

Рис. 2. Графики зависимости эксцентриситета от соотношения сторон плиты при  $\varphi = \pi/2$ :

1 —  $2a = \pi/2$ ,  $\lambda = 0,025$ ; 2 —  $2a = \pi/2$ ,  $\lambda = 0,25$ ; 3 —  $2a = \pi/2$ ,  $\lambda = 0,5$ ; 4 —  $2a = 5\pi/8$ ,  $\lambda = 0,025$ ; 5 —  $2a = 5\pi/8$ ,  $\lambda = 0,25$ ; 6 —  $2a = 5\pi/8$ ,  $\lambda = 0,5$

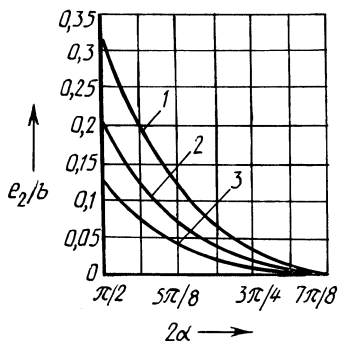


Рис. 3. Графики зависимости эксцентриситета от угла раствора клина при  $\beta = 2$ ,  $\varphi = \pi/2$ :

1 —  $\lambda = 0,025$ ; 2 —  $\lambda = 0,25$ ; 3 —  $\lambda = 0,5$

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании зданий и сооружений в сложных инженерно-геологических условиях — размещении их вблизи откосов, склонов, выемок, засыпаемых оврагов и т.п.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф о м и ч е в а Н.М. Определение осадок и кренов жестких плит, расположенных у края насыпи // Фундаменты на искусств. основаниях в условиях БССР. — Мн., 1986. — С. 61—66.
2. Г о р б у н о в - П о с а д о в М.И., М а л и к о в а Т.А., С о л о м и н В.И. Расчет конструкций на упругом основании. — М., 1984. — 679 с.
3. Ж е м о ч к и н Б.Н., С и н и ц ы н А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. — М., 1947. — 148 с.
4. Б о с а к о в С.В., Ф о м и ч е в а Н.М. Перемещение границы пространственного клина от нормальной сосредоточенной силы при произвольном коэффициенте Пуассона // Вопр. стр-ва и архитектуры. — Мн., 1986. — Вып. 15. — С. 53—56.
5. Ф о м и ч е в а Н.М. Особенности проектирования фундаментов зданий, расположенных вблизи откосов // Основания и фундаменты в сложных инженерно-геологич. условиях. — Мн., 1985. — С. 95—101.

УