордановы таблицы:

		$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
1	$y_1 =$	-2	5	-4
②	$y_2 =$	-8	-2	3
		1	②	3

		$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$
	$y_1 =$	-22	2,5	3,5
	$x_2 =$	4	-0,5	-1,5
		1	2	3

Обе таблицы имеют верх, в котором помещены свободные переменные, взятые со знаком минус. Такая форма их представления удобна для последующего использования в симплекс-методе. Обе таблицы имеют левый столбец, в котором располагаются зависимые переменные. Коэффициенты систем помещены в две строки и три столбца; их номера расположены слева и снизу от таблиц. Соответственно этим номерам будем считать, что коэффициентами исходной таблицы являются $a_{11} = -2, a_{12} = 5, \dots$, а преобразованной – $a^*_{11} = -22, a^*_{12} = -2,5, \dots$.

Столбец ②, из которого переносится независимая переменная x_2 , будем называть **разрешающим столбцом**. Строку ②, из которого переносится независимая переменная y_2 , назовем **разрешающей строкой**. (Номера этой строки и столбца обведены кружком). На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится **разрешающий элемент** $a_{22} = -2$ (он выделен).

Чтобы проверить, что таблицы составлены правильно, можно от них перейти назад к уравнениям. Для этого коэффициенты любой строки надо умножить на стоящие над ними свободные переменные (с учетом их знака), произведения сложить, а сумму приравнять соответствующей зависимой переменной. Например, из первой строки исходной таблицы получаем первое уравнение исходной системы:

$$y_1 = -2 \cdot (-x_1) + 5 \cdot (-x_2) - 4 \cdot (-x_3) = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3.$$

Сопоставляя исходную и преобразованную таблицы, можно определить следующие **четыре правила**, по которым происходит **преобразование коэффициентов таблиц при жордановых преобразованиях (исключениях)**:

1) разрешающий элемент заменяется обратной величиной
 $a_{22} = -2$; $a_{22}^* = 1/a_{22} = 1/(-2) = -0,5$.

2) остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент

$$\begin{aligned} a_{21} &= -8; & a_{21}^* &= -8/(-2) = 4; \\ a_{23} &= 3; & a_{23}^* &= 3/(-2) = -1,5. \end{aligned}$$

3) остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный

$$a_{12} = 5; \quad a_{12}^* = -5/(-2) = 2,5.$$

4) все оставшиеся элементы преобразуются по правилу прямоугольника:

а) элемент $a_{11} = -2$ входит в прямоугольник (рисунок 4.1 а) в котором он образует положительную диагональ с разрешающим элементом a_{22} . Вторая диагональ $a_{21} - a_{12}$ считается отрицательной. Поэтому

$$a_{11}^* = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{22}} = \frac{-2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-8)}{-2} = -22;$$

б) элемент $a_{13} = -4$ входит в другой прямоугольник (рисунок 4.1 б), образуя положительную диагональ другого направления, но опять-таки с разрешающим элементом a_{22} . Поэтому

$$a_{13}^* = \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{22}} = \frac{-4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3}{-2} = 3,5.$$



Рисунок 4.1. Пояснение правила прямоугольников

В заключении отметим еще одно важное свойство изложенного варианта жордановых преобразований (исключений). Независимая переменная, находясь на верху таблицы, имеет знак минус, а при переходе в левый столбец теряет его. Зависимая переменная, переходя из левого столбца наверх, знак минус приобретает.

Приведение ЗЛП к каноническому виду

Стремление придать симплекс-методу универсальный характер вызвало необходимость привести решаемую задачу к каноническому виду.

ЗЛП считается записанной в **каноническом виде**, если она удовлетворяет четырем требованиям:

- 1) Функция цели максимизируется.
- 2) Ограничения – строгие равенства.
- 3) Свободные члены ограничений неотрицательны.
- 4) Условия неотрицательности наложены на все переменные.

Общая форма	Каноническая форма
целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min)$	целевая функция $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$
система ограничений $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$... $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m$	система ограничений $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$... $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$
необязательные ограничения $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0$	обязательные ограничения $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0$

То есть, отличия по сравнению с общей формой следующие:

1. функция цели Z исследуется только на **максимум**.
2. система неравенств заменяется **системой равенств**.

3. Условия неотрицательности накладываются на все переменные.

Чтобы это осуществить, существует ряд преобразований, которые позволяют любую задачу, записанную в общем виде, привести к канонической форме. Рассмотрим их более подробно.

1. Чтобы от задачи минимизации перейти к задаче максимизации, надо функцию цели умножить на (-1) .

2. Ограничения-неравенства вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

преобразуются в ограничения-равенства путем **прибавления** к левым частям **дополнительных (балансовых) неотрицательных** переменных

$$x_{n+i} \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, m$$

3. Ограничения-неравенства вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

преобразуются в ограничения-равенства путем **вычитания** от левых частей **дополнительных неотрицательных** переменных

$$x_{n+i} \geq 0$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, m$$

4. Дополнительные переменные вводятся в целевую функцию с коэффициентами, равными 0:

$$c_{n+i} = 0, \quad i = 1, k$$

5) Если не задано, что переменная положительно определена, она заменяется разностью двух других неотрицательных переменных

$$x_j = x_j^{(1)} - x_j^{(2)}, \text{ где } x_j^{(1)} \geq 0, x_j^{(2)} \geq 0$$

При таких преобразованиях сформулированная задача остается **эквивалентной** исходной.

Интерпретация симплекс-метода

Предположим что решение существует. Ограничения-неравенства нам дают некоторый многоугольник решений.

Перебор всех возможных планов (решений) и выбор из них оптимального (при котором целевая функция достигает экстремума) – это задача практически неразрешима.

Идея симплекс-метода – выбрав за основу некоторый начальный план и исследовав его на оптимальность, перейти к другому плану, но не худшему с точки зрения доставления экстремума целевой функции.

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как переход по ребрам из одной вершины многогранника планов в другую по направлению к вершине x^* , в которой целевая функция достигает максимального значения.

Нахождение начального опорного плана

1. На каждом шаге разрешающим может быть выбран любой столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент.

Строка целевой функции на выбор разрешающих столбцов на данном этапе никакого влияния не оказывает.

2. Разрешающая строка определяется по наименьшему из отношений свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца (наименьшее симплексное отношение).

3. Место в левом столбце должно быть не занято ранее перенесенной переменной.

4. Строки, состоящие из одних 0, вычеркиваются.

5. Если в процессе исключений встречается 0-строка, в которой все элементы равны 0, а свободный член отличен от нуля, то система ограничительных уравнений решений не имеет.

Нахождение оптимального плана

1. если в Z -строке нет отрицательных элементов (не считая свободного члена) – план оптимален.

2. если в Z -строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных, то целевая функция неограничена в допустимой области ($Z \rightarrow \infty$). Задача неразрешима.

3. если в Z -строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному.

4. В случае, если можно перейти к более оптимальному плану, то столбец с отрицательным элементом считают разрешающим. Разрешающую строку выбирают так же, как и при определении начального плана (по минимальному симплексному отношению). Делают шаг жорданова исключения. Полученный опорный план вновь исследуют на оптимальность.

5. Если в Z -строке отрицательных элементов несколько, разрешающим выбирают столбец с наибольшим по абсолютной величине отрицательным элементом.

Раздел V. Решение нелинейных уравнений и систем

Тема 5.1. Итерационные методы решения

Постановка задачи для одного нелинейного уравнения выглядит следующим образом:

$$f(x) = 0. \tag{5.1}$$

Решить его значит отыскать все x (корни или решения), при которых исходное уравнение обращается в тождество.

В большинстве случаев найти решение аналитическими методами невозможно.

Основой всех численных методов является последовательный поиск решения с заданной степенью точности (по своей сути это итерационные методы).

Корней в общем случае при решении нелинейного уравнения может быть несколько.

Если $f'(x) \neq 0$, то корень называют **простым**.

Если $f'(x) = 0$, то корень называют **кратным**.

Большинство методов ориентированы на поиск простых корней. Для кратных корней эти методы не подойдут.

Основной этап при решении нелинейных уравнений – определить интервал $[a, b]$, на котором есть один корень. Такая процедура называется **локализация корня**, при этом исходная функция пересекает ось Ox и значения исходной функции на концах интервала имеют противоположный знак.

Метод половинного деления (бисекции, дихотомии)

Метод применяется для нахождения нуля функции $f(x) = 0$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, по краям которого значения $f(x = a)$ и $f(x = b)$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (5.1) имеет на отрезке $[a, b]$ либо один корень либо их нечетное количество. Полагаем, что такой корень единственный. Разделим отрезок $[a, b]$ точкой c_1 пополам и выберем для дальнейшего рассмотрения половинный отрезок, на котором функция $f(x)$ имеет разные знаки. Полученный отрезок половинной длины принимаем за исходный отрезок, делим его снова пополам точкой c_2 и т.д.

Алгоритм половинного деления завершается либо тогда, когда $f(c_i) = 0$ либо когда длина отрезка i -го деления становится меньше некоторого заданного значения допуска ε . В первом случае значение корня $x = c_i$. Во втором значение корня принимается равным значению абсциссы точки c_{i+1} .

Метод хорд

Идея метода аналогична методу половинного деления. Исключение составляет выбор точки c_i . В этом методе она определяется как точка пересечения линии, соединяющей узлы $f(x = a)$ и $f(x = b)$ с осью ОХ.

Метод Ньютона (метод касательных)

Идея метода заключается в следующем: выбирается какая-то точка внутри интервала $[a, b]$ как начальное приближение, а последующее приближение определяется по расчетной формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})},$$

где k – номер итерации, $k=0, 1, \dots$.

На каждой итерации сравнивают значения $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$. Если модуль их разности превышает заданную величину ε , то по формуле вычисляют новые приближения. Окончание счета $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$.

Так как этот метод требует определения производной в точке на каждой итерации, для упрощения вычислений используют **модифицированный метод Ньютона**, в котором расчетная формула имеет следующий вид:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k=0)})}.$$

В модифицированном метод Ньютона значение производной в точке определяется только на начальной итерации.

Важный вопрос – это **сходимость** методов Ньютона. Она зависит от выбора $x^{(0)}$. Для этого используют достаточное условие сходимости:

в качестве точки $x^{(0)}$ выбрать тот из концов отрезка $[a, b]$, где

$$x^{(0)} = a, \text{ если } f(a)f''(x^{(0)}) \geq 0$$

$$x^{(0)} = b, \text{ если } f(b)f''(x^{(0)}) \geq 0$$

Метод итераций

Идея метода итераций решения нелинейного уравнения заключается в следующем:

Задана функция $f(x) = 0$. Каким либо способом эта функция приводится к виду $x = \varphi(x)$. Тогда можно организовать вычислительный процесс вида

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}),$$

где k – номер итерации, $k=0, 1, \dots$.

Начальная точка $x^{(0)}$ выбирается произвольно внутри отрезка $[a, b]$.

Важный вопрос – вопрос сходимости. В методе итераций достаточное условие имеет вид $|\varphi'(x^{(0)})| < 1$. Кроме того, сходимость итерационного процесса зависит от выбора функции $\varphi(x)$.

В качестве условия прекращения счета используют выражение $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$.

Пример. Найти решение нелинейного уравнения

$$f(x) = 5x^3 - 20x + 3 = 0$$

методом итераций. Точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Отрезок, на котором локализован корень, $[0, 1]$. Ответ 0,150858.

Решение.

Исходное уравнение $f(x) = 0$ необходимо преобразовать к виду $x = \varphi(x)$. Такое преобразование сделаем двумя способами, составим итерационные схемы для каждого их способов и проверим условие сходимости.

	1 способ	2 способ
вид $\varphi(x)$	$x = \frac{5x^3 + 3}{20}$	$x = x + (5x^3 - 20x + 3)$
$\varphi'(x)$	$\frac{15x^2}{20}$	$15x^2 - 19$
$x^{(0)} = 0,5$		
$ \varphi'(x^{(0)}) $	$ 0,1875 < 1$ – правда	$ 4 < 1$ – ложь
результат	итерационный процесс сходящийся	итерационный процесс расходящийся

Результаты расчета приведены в таблице при различных значениях начального приближения.

номер итерации	способ 1	способ 2		номер итерации	способ 1	способ 2
0	0,79	0,79		0	0,1	0.1
1	0,27326	-9,54481		1	0,15025	1,105
2	0,155101	-4163,46		2	0,150848	-11,2488
3	0,150933	-3,6E+11		3	0,150858	-1600,2
4	0,15086	-2,3E+35		4	0,150858	-1,6E+12
5	0,150858	-6E+106		5	0,150858	-2,2E+37

При использовании способа 1 итерационный процесс является сходящимся и результат получен на 5 итерации с заданной точностью. При использовании способа 2 итерационный процесс является расходящимся.

Решение систем нелинейных уравнений итерационными методами

Систему нелинейных уравнений в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Если $\{x_1, \dots, x_n\}$ рассматривать как \vec{X} – n-мерный вектор, а $\{f_1, \dots, f_n\}$ обозначить как F , то (5.2) можно записать как одно векторно-матричное уравнение

$$F(\vec{X}) = 0. \tag{5.3}$$

Систему нелинейных уравнений, по аналогии с системой линейных алгебраических уравнений, необходимо привести к виду, удобному для проведения итераций и организовать итерационный процесс начиная с некоторого заданного начального приближения.

Рассмотрим в общем виде систему, содержащую 3 уравнения и 3 неизвестные

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Преобразуем (5.4) к виду $\vec{X} = \Phi(\vec{X})$

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 &= \varphi_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Выбрав начальное нулевое приближение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ (считаем, что корни локализованы на $[a, b]$), можно организовать итерационный процесс по следующим методам:

– итерационная схема метода простой итерации

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \end{aligned}$$

$$x_3^{(k+1)} = \varphi_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$$

– итерационная схема метода ускоренных итераций

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \varphi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}), \end{aligned}$$

где $k = 0, \dots, \infty$ – номер итерации.

Для окончания итерационного процесса можно использовать одно из следующих выражений

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k-1)} \right| \leq \varepsilon \quad (5.6)$$

или

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (5.7)$$

где $i = 1, 3$.

Как известно, при организации любого итерационного процесса необходимо проверять условие сходимости – критерий, обеспечивающий сходимость итерационного процесса к решению.

Для систем нелинейных уравнений в качестве такого критерия можно использовать следующее: норма матрицы Якоби, построенная из функций φ_i , $i = 1, 2, 3$ в точке $\bar{X}^{(k=0)} (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ должна быть меньше 1

$$\| \mathbf{J} \| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \end{array} \right\| < 1 \quad (5.8)$$

Строго говоря, вычисление нормы матрицы Якоби необходимо проводить на каждой итерации.

Норма матрицы

Нормой матрицы называется некоторое действительное число. Вычисление различных норм рассмотрим на следующем примере.

Задана матрица 3 порядка

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}.$$

1. ***m*-норма:** максимальная величина среди суммы модулей элементов в каждой строке

$$\|\mathbf{A}\|_m = \max \left\{ \begin{array}{l} |-1| + |2| + |3| \\ |4| + |-5| + |6| \\ |7| + |8| + |-9| \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 15 \\ 24 \end{array} \right\} = 24$$

2. ***l*-норма:** максимальная величина среди суммы модулей элементов в каждом столбце

$$\|\mathbf{A}\|_l = \max \{ |-1| + |4| + |7| \quad |2| + |-5| + |8| \quad |3| + |6| + |-9| \} = \max \{ 12 \quad 15 \quad 18 \} = 18$$

3. ***k*-норма** (Евклидова норма)

$$\|\mathbf{A}\|_k = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + (-5)^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + (-9)^2} \approx 16,9$$

Пример. Найти решение системы нелинейных уравнений

$$0,1x_1^2 + x_1 + 0,2x_2^2 - 0,3 = 0$$

$$0,2x_1^2 + x_2 - 0,1x_1x_2 - 0,7 = 0$$

методами простой итерации и ускоренных итераций. Точность $\varepsilon = 10^{-3}$.
Корни локализованы на отрезках $x_1 \in [0, 1]$ и $x_2 \in [0, 1]$.

Решение.

Исходная система имеет вид

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0.$$

Для того, чтобы составить итерационную схему, преобразуем исходную систему к виду

$$x_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$$

$$x_1 = 0,3 - 0,1x_1^2 - 0,2x_2^2$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$$

$$x_2 = 0,7 - 0,2x_1^2 + 0,1x_1x_2$$

Убедимся, что итерационный процесс будет сходящимся. Выбираем некоторое начальное приближение (например, $x_1^{(0)} = 0,5$; $x_2^{(0)} = 0,5$), составим матрицу Якоби и вычислим ее норму.

$$\|\mathbf{J}\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -0,2x_1 & -0,4x_2 \\ -0,4x_1 + 0,1x_2 & 0,1x_1 \end{array} \right\|$$

$$\|\mathbf{J}\|_{\bar{x}^{(0)}} = \left\| \begin{array}{cc} -0,2 \cdot 0,5 & -0,4 \cdot 0,5 \\ -0,4 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 & 0,1 \cdot 0,5 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -0,1 & -0,2 \\ -0,15 & 0,05 \end{array} \right\|$$

$$\|\mathbf{J}\|_m = \max \left\{ \begin{array}{l} |-0,1| + |-0,2| \\ |-0,15| + |0,05| \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,3 \\ 0,2 \end{array} \right\} = 0,3 < 1 - \text{следовательно, итерационный}$$

процесс будет сходящийся.

Итерационная схема метода простой итерации:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0,3 - 0,1x_1^{2(k)} - 0,2x_2^{2(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0,7 - 0,2x_1^{2(k)} + 0,1x_1^{(k)}x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Итерационная схема метода ускоренных итераций:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 0,3 - 0,1x_1^{2(k)} - 0,2x_2^{2(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 0,7 - 0,2x_1^{2(k+1)} + 0,1x_1^{(k+1)}x_2^{(k)} \end{aligned}$$

Результаты расчета по двум методам приведены в таблице.

метод простой итерации			метод ускоренных итераций		
k (номер итерации)	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k (номер итерации)	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,5	0,5	0	0,5	0,5
1	0,225	0,675	1	0,225	0,701125
2	0,203813	0,705063	2	0,196622	0,706054
3	0,196423	0,706062	3	0,196432	0,706152
4	0,196437	0,706152			

Видно, что при использовании метода ускоренных итераций, решения мы достигли за меньшее число итераций.

ПРАКТИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Лабораторная работа № 1 Основы работы с матрицами

Цель работы: изучить основные операции с матрицами.

Индивидуальные задания

В соответствии с шифром задания, составить матрицу и вычислить:

$$\det|A|; A^T; A+A; A \cdot A; A^{-1}.$$

Первая цифра шифра	Элементы матрицы			Вторая цифра шифра	Величина c	Третья цифра шифра	Величина d
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}				
1	2	3	4	5	6	7	8
0	1,034 $15,345 + c$ 2,056	$2,874 - d$ 0,456 5,204	2,504 11,945 13,056	0	0,124	0	1,783
1	4,157 $12,750 - d$ 8,860	0,371 4,218 1,390	0,030 $3,275 + c$ 1,390	1	0,574	1	0,030
2	$1,588 + c$ 14,395 1,390	4,945 4,276 3,495	13,045 1,035 $5,179 + d$	2	1,040	2	-1,940
3	14,023 2,478 $2,239 + c$	5,204 $5,281 + d$ 5,32	2,874 9,010 17,456	3	0,323	3	-0,394
4	13,057 $5,204 + d$ -3,456	15,345 5,397 3,287	7,813 $1,430 + c$ 4,130	4	-0,198	4	1,588
5	$0,371 + c$ 12,385 2,949	4,853 $13,729 - d$ 4,045	2,845 -0,345 1,034	5	0,638	5	0,317
6	4,230 9,394 $2,156 - d$	$3,956 + c$ 15,374 -6,134	1,493 3,245 -4,157	6	0,451	6	1,054
7	8,860 11,945 19,045	19,432 $7,032 + c$ 2,056	0,456 $7,319 + d$ 19,634	7	-1,489	7	1,395
8	2,056 $2,569 + c$ 12,750	4,439 7,845 13,230	$0,045 - d$ 13,845 3,275	8	1,010	8	-3,134
9	2,046 5,170 $4,194 + c$	13,056 4,934 20,423	1,392 $1,945 - d$ 4,679	9	0,513	9	0,039

Лабораторная работа № 2

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Цель работы: изучить метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Пример решения системы линейных алгебраических уравнений

Решить СЛАУ третьего порядка методом Гаусса

$$\begin{array}{rclcl} 25,2x_1 & -4,7x_2 & +1,4x_3 & = & 46,8 \\ 4,1x_1 & +39,4x_2 & +2,9x_3 & = & -25,6 \\ -1,3x_1 & +3,1x_2 & +16,8x_3 & = & 34,3 \end{array}$$

Результаты представить с четырьмя значащими цифрами.

Перед тем, как решать задачу, необходимо вычислить определитель матрицы: $\det|A| = 16884,793$, т.е. матрица является невырожденной и решение этой системы единственно.

Выполним прямой ход.

Исключаем x_1 из второго уравнения. Для этого находим множитель

$$m = a_{21} / a_{11} = 4,1 / 25,2 = 0,162698,$$

первое уравнение системы умножаем на этот множитель и почленно вычитаем его из второго уравнения:

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= a_{22} - a_{12} \cdot m = 39,4 - (-4,7) \cdot 0,162698 = 40,1647, \\ a_{23}^{(1)} &= a_{23} - a_{13} \cdot m = 2,9 - 1,4 \cdot 0,162698 = 2,67222, \\ b_2^{(1)} &= b_2 - b_1 \cdot m = -25,6 - 46,8 \cdot 0,162698 = -33,2143. \end{aligned}$$

Исключаем x_1 из третьего уравнения аналогичным образом:

$$\begin{aligned} m &= a_{31} / a_{11} = -1,3 / 25,2 = -0,0515873, \\ a_{32}^{(1)} &= a_{32} - a_{12} \cdot m = 3,1 - (-4,7) \cdot (-0,0515873) = 2,85754, \\ a_{33}^{(1)} &= a_{33} - a_{13} \cdot m = 16,8 - 1,4 \cdot (-0,0515873) = 16,8722, \\ b_3^{(1)} &= b_3 - b_1 \cdot m = 34,3 - 46,8 \cdot (-0,0515873) = 36,7143. \end{aligned}$$

В результате получили преобразованную систему:

$$\begin{array}{rclcl} \underline{25,2x_1} & -4,7x_2 & +1,4x_3 & = & 46,8 \\ & \underline{40,1647x_2} & +2,67222x_3 & = & -33,2143 \\ & 2,85753x_2 & +16,8722x_3 & = & 36,7143 \end{array}$$

Исключаем x_2 из третьего уравнения:

$$m = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 2,85753 / 40,1647 = 0,0711453,$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot m = 16,8722 - 2,67222 \cdot 0,0711453 = 16,6821,$$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_2^{(1)} \cdot m = 36,7143 - (-33,2143) \cdot 0,0711453 = 39,0773.$$

Окончательно преобразованная система имеет вид

$$\begin{array}{rclcl} \underline{25,2}x_1 & -4,7x_2 & +1,4x_3 & = & 46,8 \\ & \underline{40,1647}x_2 & +2,67222x_3 & = & -33,2143 \\ & & \underline{16,6821}x_3 & = & 39,0773 \end{array}$$

Теперь выполним обратный ход:

$$x_3 = b_3^{(2)} / a_{33}^{(2)} = 39,0773 / 16,6821 = 2,34247$$

$$x_2 = (b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)}x_3) / a_{22}^{(1)} =$$

$$= (-33,2143 - 2,67222 \cdot 2,34247) / 40,1647 = -0,982801$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) / a_{11} =$$

$$= (46,8 - (-4,7) \cdot (-0,982801) - 1,4 \cdot 2,34247) / 25,2 = 1,54370$$

Проверка полученного решения.

Подставим полученные значения x_1 , x_2 , x_3 в левую часть исходной системы:

$$25,2 \cdot 1,54370 - 4,7 \cdot (-0,982801) + 1,4 \cdot 2,34247 = 46,7999$$

$$4,1 \cdot 1,54370 + 39,4 \cdot (-0,982801) + 2,9 \cdot 2,34247 = -25,6000$$

$$-1,3 \cdot 1,54370 + 3,1 \cdot (-0,982801) + 16,8 \cdot 2,34247 = 34,3000.$$

Найденные числа с достаточно высокой точностью совпадают с правыми частями заданной системы. Это значит, что система решена правильно. Значения неизвестных округляем до четырех значащих цифр:

$$x_1 = 1,544, \quad x_2 = -0,9828, \quad x_3 = 2,343.$$

Для того, чтобы вычислить определитель матрицы \mathbf{A} по методу Гаусса, воспользуемся выражением (2.5):

$$\det|\mathbf{A}| = (-1)^0 \cdot 25,2 \cdot 40,1647 \cdot 16,6821 \approx 16884,79.$$

Индивидуальные задания

Составить систему линейных алгебраических уравнений, выбрав коэффициенты и свободные члены из таблицы согласно шифру. Решить эту систему методом Гаусса. Сделать проверку полученных результатов.

Первая цифра шифра	Коэффициенты системы уравнений			Вторая цифра шифра	Свободные члены b_i	Третья цифра шифра	Величина c
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}				
1	2	3	4	5	6	7	8
0	$4 + c$ 1,207 0,248	2,353 3,125 0,953	0,189 1,424 2,267	0	2,411 -0,315 2,000	0	0,954
1	3,742 4,025 1,562	$6 + c$ 2,994 0,738	1,256 -0,984 4,092	1	-1,940 1,688 2,198	1	-1,025
2	3,116 -2,158 2,352	2,125 3,734 1,616	$3 + c$ 3,450 3,528	2	1,480 2,914 -2,165	2	0,305
3	2,691 $2 + c$ 3,546	2,472 3,924 4,017	-2,073 1,925 3,638	3	-1,270 -2,424 1,372	3	-0,167
4	3,886 3,004 -2,673	3,457 $5 + c$ 2,392	1,968 3,785 4,101	4	1,801 -1,212 -2,624	4	0,425
5	5,116 2,158 3,195	2,125 4,168 -2,207	1,140 $2 + c$ 4,218	5	-2,466 -1,215 1,272	5	-0,203
6	4,071 2,848 $3 + c$	-3,797 2,442 4,504	3,376 1,955 3,973	6	2,837 -3,004 3,725	6	-0,632
7	5,113 2,957 3,306	2,588 4,625 $4 + c$	-2,164 2,949 4,092	7	1,430 2,175 0,998	7	0,530
8	2,930 -3,468 2,504	-2,152 2,987 3,706	2,146 4,225 $5 + c$	8	-2,294 1,748 1,025	8	-0,758
9	$6 + c$ 4,436 2,407	2,890 4,029 -3,913	2,476 -2,923 4,738	9	2,500 -1,692 1,573	9	0,873

Лабораторная работа № 3

Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами

Цель работы: изучить итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений – метод простой итерации и метод ускоренных итераций.

Пример решения системы линейных алгебраических уравнений итерационными методами

Рассмотрим систему линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} 25,2x_1 - 4,7x_2 + 1,4x_3 &= 46,8 \\ 4,1x_1 + 39,4x_2 + 2,9x_3 &= -25,6 \\ -1,3x_1 + 3,1x_2 + 16,8x_3 &= 34,3 \end{aligned}$$

Найти решение системы итерационными методами – методом простой итерации и методом ускоренной итерации.

Решение.

1. Проверяем условие вырожденности системы. Т.к. определитель матрицы не равен 0, то решение системы существует и единственно.

2. Проверим условие диагонального преобладания.

$$\begin{aligned} |25,2| &> |-4,7| + |1,4| \\ |39,4| &> |4,1| + |2,9| \\ |16,8| &> |-1,3| + |3,1|. \end{aligned}$$

Т.к. условие выполняется, то для поиска решения можно использовать оба метода: простой итерации и ускоренных итераций.

3. Преобразуем исходную систему к нормальному виду.

Решая первое уравнение относительно x_1 , второе – относительно x_2 , а третье – относительно x_3 , получаем

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,85714 + 0,186508 \cdot x_2 - 0,0555556 \cdot x_3 \\ x_2 &= -0,649746 - 0,104061 \cdot x_1 - 0,0736041 \cdot x_3 \\ x_3 &= 2,04167 + 0,0773810 \cdot x_1 - 0,184524 \cdot x_2. \end{aligned}$$

4. Задание начального приближения.

Так как условие диагонального преобладания выполняется, то в качестве начального приближения можно выбрать любые произвольные величины:

$$x_1^{(0)} = -3, \quad x_2^{(0)} = 2, \quad x_3^{(0)} = 1.$$

5. Проведение итераций.

Применим метод простой итерации.

Подставив начальные значения в правую часть нормальной системы, получаем первое приближение:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1,85714 + 0,186508 \cdot 2 - 0,0555556 \cdot 1 = 2,17460 \\ x_2^{(1)} &= -0,649746 - 0,104061 \cdot (-3) - 0,0736041 \cdot 1 = -0,411168 \\ x_3^{(1)} &= 2,04167 + 0,0773810 \cdot (-3) - 0,184524 \cdot 2 = 1,44048. \end{aligned}$$

Полученные значения вновь подставляем в правую часть нормальной системы и находим второе приближение:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1,85714 + 0,186508 \cdot (-0,411168) - 0,0555556 \cdot 1,44048 = 1,70043 \\ x_2^{(2)} &= -0,649746 - 0,104061 \cdot 2,17460 - 0,0736041 \cdot 1,44048 = -0,982062 \\ x_3^{(2)} &= 2,04167 + 0,0773810 \cdot 2,17460 - 0,184524 \cdot (-0,411168) = 2,28581. \end{aligned}$$

Эти и последующие приближения неизвестных сведем в таблицу, где величина k обозначает номер итерации (номер приближения).

Решение исходной системы методом простой итерации

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	-3	2	1
1	2,17460	-0,411168	1,44048
2	1,70043	-0,982062	2,28581
3	1,54699	-0,994939	2,35446
4	1,54078	-0,984025	2,34396
5	1,54334	-0,982680	2,34247
6	1,54373	-0,982763	2,34242
7	1,54372	-0,982800	2,34246
8	1,54371	-0,982802	2,34247

Анализ этой таблицы показывает, как формируется решение в процесс сходимости: правильные знаки неизвестных устанавливаются уже на первой итерации, первая правильная цифра – на второй итерации, вторая – на четвертой итерации и т.д. Процесс вычислений остановлен в тот момент, когда у всех неизвестных повторились первые пять значащих цифр.

Округлив эти значения до четырех цифр, получаем ответ $x_1 = 1,5437$, $x_2 = -0,9828$, $x_3 = 2,3425$.

Решим исходную систему методом ускоренных итераций.

Первое приближение:

$$x_1^{(1)} = 1,85714 + 0,186508 \cdot 2 - 0,0555556 \cdot 1 = 2,17460$$

$$x_2^{(1)} = -0,649746 - 0,104061 \cdot 2,17460 - 0,0736041 \cdot 1 = -0,949641$$

$$x_3^{(1)} = 2,04167 + 0,0773810 \cdot 2,17460 - 0,184524 \cdot (-0,949641) = 2,38517$$

Второе приближение:

$$x_1^{(2)} = 1,85714 + 0,186508 \cdot (-0,949641) - 0,0555556 \cdot 2,38517 = 1,54572$$

$$x_2^{(2)} = -0,649746 - 0,104061 \cdot 1,54752 - 0,0736041 \cdot 2,38517 = -0,986341$$

$$x_3^{(2)} = 2,04167 + 0,0773810 \cdot 1,54752 - 0,184524 \cdot (-0,986341) = 2,34342$$

За поведением решения можно проследить по таблице.

Решение исходной системы методом ускоренных итераций

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	-3	2	1
1	2,17460	-0,949641	2,38517
2	1,54752	-0,986341	2,34342
3	1,54299	-0,982796	2,34247
4	1,54371	-0,982797	2,34247
5	1,54371	-0,982801	2,34247

Как и следовало ожидать, итерационный процесс сошелся быстрее, чем в методе простой итерации.

Индивидуальных задания

Составить систему линейных алгебраических уравнений, выбрав коэффициенты и свободные члены из таблицы согласно шифру. Решить эту систему методом простой итерации и методом ускоренных итераций. Сделать проверку полученных результатов.

Первая цифра шифра	Коэффициенты системы уравнений			Вторая цифра шифра	Свободные члены b_i	Третья цифра шифра	Величина c
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}				
1	2	3	4	5	6	7	8
0	$19 - c$ -4,157 -3,306	1,588 12,750 4,530	-2,164 2,949 9,760	0	0,670 -4,174 0,428	0	0,513
1	11,230 4,679 -8,417	1,478 $15,208 + c$ 0,784	3,245 1,039 10,732	1	1,767 3,134 1,987	1	0,317
2	9,214 5,298 4,297	3,047 7,319 1,040	2,046 1,395 7,943	2	4,278 1,409 $0,903 + c$	2	1,783
3	23,729 8,860 3,495	$10,395 - c$ 14,395 2,845	1,010 4,045 13,230	3	2,170 4,194 3,294	3	-3,134
4	5,204 $1,1 + c$ 0,371	3,956 20,423 5,320	0,030 2,569 17,456	4	4,276 -3,167 1,328	4	0,451
5	-13,057 1,390 5,281	2,239 19,432 $4,130 + c$	1,945 4,853 19,634	5	13,045 2,056 -1,940	5	0,574
6	11,945 2,478 3,287	1,035 15,374 7,813	3,275 $4,23 + c$ 13,743	6	2,874 4,934 5,397	6	0,323
7	14,023 2,056 1,392	0,456 12,385 4,439	$1,49 + c$ 5,179 13,845	7	6,905 2,504 4,05	7	0,124
8	9,394 9,010 2,156	1,034 15,345 $7,032 - c$	0,638 4,945 19,045	8	3,905 5,234 $1,043 + c$	8	-0,394
9	13,056 -3,456 -5,170	$0,045 - c$ 7,845 -6,134	-0,198 -0,345 15,390	9	$3,560 - c$ 2,157 10,150	9	-1,489

Лабораторная работа № 4
Нахождение наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора квадратной матрицы

Цель работы: изучить степенной итерационный метод и его модификации для определения наибольшего по модулю собственного значения λ_1 и соответствующего ему собственного вектора \bar{x}_1 квадратной матрицы.

Пример определения λ_1 и \bar{x}_1 степенным методом

Пусть задана матрица третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить λ_1 и \bar{x}_1 с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, используя степенной итерационный метод.

Решение.

Зададим начальный вектор третьего порядка $\bar{y}^0 = [5 \ -2 \ 1]^T$ и вычислим

$$\bar{y}^{(1)} = A \bar{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136,8 \\ -55,4 \\ 4,1 \end{bmatrix}.$$

Примем $s = 2$. Тогда первое приближение для λ_1 определится как $\lambda_1^{(1)} = y_2^{(1)} / y_2^{(0)} = -55,4 / (-2) = 27,7$.

Соответствующий собственный вектор

$$\bar{x}_1^{(1)} = \bar{y}^{(1)} = [136,8 \ -55,4 \ 4,1]^T.$$

Переходим ко второй итерации:

$$\bar{y}^{(2)} = A \bar{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 136,8 \\ -55,4 \\ 4,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3713,48 \\ -1609,99 \\ -280,7 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1^{(2)} = y_2^{(2)} / y_2^{(1)} = -1609,99 / (-55,4) = 29,0612,$$

$$\bar{x}_1^{(2)} = \bar{y}^{(2)} = [3713,48 \ -1609,99 \ -280,7]^T.$$

Продолжая итерационный процесс, сведем эти и последующие результаты в таблицу.

Нахождение λ_1 и \bar{x}_1 степенным итерационным методом

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$\lambda_1^{(k)} = y_2^{(k)} / y_2^{(k-1)}$	$\varepsilon^{(k)} = \lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)} $
0	5	-2	1	-	-
1	$1,368 \cdot 10^2$	$-5,54 \cdot 10^1$	$4,1 \cdot 10^0$	27,7	-
2	$3,71348 \cdot 10^3$	$-1,60999 \cdot 10^3$	$-2,807 \cdot 10^2$	29,0612	1,3612
3	$1,00754 \cdot 10^5$	$-4,90224 \cdot 10^4$	$-1,45343 \cdot 10^4$	30,4489	1,3877
...
26	$2,29435 \cdot 10^{40}$	$-6,81085 \cdot 10^{40}$	$-1,11122 \cdot 10^{40}$	38,4912	0,0012
27	$8,82730 \cdot 10^{41}$	$-2,62163 \cdot 10^{42}$	$-4,27648 \cdot 10^{41}$	38,4920	0,0008

Вычисления прекращены на 27-й итерации, т.к. $\varepsilon^{(27)}$ меньше $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\lambda_1^{(27)} = 38,4920,$$

$$\bar{x}_1^{(27)} = [8,82730 \cdot 10^{41} \quad -2,62163 \cdot 10^{42} \quad -4,27648 \cdot 10^{41}]^T.$$

Проверим эти значения подстановкой в исходную матрицу.

$$A \bar{x}_1^{(27)} = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,82730 \cdot 10^{41} \\ -2,62163 \cdot 10^{42} \\ -4,27648 \cdot 10^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,39678 \cdot 10^{43} \\ -1,00913 \cdot 10^{44} \\ -1,64591 \cdot 10^{43} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1^{(27)} \bar{x}_1^{(27)} = 38,4920 \cdot \begin{bmatrix} 8,82730 \cdot 10^{41} \\ -2,62163 \cdot 10^{42} \\ -4,27648 \cdot 10^{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,39780 \cdot 10^{43} \\ -1,00912 \cdot 10^{44} \\ -1,64610 \cdot 10^{43} \end{bmatrix}.$$

Как видно, соответствующие компоненты левой и правой частей равенства практически совпадают друг с другом. Таким образом, полученный результат следующий:

$$\lambda_1 = 38,492; \quad \bar{x}_1 = [8,8273 \cdot 10^{41} \quad -2,62163 \cdot 10^{42} \quad -4,27648 \cdot 10^{41}]^T.$$

Однако собственным вектором, представленным таким образом, пользоваться неудобно. Чаще всего его тем или иным способом **нормируют**. Наиболее употребительны два способа нормирования:

1) делением \bar{x}_1 на его наибольшую по модулю компоненту (в данном случае таковой является вторая компонента $-2,62163 \cdot 10^{42}$). Тогда в новом (нормированном) векторе соответствующая компонента станет равной +1, а

остальные по модулю не будут превосходить единицу. Обозначим нормированный таким способом собственный вектор одной звездочкой:

$$\vec{x}_1^* = [-0,3367 \quad 1 \quad 0,1631]^T;$$

2) делением \vec{x}_1 на его длину (модуль). Полученный таким способом вектор называется нормированным к единичной длине. Мы будем помечать его двумя звездочками.

В нашей задаче

$$|\vec{x}^{(27)}| = \sqrt{(8,82730 \cdot 10^{41})^2 + (-2,62163 \cdot 10^{42})^2 + (-4,27648 \cdot 10^{41})^2} = 2,79912 \cdot 10^{42}$$

и

$$\vec{x}_1^{**} = [0,3154 \quad -0,9366 \quad -0,1528]^T.$$

Длина этого вектора равна 1.

Векторы \vec{x}_1 , \vec{x}_1^* , \vec{x}_1^{**} отличаются друг от друга на некоторый множитель, т.е. имеют разную длину, но одинаковое направление, поэтому каждый из них является собственным вектором заданной матрицы.

Пример определения λ_1 и \vec{x}_1 модифицированным степенным методом

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix}$$

вычислить λ_1 и \vec{x}_1 модифицированным степенным методом с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Зададим тот же начальный вектор $\vec{y}^0 = [5 \quad -2 \quad 1]^T$. Его наибольшая по модулю компонента $y_1^{(0)} = 5$ и имеет номер $s = 1$. Тогда начальный нормированный вектор будет $\vec{x}^{(0)} = [1 \quad -0,4 \quad 0,2]^T$.

Выполним первую итерацию:

$$\bar{y}^{(1)} = \mathbf{A} \bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,36 \\ -11,08 \\ 0,82 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1^{(1)} = y_1^{(1)} = 27,36 \text{ (наибольшая компонента, } s = 1),$$

$$\text{Нормированный вектор } \bar{x}^{(1)} = [1 \quad -0,405 \quad 0,03]^T = \bar{x}_1^{*(1)}.$$

Перейдем ко второй итерации:

$$\bar{y}^{(2)} = \mathbf{A} \bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 25,2 & -4,7 & 1,4 \\ 4,1 & 39,4 & 2,9 \\ -1,3 & 3,1 & 16,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,405 \\ 0,003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,1453 \\ -11,7689 \\ -2,0519 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1^{(2)} = y_1^{(2)} = 27,1453;$$

$$\text{Нормированный вектор } \bar{x}^{(2)} = [1 \quad -0,4336 \quad -0,0756]^T = \bar{x}_1^{*(2)}.$$

Эти и все последующие значения на итерациях сведены в таблицу.

Нахождение λ_1 и \bar{x}_1 модифицированным степенным методом

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$\lambda_1^{(k)} = y_{\max}^{(k)}$	$\varepsilon^{(k)} = \lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)} $	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	5	-2	1			1	-0,4	0,2
1	27,36	-11,08	0,82	27,36		1	-0,405	0,03
2	27,1453	-11,7689	-2,0519	27,1453	0,2147	1	-0,4336	-0,0756
3	27,1319	-13,2012	-3,9139	27,1319	0,0134	1	-0,4866	-0,1443
...
6	28,0866	-23,4296	-7,2375	28,0866	0,4871	1	-0,8342	-0,2577
7	28,7599	-29,5144	-8,2151	28,7599	0,6733	-0,9744	1	0,2783
8	-28,8662	36,2120	9,0429	36,2120	7,4521	-0,7971	1	0,2497
...
26	-12,9664	38,4912	6,2800	38,4912	0,0012	-0,3369	1	0,1632
27	-12,9606	38,4920	6,2789	38,4920	0,0008	-0,3367	1	0,1631

Следует отметить, что наибольшая компонента на 7-й итерации поменяла номер (было $s = 1$, стало $s = 2$).

Остановив вычисления при $\varepsilon^{(k)} \leq \varepsilon$ (это 27-я итерация), получаем следующий результат:

$$\lambda_1 = y_2^{(27)} = 38,492; \bar{x}_1^* = \bar{x}^{(27)} = [-0,3367 \quad 1 \quad 0,1631]^T.$$

Значения λ_1 и \bar{x}_1 получились такими же, как и при решении предыдущим способом.

Индивидуальные задания

Составить матрицу, выбрав элементы из таблицы согласно шифру. Используя степенной итерационный метод и его модификацию, определить наибольшее по модулю собственное значение λ (точность $\varepsilon = 10^{-3}$) и соответствующий ему собственный вектор. Провести нормировку собственного вектора двумя способами. Сделать проверку полученных результатов.

Первая цифра шифра	Элементы матрицы			Вторая цифра шифра	Величина c	Третья цифра шифра	Величина d
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}				
1	2	3	4	5	6	7	8
0	1,034 $15,345 + c$ 2,056	$2,874 - d$ 0,456 5,204	2,504 11,945 13,056	0	0,124	0	1,783
1	4,157 $12,750 - d$ 8,860	0,371 4,218 1,390	0,030 $3,275 + c$ 1,390	1	0,574	1	0,030
2	$1,588 + c$ 14,395 1,390	4,945 4,276 3,495	13,045 1,035 $5,179 + d$	2	1,040	2	-1,940
3	14,023 2,478 $2,239 + c$	5,204 $5,281 + d$ 5,32	2,874 9,010 17,456	3	0,323	3	-0,394
4	13,057 $5,204 + d$ -3,456	15,345 5,397 3,287	7,813 $1,430 + c$ 4,130	4	-0,198	4	1,588
5	$0,371 + c$ 12,385 2,949	4,853 $13,729 - d$ 4,045	2,845 -0,345 1,034	5	0,638	5	0,317
6	4,230 9,394 $2,156 - d$	$3,956 + c$ 15,374 -6,134	1,493 3,245 -4,157	6	0,451	6	1,054
7	8,860 11,945 19,045	19,432 $7,032 + c$ 2,056	0,456 $7,319 + d$ 19,634	7	-1,489	7	1,395
8	2,056 $2,569 + c$ 12,750	4,439 7,845 13,230	$0,045 - d$ 13,845 3,275	8	1,010	8	-3,134
9	2,046 5,170 $4,194 + c$	13,056 4,934 20,423	1,392 $1,945 - d$ 4,679	9	0,513	9	0,039

Лабораторная работа № 5 Решение задачи Коши методами Рунге-Кутта

Цель работы: изучить методы Рунге-Кутта решения одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка и систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

Пример решения задачи Коши для одного ОДУ первого порядка Решить методами первого и второго порядка задачу Коши

$$\dot{y} = 2y/t, y(1) = 0,5$$

на отрезке $[1, 2]$ в узлах с шагом $\Delta t = 0,2$.

Эта задача имеет точное аналитическое решение $y(t) = 0,5t^2$, которое позже используем для сравнения с приближенными результатами.

Решим эту задачу методом Эйлера (метод Рунге-Кутта первого порядка).

Имеем:

1. для первого узла ($i = 1$)

$$k_0 = 2 \frac{y_0}{t_0} = 2 \cdot \frac{0,5}{1} = 1;$$

$$y_1 = y_0 + k_0 \cdot \Delta t = 0,5 + 1 \cdot 0,2 = 0,7.$$

2. для второго узла ($i = 2$)

$$k_1 = 2 \frac{y_1}{t_1} = 2 \cdot \frac{0,7}{1,2} = 1,16667;$$

$$y_2 = y_1 + k_1 \cdot \Delta t = 0,7 + 1,16667 \cdot 0,2 = 0,933333.$$

Аналогично проводятся вычисления для остальных узлов.

Полученные результаты показаны в таблице.

Точное и приближенное решение задачи Коши

i	t_i	Аналитическое решение $y(t_i)$	Метод Эйлера y_i	Метод Рунге-Кутта второго порядка y_i
0	1	0,5	0,5	0,5
1	1,2	0,72	0,7	0,716667
2	1,4	0,98	0,933333	0,972620
3	1,6	1,28	1,2	1,26788
4	1,8	1,62	1,5	1,60246
5	2	2	1,83333	1,97636

Сравнивая их с результатами аналитического расчета, можно заключить, что приближенные значения содержат существенную погрешность, нарастающую по мере увеличения t_i . Для того, чтобы получить этим методом достаточно точное решение, потребуется значительно уменьшить шаг.

Решим теперь эту задачу методом Эйлера с пересчетом (метод Рунге-Кутты второго порядка).

1. для первого узла ($i = 1$)

$$k_0 = 2 \frac{y_0}{t_0} = 2 \cdot \frac{0,5}{1} = 1;$$

$$y_1^* = y_0 + k_0 \cdot \Delta t = 0,5 + 1 \cdot 0,2 = 0,7;$$

$$k_1^* = 2 \frac{y_1^*}{t_1} = 2 \cdot \frac{0,7}{1,2} = 1,16667;$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} (k_0 + k_1^*) \cdot \Delta t = 0,5 + \frac{1}{2} (1 + 1,16667) \cdot 0,2 = 0,716667.$$

2. для второго узла ($i = 2$)

$$k_1 = 2 \frac{y_1}{t_1} = 2 \cdot \frac{0,716667}{1,2} = 1,19445;$$

$$y_2^* = y_1 + k_1 \cdot \Delta t = 0,716667 + 1,19445 \cdot 0,2 = 0,955557;$$

$$k_2^* = 2 \frac{y_2^*}{t_2} = 2 \cdot \frac{0,955557}{1,4} = 1,36508;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2^*) \cdot \Delta t = 0,716667 + \frac{1}{2} (1,19445 + 1,36508) \cdot 0,2 = 0,972620.$$

Аналогично рассчитываются значения y_i в остальных узлах. Анализируя полученные результаты, можно заключить, что погрешность решения при использовании методом Эйлера с пересчетом (метод Рунге-Кутты второго порядка) существенно уменьшилась.

Пример решения задачи Коши для системы двух линейных ОДУ первого порядка

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{y} &= yt + z, & y(0) &= 1, \\ \dot{z} &= t + y, & z(0) &= -0,2 \end{aligned}$$

получив значения y_i, z_i с четырьмя верными значащими цифрами на отрезке $[0, 0,5]$ с шагом $\Delta t = 0,1$.

Для первых двух узлов имеем:

Метод Эйлера (Рунге-Кутта первого порядка)

1. для первого узла ($i = 1$)

$$k_0 = f(t_0, y_0, z_0) = t_0 y_0 + z_0 = 0 \cdot 1 - 0,2 = -0,2;$$

$$l_0 = g(t_0, y_0, z_0) = t_0 + y_0 = 0 + 1 = 1;$$

$$y_1 = y_0 + k_0 \cdot \Delta t = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,98;$$

$$z_1 = z_0 + l_0 \cdot \Delta t = -0,2 + 1 \cdot 0,1 = -0,1.$$

2. для второго узла ($i = 2$)

$$k_1 = f(t_1, y_1, z_1) = t_1 y_1 + z_1 = 0,1 \cdot 0,98 - 0,1 = -0,002;$$

$$l_1 = g(t_1, y_1, z_1) = t_1 + y_1 = 0,1 + 0,98 = 1,08;$$

$$y_2 = y_1 + k_1 \cdot \Delta t = 0,98 - 0,002 \cdot 0,1 = 0,9798;$$

$$z_2 = z_1 + l_1 \cdot \Delta t = -0,1 + 1,08 \cdot 0,1 = 0,008.$$

Метод Эйлера с пересчетом (метод Рунге-Кутта второго порядка)

1. для первого узла ($i = 1$)

$$k_0 = f(t_0, y_0, z_0) = t_0 y_0 + z_0 = 0 \cdot 1 - 0,2 = -0,2;$$

$$l_0 = g(t_0, y_0, z_0) = t_0 + y_0 = 0 + 1 = 1;$$

$$y_1^* = y_0 + k_0 \cdot \Delta t = 1 - 0,2 \cdot 0,1 = 0,98;$$

$$z_1^* = z_0 + l_0 \cdot \Delta t = -0,2 + 1 \cdot 0,1 = -0,1;$$

$$k_1^* = f(t_1, y_1^*, z_1^*) = t_1 y_1^* + z_1^* = 0,1 \cdot 0,98 - 0,1 = -0,002;$$

$$l_1^* = g(t_1, y_1^*, z_1^*) = t_1 + y_1^* = 0,1 + 0,98 = 1,08;$$

$$y_1 = y_0 + 1/2 \cdot (k_0 + k_1^*) \cdot \Delta t = 1 + 1/2 \cdot (-0,2 - 0,002) \cdot 0,1 = 0,9899;$$

$$z_1 = z_0 + 1/2 \cdot (l_0 + l_1^*) \cdot \Delta t = -0,2 + 1/2 \cdot (1 + 1,08) \cdot 0,1 = -0,096.$$

2. для второго узла ($i = 2$)

$$k_1 = f(t_1, y_1, z_1) = t_1 y_1 + z_1 = 0,1 \cdot 0,9899 - 0,096 = 0,00299;$$

$$l_1 = g(t_1, y_1, z_1) = t_1 + y_1 = 0,1 + 0,9899 = 1,0899;$$

$$y_2^* = y_1 + k_1 \cdot \Delta t = 0,9899 + 0,00299 \cdot 0,1 = 0,990199;$$

$$z_2^* = z_1 + l_1 \cdot \Delta t = -0,096 + 1,0899 \cdot 0,1 = 0,01299;$$

$$k_2^* = f(t_2, y_2^*, z_2^*) = t_2 y_2^* + z_2^* = 0,2 \cdot 0,990199 + 0,01299 = 0,21103;$$

$$l_2^* = g(t_2, y_2^*, z_2^*) = t_2 + y_2^* = 0,2 + 0,990199 = 1,190199;$$

$$y_2 = y_1 + 1/2 \cdot (k_1 + k_2^*) \cdot \Delta t = 0,9899 + 1/2 \cdot (0,00299 + 0,211032) \cdot 0,1 = 1,000601;$$

$$z_2 = z_1 + 1/2 \cdot (l_1 + l_2^*) \cdot \Delta t = -0,096 + 1/2 \cdot (1,0899 + 1,190199) \cdot 0,1 = 0,018005.$$

Значения y_i и z_i в остальных узлах рассчитываются аналогично. Полученные результаты показаны в таблице и на рисунке. Как видно, значения, полученные двумя методами, отличаются между собой и, конечно же, от истинных значений.

Приближенное решение задачи Коши

i	t_i	Метод Эйлера (Рунге-Кутта первого порядка)		Метод Эйлера с пересчетом (Рунге-Кутта второго порядка)	
		y_i	z_i	y_i	z_i
0	0	1	-0,2	1	-0,2
1	0,1	0,98	-0,1	0,9899	-0,096
2	0,2	0,9798	0,008	1,000601	0,018005
3	0,3	1,000196	0,12598	1,033747	0,144156
4	0,4	1,0428	0,256	1,091921	0,284802
5	0,5	1,110112	0,40028	1,178801	0,442602

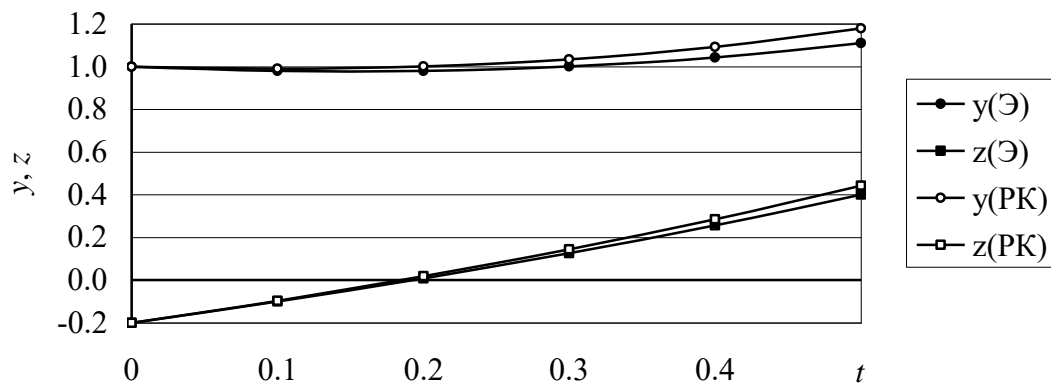


Рисунок. Приближенные значения искомых функций в задаче Коши

Повысить точность полученного решения можно, уменьшив шаг. Однако это потребует огромной вычислительной работы, особенно для метода первого порядка. Для сокращения числа арифметических действий надо стремиться к использованию метода более высокого порядка. Хотя на каждом шаге он требует выполнения большего числа действий, их общее количество для достижения результата той же точности оказывается меньшим. Еще большего снижения трудоемкости можно добиться при использовании метода четвертого порядка (необходимые формулы можно найти в литературе по численным методам).

Применение методов Рунге-Кутта к решению ОДУ второго и старшего порядков

Методы Рунге-Кутта предназначены для решения отдельных дифференциальных уравнений первого порядка и систем таких уравнений. Если же возникает необходимость в решении уравнений второго или старших порядков, то исходную задачу Коши надо предварительно преобразовать, заменив уравнение n -го порядка с одной неизвестной функцией – системой n уравнений первого порядка с n неизвестными функциями. Соответственно этому изменяются и начальные условия.

В качестве примера рассмотрим задачу Коши, которой описываются вынужденные колебания системы с одной степенью свободы. Пусть в произвольной точке однопролетной балки (рисунок) установлен электромотор, деревообрабатывающий станок либо иное механическое устройство с массой m . От веса этого устройства балка изгибается, занимая положение статического равновесия, показанное на рисунке штрихпунктирной линией. Когда устройство работает, оно создает динамическую нагрузку $P = P(t)$, под действием которой масса (а с ней и балка) совершает колебания вверх-вниз около положения статического равновесия (штриховые

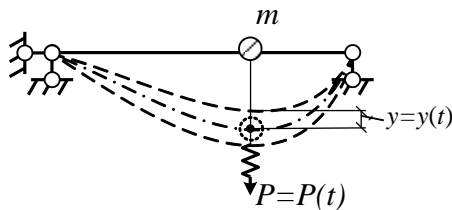


Рисунок. Динамическая система с одной степенью свободы

линии).

Масса балки обычно мала по сравнению с массой установленного на ней устройства. Пренебрегая ею, мы получаем систему с одной степенью свободы. Из динамики известно, что вынужденные колебания такой системы описываются следующей задачей Коши:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + ry &= P(t), \\ y(t_0) &= y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \end{aligned}$$

где m – масса устройства, кг; b – коэффициент сопротивления, величина которого зависит, главным образом, от того, в какой среде происходят колебания (воздухе, воде, машинном масле и т.д.), кг/с; r – коэффициент жесткости балки в точке расположения устройства; численно равен той силе, которую нужно приложить вместо массы, чтобы балка в той точке получила единичное перемещение, кг/см²; $P(t)$ – динамическая нагрузка – сила, меняющаяся во времени свою величину по некоторому известному закону H ; $y_0, \dot{y}(0)$ – начальное перемещение (м) и начальная скорость (м/с) массы, т.е. перемещение и скорость в момент времени $t = t_0$.

Таким образом, имеем задачу Коши для уравнения второго порядка. Ее решение следует начать с преобразования. Для этого введем обозначение

$$\dot{y} = z,$$

которое одновременно рассматривается как первое уравнение преобразованной задачи. Второе уравнение получается из заданного, проведя в нем замены $\ddot{y} = \dot{z}$ и $\dot{y} = z$:

$$m\dot{z} + bz + ry = P(t)$$

или

$$\dot{z} = \frac{1}{m}[P(t) - bz - ry].$$

Первое начальное условие $y(t_0) = y_0$ полностью подходит новой задаче, а второе $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ требует изменения: $z(t_0) = z_0$, где z_0 численно равно \dot{y}_0 .

Окончательно преобразованная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z, & y(t_0) &= y_0, \\ \dot{z} &= \frac{1}{m}[P(t) - bz - ry], & z(t_0) &= z_0 = \dot{y}_0. \end{aligned}$$

Если сравнить ее с записью задачи Коши из (3.3), то в данном случае

$$\begin{aligned} f(t, y, z) &= z, \\ g(t, y, z) &= \frac{1}{m}[P(t) - bz - ry]. \end{aligned}$$

Теперь ее можно решать методами Рунге-Кутты.

Следует особо отметить, что при численном решении этой задачи мы вынуждены находить не только узловые значения y_i , как того требует исходная задача, но и z_i . Это как бы побочный продукт, вызванный нашим неумением численно решать уравнения второго и старшего порядков.

Индивидуальные задания

Используя шифр, выбрать из таблицы данные к задаче Коши для динамической системы с одной степенью свободы

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + ry &= P(t) \\ y(t_0) &= y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \end{aligned}$$

Решить ее методами Рунге-Кутты первого и второго порядка. Результаты представить в виде таблиц и графиков. Сравнить полученные результаты.

Шифр	1 цифра шифра			2 цифра шифра			3 цифра шифра		
	m	b	r	$P(t)$	\dot{y}_0	y_0	t_0	t_k	Δt
1	3,0	0,1	2,4	$\sin(t) + 6,4$	0,1	1,0	0	1	0,1
2	3,5	0,3	2,7	$\sin(2 \cdot t) - t$	-0,2	-3,0	0,1	2,1	0,2
3	4,0	0,5	3,0	$4 \cdot \sin(2 \cdot t)$	0,3	5,0	0,2	3,2	0,3
4	4,5	0,7	3,3	$6 \cdot \cos(3 \cdot t)$	-0,4	-7,0	0,3	4,3	0,4
5	5,0	0,9	3,6	$5 \cdot (t^2 - \cos(t))$	0,5	1,5	0,4	5,4	0,5
6	5,5	0,2	3,9	$6 \cdot t - \cos(2 \cdot t)$	-0,6	-2,6	0,5	2,0	0,15
7	6,0	0,4	4,2	$7 \cdot \sin(3 \cdot t)$	0,7	8,0	0,6	3,1	0,25
8	6,5	0,6	4,5	$8 \cdot \cos(2 \cdot t)$	-0,8	-6,0	0,7	4,2	0,35
9	7,0	0,8	4,8	$0,5 \cdot t^2 + 7,3$	0,9	4,0	0,8	4,8	0,4
0	7,5	1,0	5,1	$-0,2 \cdot t + 6,5$	-1,0	2,0	0,9	5,4	0,45

Лабораторная работа № 6

Решение краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений методом конечных разностей

Цель работы: применить метод конечных разностей к решению краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений.

Пример решения линейного ОДУ с заданными краевыми условиями методом конечных разностей

Задача. Решить методом конечных разностей краевую задачу

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^3$$

$$y(1) = 1,1; y(2) = -0,5$$

при числе шагов $m = 4$.

Решение.

1. Отрезок $[a, b]$, где $a = 1; b = 2$, разбиваем на $m = 4$ частей (шагов) длиной

$$\Delta x = (2 - 1)/4 = 0,25.$$

Узлы нумеруем слева направо от 1 до 5. Неизвестными являются величины y_2, y_3, y_4 (рисунок). Известные величины – $y_1 = y_a = 1,1$ (при $x_1 = 1$) и $y_5 = y_b = -0,5$ (при $x_5 = 2$).

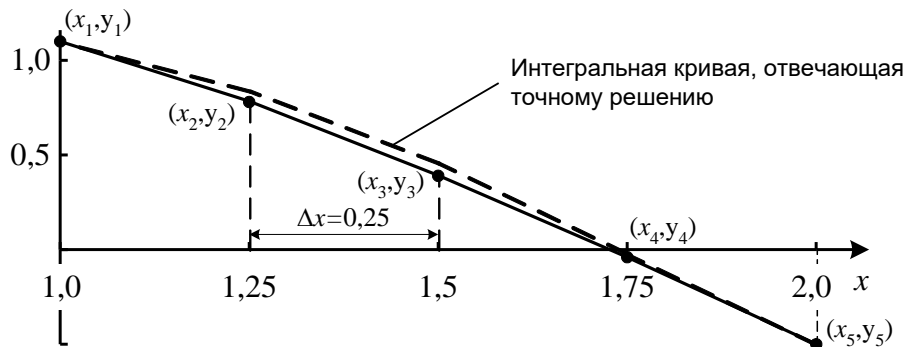


Рисунок. К решению краевой задачи

2. Используя конечно-разностные выражения для первой и второй производной искомой функции, преобразуем исходное дифференциальное уравнение:

$$x_i^2 \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{\Delta x^2} - 2x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta x} + 2y_i = x_i^3.$$

Умножая все уравнения на Δx^2 и приводя подобные слагаемые, получим

$$(x_i^2 + x_i \cdot \Delta x)y_{i-1} + 2(\Delta x^2 - x_i^2)y_i + (x_i^2 - x_i \cdot \Delta x)y_{i+1} = x_i^3 \cdot \Delta x^2.$$

Учитывая, что $\Delta x = 0,25$; $x_2 = 1,25$; $x_3 = 1,5$; $x_4 = 1,75$, составляем систему трех алгебраических уравнений:

$i = 2$:

$$(1,25^2 + 1,25 \cdot 0,25)y_1 + 2(0,25^2 - 1,25^2)y_2 + (1,25^2 - 1,25 \cdot 0,25)y_3 = 1,25^3 \cdot 0,25^2;$$

$i = 3$:

$$(1,5^2 + 1,5 \cdot 0,25)y_2 + 2(0,25^2 - 1,5^2)y_3 + (1,5^2 - 1,5 \cdot 0,25)y_4 = 1,5^3 \cdot 0,25^2;$$

$i = 4$:

$$(1,75^2 + 1,75 \cdot 0,25)y_3 + 2(0,25^2 - 1,75^2)y_4 + (1,75^2 - 1,75 \cdot 0,25)y_5 = 1,75^3 \cdot 0,25^2;$$

Вычисляем значения коэффициентов и записываем СЛАУ:

$$\begin{array}{rclcl} 1,875y_1 & -3y_2 & +0,9375y_3 & = & 0,122070 \\ 2,625y_2 & -4,375y_3 & +1,875y_4 & = & 0,210938 \\ & 3,5y_3 & -6y_4 & +2,625y_5 & = 0,334961. \end{array}$$

Получили систему трех уравнений с пятью узловыми значениями искомой функции: y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 .

3. Для того, чтобы избавиться от «лишних» переменных, воспользуемся значениями искомой функции на краях заданного отрезка.

Вместо y_1 в первом уравнении подставляем значение $y_a = 1,1$, а вместо y_5 в третьем уравнении – значение $y_b = -0,5$. Переносим числа $1,875 \cdot 1,1$ и $2,625 \cdot (-0,5)$ в правую часть соответственно первого и третьего уравнений и алгебраически складывая их со стоящими там свободными членами, окончательно получим квадратную СЛАУ третьего порядка и ленточной (трехдиагональной) структуры:

$$\begin{array}{rclcl} -3y_2 & +0,9375y_3 & & = & -1,94043 \\ 2,625y_2 & -4,375y_3 & +1,875y_4 & = & 0,210938 \\ & 3,5y_3 & -6y_4 & = & 1,64746. \end{array}$$

4. Решая полученную систему любым из известных методов, находим

$$y_2 = 0,770252; y_3 = 0,395015; y_4 = -0,0441510.$$

Тогда исходная задача имеет следующее решение:

$$y = (1,1; 0,770252; 0,395015; -0,0441510; -0,5) \text{ при } x = (1; 1,25; 1,5; 1,75; 2).$$

По этим значениям на рисунке построена сплошная линия.

Рассмотренная краевая задача имеет точное аналитическое решение

$$y(x) = 0,5x(6,9 - 5,7x + x^2),$$

которому отвечает пунктирная линия на рисунке. При этом

$$y(x_2) = 0,835938; y(x_3) = 0,45; y(x_4) = -0,0109375.$$

Как и ожидалось, метод конечных разностей при столь большом шаге дает только качественно правильное решение.

Индивидуальные задания

Задана краевая задача, состоящая из линейного ОДУ второго порядка

$$y''(x) + ky(x) = f(x)$$

и двух краевых условий $y(x=0) = 0$ и $y(x=l) = 0$. Значения $k = k^*(\pi/l)^2$, l и выражение $f(x)$ принимаются исходя из шифра по таблице. Используя метод конечных разностей при числе интервалов $m = 4$, составить таблицу с результатами и построить график функции $y = y(x)$.

Первая цифра шифра	k^*	Вторая цифра шифра	l	Третья цифра шифра	$f(x)$
1	2	3	4	5	6
0	0,65	0	7,6	0	$\frac{0,01}{l}(x^2 - lx)$
1	0,45	1	5,6	1	$\frac{-0,15}{l^2} x \sin \frac{\pi x}{l}$
2	0,5	2	8,4	2	$\frac{8(l-3x)}{l^3(x+1)}$
3	0,55	3	6,4	3	$\frac{x^3 - l^2 x}{25l^2}$
4	0,8	4	6,8	4	$-\frac{x}{5l^2} \ln\left(\frac{2x}{l} + 1\right)$

1	2	3	4	5	6
5	0,6	5	7,2	5	$\frac{-1,5}{l^3} \sqrt{\frac{x}{l} + 2}$
6	0,35	6	6,0	6	$-1,5 \frac{\sqrt{x}}{l^3} \sin \frac{\pi x}{l}$
7	0,75	7	8,8	7	$\frac{2lx^2 - x^3 - l^3}{100l^2}$
8	0,7	8	8,0	8	$\frac{15 \ln(x^2 + 2)}{l^3(x - 2l)}$
9	0,4	9	5,2	9	$\frac{3}{l^3} \left(\frac{4x}{l} - 3 \right)$

Лабораторная работа №7
Численные методы оптимизации.
Графический метод решения задач линейного программирования

Цель работы: изучить графический метод решения задач линейного программирования.

Пример решения ЗЛП графическим методом

Рассмотрим алгоритм решения:

$$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix};$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 - x_2 \geq -2;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0,$$

где условие неотрицательности наложено только на первую неизвестную. По существу, здесь две задачи: одна – это задача минимизации Z , а вторая – максимизации Z .

Решение состоит из четырех этапов.

Этап 1. Построение области допустимых решений.

Областью допустимых решений (ОДР) в задаче с двумя неизвестными называется пересечение полуплоскостей, определяемых ограничениями и условиями неотрицательности. Иначе говоря, это область на плоскости x_1Ox_2 , состоящая из точек, координаты которых удовлетворяют как всем ограничениям, так и условиям неотрицательности.

Первое ограничение $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ определяет первую полуплоскость. Чтобы найти ее, нужно сначала построить граничную прямую $3x_1 + 4x_2 = 12$. В данном случае она проходит через точки $(0,3)$ и $(4,0)$ (рисунок). Влево и вниз от нее идет одна бесконечная полуплоскость, а вправо и вверх – вторая полуплоскость. Для ответа на вопрос «какая из полуплоскостей отвечает ограничению $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ » возьмем какую-нибудь пробную точку. Если граничная прямая не проходит через начало координат, то в качестве пробной точки проще всего использовать именно начало координат, т.е. точку $(0,0)$. Подставляя эти координаты в левую часть первого ограничения, получаем $0 < 12$. Таким образом, искомая полуплоскость включает начало координат. Направление полуплоскости показываем стрелками, рядом с которыми пишем номер ограничения.

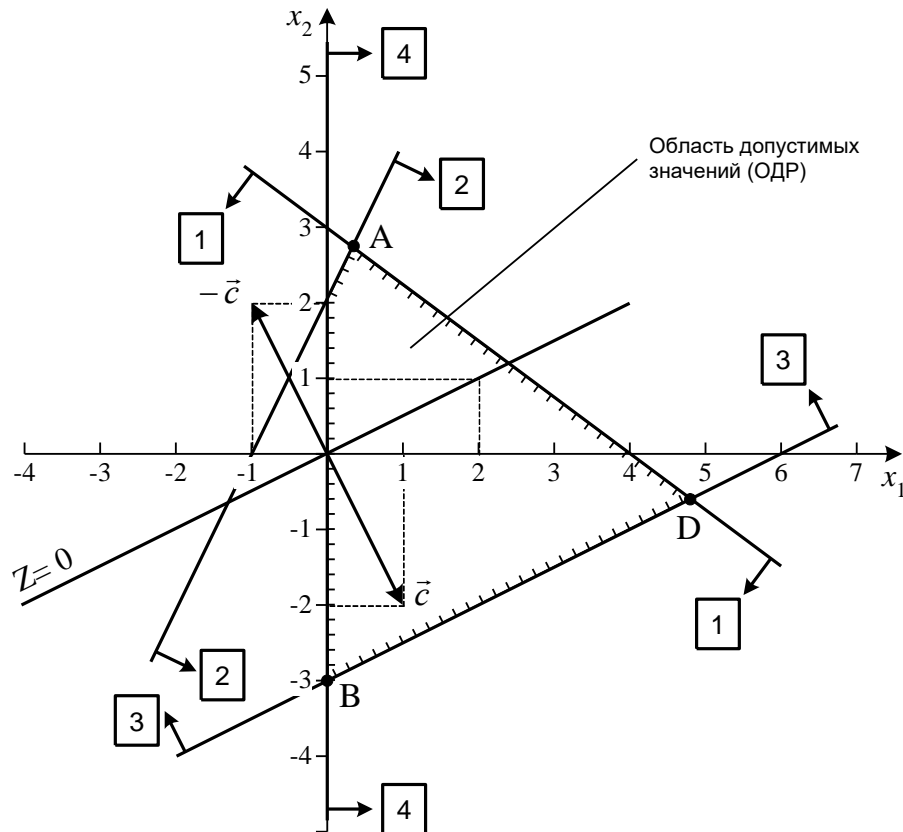


Рисунок. Графическое решение ЗЛП с двумя неизвестными

Аналогично строятся полуплоскости 2 и 3. Условие неотрицательности $x_1 \geq 0$ дает четвертую полуплоскость.

Фигура, очерченная четырьмя граничными прямыми, и есть ОДР. Она представляет собой замкнутую выпуклую область.

Этап 2. Построение линии уровня $Z = 0$.

Линией уровня некоторой функции называется такая линия, во всех точках которой значение этой функции одинаково.

Линия уровня функции цели при $Z = 0$ — это прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ или, в нашем случае, $x_1 - 2x_2 = 0$. Ее график проходит через начало координат $(0,0)$ и, например, точку с координатами $(2,1)$. Во всех точках этой линии $Z = 0$.

Этап 3. Построение вектора-градиента (или вектора-антиградиента).

Вектором-градиентом некоторой функции нескольких переменных называется вектор, указывающий направление наискорейшего возрастания функции. Компоненты вектора-градиента равны частным производным от функции по всем ее переменным. В ЗЛП с двумя переменными $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ и

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \partial Z / \partial x_1 \\ \partial Z / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

В рассматриваемой задаче $\vec{c} = [1, -2]^T$.

Соответственно **вектор-антиградиент** указывает направление наискорейшего убывания функции цели:

$$-\vec{c} = \begin{bmatrix} -\partial Z / \partial x_1 \\ -\partial Z / \partial x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix}.$$

В нашей задаче $-\vec{c} = [-1, 2]^T$.

Чтобы построить \vec{c} , от начала координат откладываем вдоль x_1 первую координату, равную $+1$, а вдоль x_2 – вторую, равную -2 . На этих отрезках строим прямоугольник, диагональ которого, снабженная направлением, и есть искомым вектор-градиент. Он перпендикулярен линии уровня функции цели. Аналогично строится $-\vec{c}$, который направлен в сторону, противоположную \vec{c} .

Этап 4А. Решение задачи минимизации Z .

Если линию уровня перемещать параллельно самой себе в направлении вектора-антиградиента, то функция цели будет убывать, принимая отрицательные значения все большего модуля. И это будет продолжаться до тех пор, пока линия уровня не коснется крайней точки ОДР, а именно, вершины A . Координаты этой вершины и являются искомым решением задачи минимизации Z . Для их определения надо решить систему двух уравнений, соответствующих первой и второй граничным прямым:

$$3x_1 + 4x_2 = 12$$

$$2x_1 - x_2 = -2,$$

откуда $x_1 = 4/11 = 0,363636$, $x_2 = 30/11 = 2,72727$ (эти значения называются оптимальным планом при решении задачи минимизации Z).

Функция цели принимает в оптимальной вершине A значение

$$\min Z = 4/11 - 2 \cdot 30/11 = -56/11 = -5,09091.$$

Этап 4В. Решение задачи максимизации Z .

Чтобы найти оптимальный план в задаче максимизации Z , линию уровня надо перемещать в направлении вектора-градиента. При этом

функция цели будет возрастать. Перемещение линии уровня надо проводить до того момента, пока она не коснется крайней точки ОДР.

Но данная задача имеет ту особенность, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, а именно стороне BD . Поэтому при поступательном движении линия уровня коснется границы ОДР в бесконечно большом количестве точек – в точках B, D и во всех промежуточных точках. Отсюда следует, что задача максимизации Z в данном случае имеет бесконечное множество решений: оптимальным планом являются координаты любой точки отрезка BD .

Возьмем для определенности в качестве оптимальной вершины точку B . Ее координаты (оптимальный план) видны на чертеже:

$$x_1 = 0, x_2 = -3, \max Z = 0 - 2 \cdot (-3) = 6.$$

Выполнение индивидуальных заданий

Решить графически задачу линейного программирования с двумя неизвестными. Исходные данные выбрать из таблицы в соответствии с шифром.

Первая цифра шифра	Коэффициенты функции цели	Вторая цифра шифра	Ограничения	Третья цифра шифра	d
1	2	3	4	5	6
0	$c_1 = d$ $c_2 = 8$	0	$3x_1 + 5x_2 \geq 2(2 + d)$ $2x_1 - x_2 \geq 2$ $x_1 - x_2 \leq 3$	0	2,0
1	$c_1 = -2$ $c_2 = 2d$	1	$-2x_1 + 1,5x_2 \geq 6$ $x_1 \leq -1$ $x_1 + x_2 \geq 2(2 - d)$ $3x_1 + 2x_2 \leq 12$	1	2,5
2	$c_1 = 1,5d$ $c_2 = -3$	2	$4x_1 + 3x_2 \leq -12$ $2dx_2 \leq 6$ $x_1 \geq -7$ $-2x_1 + x_2 \leq 4$	2	3,0
3	$c_1 = -4$ $c_2 = -2,5d$	3	$x_1 - 4x_2 \geq 0$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $x_1 \leq d - 2$	3	3,5
4	$c_1 = 2d$ $c_2 = 5$	4	$x_1 \geq -1$ $2x_1 - 3x_2 \geq 6$ $x_1 + x_2 \geq -5$ $4x_1 + x_2 \leq 20 - d$	4	4,0
5	$c_1 = -6$ $c_2 = 2d$	5	$-x_1 - 2x_2 \leq 8$ $x_1 - 2x_2 \geq -6$ $dx_2 \leq 10$ $7x_1 - 4x_2 \leq 28$	5	3,5
6	$c_1 = d$ $c_2 = -7$	6	$-dx_1 + x_2 \leq 0$ $x_1 - 4x_2 \geq 0$ $x_1 - 2x_2 \leq 8$	6	3,0

1	2	3	4	5	6
7	$c_1 = -8$ $c_2 = -3d$	7	$2x_1 + x_2 \geq 6$ $x_1 - x_2 \leq 2$ $x_1 \geq 3 - d$	7	2,5
8	$c_1 = 6$ $c_2 = -d$	8	$2x_1 - 3x_2 \leq 6$ $x_1 + x_2 \geq 3$ $-x_1 + x_2 \leq 2$ $x_2 \leq d + 3$	8	2,0
9	$c_1 = -5$ $c_2 = 2d$	9	$-x_1 + 2x_2 \leq 10$ $x_1 + x_2 \geq d$ $2x_1 - x_2 \leq 4$	9	4,0

Указание к работе. Функция цели в задаче может достигать как максимума, так и минимума. Таким образом, надо решать две ЗЛП. Условия неотрицательности на переменные x_1 и x_2 не накладываются.

Лабораторная работа № 8

Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Цель работы: изучить симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Пример решения ЗЛП симплекс-методом

Рассмотрим задачу из предыдущей лабораторной работы:

$$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \begin{matrix} \min \\ \max \end{matrix};$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 - x_2 \geq -2;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0.$$

При такой постановке эта задача состоит из двух отдельных задач: минимизации Z и максимизации Z .

Мы будем рассматривать первую из них – минимизации Z .

$$Z = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12;$$

$$2x_1 - x_2 \geq -2;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6;$$

$$x_1 \geq 0.$$

Сравнив условие задачи и требования при записи канонической формы, видно, что в ней нарушаются все четыре правила. Сделаем преобразования.

1) Чтобы от задачи минимизации перейти к задаче на максимум, надо функцию цели умножить на -1 . Тогда первая часть исходной задачи в новой постановке будет выглядеть так:

$$(-Z) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max.$$

После решения новой задачи и определения $\max(-Z)$ минимальное значение Z определяется как $\min(Z) = -\max(-Z)$.

2) Если ограничение содержит знак \leq , то к его левой части нужно добавить некоторую новую неотрицательную переменную. Тогда вместо заданного ограничения мы получаем две записи, включающие собственно ограничение со знаком $-$ и условие неотрицательности дополнительной переменной. Соответственно, если ограничение имеет знак \geq , то от левой части отнимается новая неотрицательная переменная.

Преобразуем ограничения в исходной задаче:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 \leq 12 & \Rightarrow 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \text{ где } x_3 \geq 0; \\ 2x_1 - x_2 \geq -2 & \Rightarrow 2x_1 - x_2 - x_4 = -2, \text{ где } x_4 \geq 0; \\ x_1 - 2x_2 \leq 6 & \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \text{ где } x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

3) Если ограничение имеет отрицательный свободный член, то оно умножается на -1 . В данном случае изменит свой вид второе ограничение:

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 2, x_4 \geq 0$$

4) Если на какую-нибудь переменную не наложено условие неотрицательности, то она заменяется разностью двух неотрицательных величин.

В исходной задаче условие неотрицательности задано только для переменной x_1 . Для переменной x_2 такое условие не указано. Тогда

$$x_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)}, \text{ где } x_2^{(1)} \geq 0 \text{ и } x_2^{(2)} \geq 0.$$

Собирая и редактируя снова всю задачу, получаем окончательно

$$\begin{aligned} (-Z) &= -x_1 + 2x_2^{(1)} - 2x_2^{(2)} \rightarrow \max \\ 3x_1 + 4x_2^{(1)} - 4x_2^{(2)} + x_3 &= 12 \\ -2x_1 + x_2^{(1)} - x_2^{(2)} + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2^{(1)} + 2x_2^{(2)} + x_5 &= 6 \\ x_1 \geq 0, x_2^{(1)} \geq 0, x_2^{(2)} \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Видно, что представив ЗЛП в каноническом виде, размерность задачи (т.е. число неизвестных) возросла с двух до шести.

Запись начальной жордановой таблицы

Чтобы записать начальную жорданову таблицу, преобразуем исходную задачу еще раз, представив функцию цели в виде

$$(-Z) = 1 \cdot (-x_1) - 2 \cdot (-x_2^{(1)}) + 2 \cdot (-x_2^{(2)}) + 0 \cdot (-x_3) + 0 \cdot (-x_4) + 0 \cdot (-x_5),$$

а ограничения в виде так называемых нуль-строк:

$$\begin{aligned} 0 &= 12 + 3 \cdot (-x_1) + 4 \cdot (-x_2^{(1)}) + (-4) \cdot (-x_2^{(2)}) + 1 \cdot (-x_3); \\ 0 &= 2 - 2 \cdot (-x_1) + 1 \cdot (-x_2^{(1)}) - 1 \cdot (-x_2^{(2)}) + 1 \cdot (-x_4); \\ 0 &= 6 + 1 \cdot (-x_1) - 2 \cdot (-x_2^{(1)}) + 2 \cdot (-x_2^{(2)}) + 1 \cdot (-x_5). \end{aligned}$$

Эти выражения получены переносом всех слагаемых в правую часть ограничений.

Начальная жорданова таблица (таблица А) состоит из верха, где расположены все шесть переменных, трех нуль-строк, соответствующих трем ограничениям, и Z-строки. В левом столбце помещены нули и наименование функции цели. Во втором столбце – свободные члены ограничений и функции цели (последний в начальной таблице обычно равен нулю). Условия неотрицательности переменных в таблицу не заносятся.

Таблица А.

Начальная жорданова таблица

		$-x_1$	$-x_2^{(1)}$	$-x_2^{(2)}$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$0=$	12	3	4	-4	1	0	0
$0=$	2	-2	1	-1	0	1	0
$0=$	6	1	-2	2	0	0	1
$(-Z)=$	0	1	-2	2	0	0	0

Нахождение начального плана

Начальный план – это координаты любой вершины ОДР. Чтобы его найти, надо все нули в левом столбце заместить переменными с верха таблицы. Делается это с помощью жордановых исключений.

Чтобы некоторая переменная могла быть перенесена, в ее столбце (исключая элемент Z-строки) должен быть положительный коэффициент; он принимается за разрешающий элемент. Если в столбце два и более положительных коэффициентов, то за разрешающий элемент берется тот, который соответствует минимальному отношению свободного члена к коэффициенту столбца. Кроме того, место в левом столбце, куда собираются перенести неизвестную, не должно быть занято ранее перенесенной неизвестной.

При переносе переменной с верха таблицы на ее место должен стать нуль. Это означает умножение столбца на нуль. Поэтому в новой таблице этот столбец вычеркивается. Элементы остальных столбцов и Z-строки преобразуются по второму и четвертому правилам жордановых исключений.

В таблице А переменная x_1 может быть перенесена в первую или третью строки (надо уточнить, в какую именно), $x_2^{(1)}$ – в первую либо вторую, $x_2^{(2)}$ – только в третью, x_3 – в первую, x_4 – во вторую, x_5 – в третью.

Начнем с x_1 . В столбце этой переменной два положительных коэффициента: 3 и 1. Один из них должен быть взят за разрешающий элемент. Это определяется по наименьшему симплексному соотношению. Разделим свободный член первой строки 12 на 3, получим 4. А частное от деления свободного члена третьей строки 6 на 1 равно 6, т.е. больше. Поэтому за разрешающий элемент берем 3 (в таблице А он выделен). Это значит, что x_1 переносится в первую строку.

Первая жорданова таблица (таблица Б) имеет на один столбец меньше. Коэффициенты первой (разрешающей) строки получены по второму правилу жордановых исключений. Коэффициенты второй, третьей и Z-строки преобразованы, как прочие элементы (правило 4). При вычислении коэффициентов первой жордановой таблицы использованы (для наглядности) простые дроби.

Таблица Б.

Первая жорданова таблица

		$-x_2^{(1)}$	$-x_2^{(2)}$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	4	4/3	-4/3	1/3	0	0
$0 =$	10	11/3	-11/3	2/3	1	0
$0 =$	2	-10/3	10/3	-1/3	0	1
$(-Z) =$	-4	-10/3	10/3	-1/3	0	0

Далее попробуем перенести $x_2^{(2)}$. В соответствующем столбце один положительный коэффициент (10/3), и место в третьей строке не занято. Следовательно, такой перенос возможен. Используя разрешающий элемент 10/3 (в таблице Б он выделен), строим вторую жорданову таблицу (таблица В).

Таблица В.

Вторая жорданова таблица

		$-x_2^{(1)}$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
$x_1 =$	4,8	0	0,2	0	0,4
$0 =$	12,2	0	0,3	1	1,1
$x_2^{(2)} =$	0,6	-1	-0,1	0	0,3
$(-Z) =$	-6	0	0	0	-1

Остается заместить нуль во второй строке. Проще всего это сделать, перенеся сюда x_4 : в соответствующем столбце – один положительный коэффициент и именно во второй строке. Принимаем его за разрешающий и строим третью жорданову таблицу (таблица Г).

Таблица Г.

Третья жорданова таблица

		$-x_2^{(1)}$	$-x_3$	$-x_5$
$x_1 =$	4,8	0	0,2	0,4
$x_4 =$	12,2	0	0,3	1,1
$x_2^{(2)} =$	0,6	-1	-0,1	0,3
$(-Z) =$	-6	0	0	-1

Итак, все нули в левом столбце замещены. Мы пришли в одну из вершин ОДР, называемую начальной. Чтобы найти ее координаты (начальный план), надо перенесенные в левый столбец переменные приравнять соответствующим свободным членам ограничений ($x_1 = 4,8$; $x_4 = 12,2$; $x_2^{(2)} = 0,6$), а оставшиеся наверху таблицы свободные переменные приравнять нулю ($x_2^{(1)} = x_3 = x_5 = 0$). Функция цели в этой вершине ($-Z = -6$).

Следует отметить, что если бы мы изменили принятый выше порядок переноса неизвестных, то получили бы другую начальную вершину в ОДР.

Нахождение оптимального плана

Достигнутую вершину или план $x_1 = 4,8$; $x_2^{(1)} = 0$; $x_2^{(2)} = 0,6$; $x_3 = 0$; $x_4 = 12,2$; $x_5 = 0$, при котором ($-Z = -6$), надо исследовать на оптимальность. Делается это очень просто. Надо просмотреть коэффициенты Z – строки (в таблице Г, это 0 ; 0 ; -1). Если среди них имеется хотя бы один отрицательный (а у нас он есть и равен -1), то достигнутая вершина и соответствующий ей план не является оптимальным.

Нужно перейти к другой вершине. В качестве разрешающего столбца берется тот столбец, в котором находится отрицательный коэффициент функции цели. У нас это последний столбец. В нем три положительных коэффициента. (Если бы в этом столбце не оказалось ни одного положительного коэффициента, то это свидетельствовало бы о том, что данная задача решения не имеет). Из трех положительных коэффициентов один надо выбрать в качестве разрешающего элемента. Для этого находим три частных: $4,8/0,4 = 12$; $12,2/1,1 = 11,0909$; $0,6/0,3 = 2$. Наименьшее из них – последнее. Отсюда разрешающая строка – третья. На ее пересечении с разрешающим столбцом стоит разрешающий элемент $0,3$, выделенный в таблице Г.

Переходим к четвертой жордановой таблице (таблица Д), в которой неизвестная x_5 перешла в левый столбец, а на ее место стала $x_2^{(2)}$. Коэффициенты новой таблицы находятся по четырем правилам жордановых исключений.

Таблица Д.

Четвертая жорданова таблица

		$-x_2^{(1)}$	$-x_3$	$-x_2^{(2)}$
$x_1 =$	4	4/3	1/3	-4/3
$x_4 =$	10	11/3	2/3	-11/3
$x_5 =$	2	-10/3	-1/3	10/3
$(-Z) =$	-4	-10/3	-1/3	10/3

Достигли новой вершины с координатами $x_1 = 4$; $x_2^{(1)} = 0$; $x_2^{(2)} = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 10$; $x_5 = 2$. Функция цели ($-Z$) выросла с -6 до -4 . Этот план также не

является оптимальным, т.к. среди коэффициентов Z – строки имеются отрицательные ($-10/3$ и $-1/3$).

Надо перейти к следующей вершине ОДР. Поскольку в Z – строке два отрицательных коэффициента, то за разрешающий столбец берем тот, в котором стоит отрицательный коэффициент с большим модулем ($-10/3$). В разрешающем столбце имеются два положительных коэффициента. Находим частные $4 \cdot 3/4 = 3$ и $10 \cdot 3/11 = 2,72727$. Вторая величина меньше. Поэтому разрешающая строка – вторая, разрешающий элемент равен $11/3$.

Переходим к пятой жордановой таблице (таблица Е), меняя местами x_4 и $x_2^{(1)}$.

Таблица Е.

Пятая жорданова таблица

		$-x_4$	$-x_3$	$-x_2^{(2)}$
$x_1 =$	$4/11$	$-4/3$	$1/11$	0
$x_2^{(1)} =$	$30/11$	$3/11$	$2/11$	-1
$x_5 =$	$122/11$	$10/11$	$3/11$	0
$(-Z) =$	$56/11$	$10/11$	$3/11$	0

Достигли вершины с координатами $x_1 = 4/11$; $x_2^{(1)} = 30/11$; $x_2^{(2)} = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 122/11$. Функция цели выросла до $(-Z) = 56/11$. Т.к. среди коэффициентов Z – строки нет отрицательных, полученный план является оптимальным. Переходя к исходным неизвестным, получаем окончательный результат:

$$x_1 = 4/11 = 0,363636; x_2 = x_2^{(1)} - x_2^{(2)} = 30/11 = 2,72727;$$

$$\min Z = -\max(-Z) = -56/11 = -5,09091.$$

Выполнение индивидуальных заданий

Используя исходные данные к лабораторной работе № 7, выполнить свой вариант задания, используя симплекс-метод.

Указание к работе. Функция цели в задаче исследуется на максимум. Условия неотрицательности на переменные x_1 и x_2 не накладываются.

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

Вопросы для подготовки к экзамену по учебной дисциплине
«Численные методы решения задач»

1. Этапы решения задач численными методами. Основные понятия алгебры матриц. Виды матриц.
2. Действия с матрицами. Вычисление определителя матрицы.
3. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), определение, виды СЛАУ. Решение СЛАУ матричным методом.
4. Решение СЛАУ методом Гаусса. Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.
5. Решение СЛАУ методом LU разложения.
6. Вычисление определителя матрицы методом Гаусса. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.
7. Решение СЛАУ методом простой итерации.
8. Решение СЛАУ методом ускоренной итерации.
9. Собственные значения и собственные вектора матрицы. Полная и частичная проблема. Спектр и спектральный радиус матрицы.
10. Нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы и соответствующего ему собственного вектора степенным методом.
11. Нахождение наибольшего по модулю собственного значения матрицы и соответствующего ему собственного вектора модифицированным степенным методом.
12. Общие сведения об обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). Общее и частное решение ОДУ. Постановка задачи Коши для ОДУ n -порядка.
13. Нормальная система ОДУ. Постановка задачи Коши для нормальной системы ОДУ.
14. Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методом Эйлера.
15. Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методом Эйлера с пересчетом.
16. Решение задачи Коши для ОДУ 2 порядка методом Эйлера.
17. Решение задачи Коши для ОДУ 2 порядка методом Эйлера с пересчетом.
18. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ. Виды краевых задач.
19. Метод конечных разностей. Конечно-разностная схема. Решение линейного ОДУ 2 порядка методом конечных разностей.
20. Математическое программирование. Основные классы задач. Общая постановка задачи математического программирования.
21. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП).
22. Решение ЗЛП графическим методом.
23. Правила жордановых преобразований.
24. Каноническая форма ЗЛП.

25. Симплекс-метод. Решение задачи линейного программирования симплекс-методом.

26. Решение нелинейного уравнения методом половинного деления и методом хорд.

27. Решение нелинейного уравнения методами Ньютона (касательных).

28. Решение нелинейного уравнения методом итераций.

30. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации.

30. Решение системы нелинейных уравнений методом ускоренных итераций.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ РАЗДЕЛ**Белорусский национальный технический университет**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

Белорусского национального

технического университета

_____ Ю.А. Николайчик

Регистрационный № УД-_____/уч.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**Учебная программа учреждения высшего образования****по учебной дисциплине для специальности****7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений»****профилизаций «Промышленное и гражданское строительство»,****«Строительство зданий и сооружений тепловой и атомной энергетики»,****«Гидротехническое строительство»**

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта ОСВО 7-07-0732-01-2023 и учебных планов специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» профилизаций «Промышленное и гражданское строительство» (рег. № СФ69д-1/уч от 31.03.2023, СФ69з-1/уч от 03.04.2023, СФ69зи-1/уч от 03.04.2023), «Строительство зданий и сооружений тепловой и атомной энергетики» (рег. № ФЭС52д-5/уч от 31.03.2023), «Гидротехническое строительство» (рег. № ФЭС52д-4/уч от 31.03.2023)

СОСТАВИТЕЛЬ:

А.В. Стрелюхин, доцент кафедры «Геотехника и строительная механика» Белорусского национального технического университета, кандидат технических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

А.А. Осипов, ведущий научный сотрудник лаборатории физики электромагнитных потерь Института прикладной физики НАН Беларуси, кандидат технических наук

С.М. Курчевский, доцент кафедры «Гидротехническое и энергетическое строительство, водный транспорт и гидравлика» Белорусского национального технического университета, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой «Геотехника и строительная механика» Белорусского национального технического университета
(протокол № _____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой _____ Т.М. Уласик

Методической комиссией строительного факультета
Белорусского национального технического университета
(протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Председатель методической комиссии _____ Э.И. Батяновский

Научной библиотекой БНТУ _____ Т.И. Бирюкова

Научно-методическим советом Белорусского национального технического университета (протокол № _____ секции №1 от _____ 20__ г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по учебной дисциплине «Численные методы решения задач» разработана для специальности 7-07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений» профилизаций «Промышленное и гражданское строительство», «Строительство зданий и сооружений тепловой и атомной энергетики», «Гидротехническое строительство».

Цель изучения дисциплины «Численные методы решения задач» – предоставить будущему инженеру знания, необходимые для расчета стержневых и континуальных конструкций, решения задач организации и управления строительством с применением компьютеров.

Основными задачами учебной дисциплины являются формирование систематизированных знаний и навыков в области численных методов решения задач строительства и подготовка обучаемых к постановке и решению учебных и прикладных математических и инженерных задач на основе существующего программного обеспечения, языков программирования высокого уровня и интегрированных общематематических программных продуктов.

Для понимания и успешного освоения изучаемого курса необходимо знание таких дисциплин как «Математика», «Информатика», «Теоретическая механика».

Знания и умения, полученные студентами при изучении данной дисциплины, необходимы для освоения последующих специальных дисциплин и дисциплин специализаций, связанных с проектированием и расчетом строительных сооружений, их элементов и узлов, таких как «Строительная механика», «Механика грунтов, основания и фундаменты».

В результате изучения учебной дисциплины «Численные методы решения задач» студент должен:

знать:

- основные прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
- способы вычисления определителя и обращения квадратной матрицы;
- методы решения частичной проблемы собственных значений;
- постановку задач с начальными и краевыми условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными;
- основные численные методы решения задачи Коши и краевой задачи;
- постановку и классификацию задач оптимизации;
- понятие о методах решения задач линейного и нелинейного программирования;
- понятие о методах решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений,

уметь:

- решить систему линейных алгебраических уравнений методами Гаусса и итерационными;
- обратить квадратную матрицу путем решения системы линейных алгебраических уравнений с несколькими столбцами свободных членов;
- вычислить определитель квадратной матрицы с использованием процедуры прямого хода Гаусса;
- найти наибольшее собственное значение квадратной матрицы итерационными методами;
- решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты;
- применить метод конечных разностей к решению краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решить задачу линейного программирования симплексным методом и показать решение для двухпараметрической задачи;
- решить нелинейные уравнения,

иметь навыки:

- решения задач линейной алгебры;
- решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями и уравнений с частными производными;
- решения задач оптимизации;
- решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

Освоение данной учебной дисциплины должно обеспечить формирование следующих компетенций:

БПК-2. Применять программные средства для решения инженерных задач.

Согласно учебным планам на изучение учебной дисциплины отведено:

- для очной (дневной) формы получения высшего образования всего 110 ч., из них аудиторных – 50 часа;
- для заочной формы получения высшего образования (профилизация «Промышленное и гражданское строительство») всего 110 ч., из них аудиторных – 12 часов.
- для заочной формы получения высшего образования интегрированного со средним специальным образованием (профилизация «Промышленное и гражданское строительство») всего 110 ч., из них аудиторных – 12 часов.

Распределение аудиторных часов по курсам, семестрам и видам занятий приведено ниже.

Таблица 1.

Очная (дневная) форма получения высшего образования					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма промежуточ ной аттестации
2	3	16	34		экзамен

Таблица 2.

Заочная форма получения высшего образования (профилизация «Промышленное и гражданское строительство»)					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма промежуточ ной аттестации
2	4	6	6		экзамен

Таблица 3.

Заочная форма получения высшего образования интегрированного со средним специальным образованием (профилизация «Промышленное и гражданское строительство»)					
Курс	Семестр	Лекции, ч.	Лабораторные занятия, ч.	Практические занятия, ч.	Форма промежуточ ной аттестации
1	2	6	6		экзамен

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел I. Численные методы решения основных задач линейной алгебры

Тема 1.1. Основные понятия алгебры матриц и линейной алгебры.

Этапы решения инженерных задач. Сведения о матрицах и действия над ними. Основные понятия систем линейных уравнений и их виды.

Тема 1.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Понятие о прямых методах решения СЛАУ. Решение СЛАУ методом Гаусса. Вычисление определителя методом Гаусса. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса. Метод LU-разложения решения СЛАУ.

Понятие об итерационных процессах. Критерии сходимости итерационного процесса. Метод простых итераций решения СЛАУ. Метод ускоренных итераций (метод Зейделя). Сравнение прямых и итерационных методов.

Раздел II. Собственные значения и собственные вектора матрицы

Тема 2.1. Полная и частичная проблема собственных значений

Общие сведения о собственных значениях и собственных векторах матрицы. Понятие полной и частичной проблемы. Построение характеристической матрицы. Вековое уравнение.

Вычисление наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего ему собственного вектора степенным итерационным методом. Модифицированный степенной метод.

Раздел III. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 3.1. Дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями

Постановка задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Применение дифференциальных уравнений в задачах статики и динамики строительных конструкций.

Методы решения задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ. Методы Рунге-Кутты высоких порядков.

Тема 3.2. Дифференциальные уравнения с заданными краевыми условиями

Построение конечно-разностной схемы. Решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом конечных разностей.

Раздел IV. Численные методы математического программирования

Тема 4.1. Линейное математическое программирование

Понятие математического программирования. Виды задач математического программирования. Постановка задач оптимизации.

Постановка задач линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Тема 4.2. Универсальные методы решения задач линейного программирования

Приведение задач линейного программирования к каноническому виду. Жордановы преобразования. Правила построения жордановых таблиц. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Понятие о методах нелинейного программирования.

Раздел V. Решение нелинейных уравнений и систем

Тема 5.1. Итерационные методы решения

Методы решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Отделение корней. Методы половинного деления, простой итерации, Ньютона. Решение систем нелинейных уравнений итерационными методами.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
очная (дневная) форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, занятия	Количество аудиторных часов					Количество часов СР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	3 семестр							
I.	Численные методы решения основных задач линейной алгебры							
1.1	Основные понятия алгебры матриц и линейной алгебры	2					4	
	Лабораторная работа №1 Основы работы с матрицами				4			защита лабораторной работы
1.2	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	2					6	
	Лабораторная работа №2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса				4			защита лабораторной работы

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Лабораторная работа №3 Решение систем линейных уравнений методом простой итерации и методом Зейделя				4			защита лабораторной работы
II.	Собственные значения и собственные вектора матрицы							
2.1	Полная и частичная проблема собственных значений	2					6	
	Лабораторная работа №4 Нахождение наибольшего по модулю собственного значения и компонент собственного вектора				4			защита лабораторной работы
III.	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений							
3.1	Дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями	2					10	
	Лабораторная работа №5 Решение задачи Коши				4			защита лабораторной работы
3.2	Дифференциальные уравнения с заданными краевыми условиями	2					8	
	Лабораторная работа №6 Решение краевой задачи				4			защита лабораторной работы
IV.	Численные методы математического программирования							
4.1	Линейное математическое программирование	2					8	

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
	Лабораторная работа №7 Решение задачи линейного программирования графическим методом				4			защита лабораторной работы	
4.2	Универсальные методы решения задач линейного программирования	2					10		
	Лабораторная работа №8 Симплекс метод решения задачи линейного программирования				6			защита лабораторной работы	
V.	Решение нелинейных уравнений и систем								
5.1	Итерационные методы решения	2					8		
	Итого за семестр	16			34		60	экзамен	
	Всего аудиторных часов	50							

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения высшего образования*
 (профилизация «Промышленное и гражданское строительство»)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, занятия	Количество аудиторных часов					Количество часов СР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4 семестр							
I.	Численные методы решения основных задач линейной алгебры							
1.2	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	2					6	
	Лабораторная работа №2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса				2			защита лабораторной работы
III.	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений							
3.2	Дифференциальные уравнения с заданными краевыми условиями	2					8	
	Лабораторная работа №6 Решение краевой задачи				2			защита лабораторной работы

1	2	3	4	5	6	7	8	9
IV.	Численные методы математического программирования							
4.1	Линейное математическое программирование	2					8	
	Лабораторная работа №7 Решение задачи линейного программирования графическим методом				2			защита лабораторной работы
	Итого за семестр	6			6		22	экзамен
	Всего аудиторных часов	12						

*Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студентом.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
заочная форма получения высшего образования, интегрированного со средним специальным образованием*
 (профилизация «Промышленное и гражданское строительство»)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы, занятия	Количество аудиторных часов					Количество часов СР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2 семестр							
I.	Численные методы решения основных задач линейной алгебры							
1.2	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	2					6	
	Лабораторная работа №2 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса				2			защита лабораторной работы
III.	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений							
3.2	Дифференциальные уравнения с заданными краевыми условиями	2					8	
	Лабораторная работа №6 Решение краевой задачи				2			защита лабораторной работы

1	2	3	4	5	6	7	8	9
IV.	Численные методы математического программирования							
4.1	Линейное математическое программирование	2					8	
	Лабораторная работа №7 Решение задачи линейного программирования графическим методом				2			защита лабораторной работы
	Итого за семестр	6			6		22	экзамен
	Всего аудиторных часов	12						

*Темы учебного материала, не указанные в Учебно-методической карте, отводятся на самостоятельное изучение студентом.

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Лабораторные работы по дисциплине "Численные методы решения задач" : методические указания для студентов специальностей 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство" и 1-74 04 01 "Сельское строительство и обустройство территорий" дневной и заочной форм обучения / ; Министерство образования Республики Беларусь, Учреждение образования "Брестский государственный технический университет", Кафедра прикладной механики ; [В. И. Игнатюк, Н. В. Бочарова]. – Брест : БрГТУ, 2019. – 66 с.

2. Краков, М.С. Численные методы и обработка данных : пособие / М.С. Краков, С.Г. Погирницкая ; Министерство образования Республики Беларусь, Белорусский национальный технический университет, Кафедра ЮНЕСКО "Энергоснабжение и возобновляемые источники энергии". – Минск : БНТУ, 2021. – 86 с.

3. Расолько, Г.А. Численное решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши методом ортогональных многочленов [Электронный ресурс] : в 2 ч. Ч.2. Алгоритмы в Mathematica / Г.А. Расолько. – Электрон. дан. – Минск : Издательский центр БГУ, 2017.

4. Мулярчик, С.Г. Численные методы : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальностям "Радиофизика", "Физическая электроника", "Компьютерная безопасность (по направлениям)", "Прикладная информатика (по направлениям)" / С.Г. Мулярчик. – Минск : РИВШ, 2017. – 317 с.

Дополнительная литература

5. Стрелюхин, А.В. Численные методы решения задач строительства: лабораторный практикум для студентов специальности 1-70 02 01 "Промышленное и гражданское строительство" / А.В. Стрелюхин, Г.С. Богомолова, Е.Л. Сорокина. – Минск: БНТУ, 2016. – 115 с.

6. Сидорович, Е.М. Динамика и устойчивость сооружений. Численные методы решения задач / Е.М. Сидорович. – Минск: БНТУ, 2006. – 245 с.

7. Петров, И.Б. Вычислительная математика для физиков / И.Б. Петров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2021. – 376 с.

8. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – СПб.: Издательство «Лань». – 2015. – 448 с.

9. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики / Т.Д. Караманский. – М.: Стройиздат, 1981. – 428 с.

10. Турчак, Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак, П.В. Плотников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 304 с.

Средства диагностики результатов учебной деятельности

Оценка уровня знаний студента производится по десятибалльной шкале в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки достижений студента используется следующий диагностический инструментарий:

- защита выполненных на лабораторных занятиях индивидуальных заданий;
- защита выполненных в рамках самостоятельной работы индивидуальных заданий;
- сдача экзамена по дисциплине.

Перечень контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы студентов

1. Методы численного дифференцирования.
2. Методы численного интегрирования.
3. Вычисление наименьшего по модулю собственного значения матрицы.
4. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений с выбором ведущего элемента.
5. Метод прогонки решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Метод Холецкого решения систем линейных алгебраических уравнений.
7. Метод хорд решения нелинейного уравнения.
8. Методы Ньютона решения нелинейного уравнения.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

При изучении дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- решение индивидуальных заданий (задач);
- подготовка сообщений, тематических докладов, презентаций по заданным темам;
- проработка тем (вопросов), вынесенных на самостоятельное изучение.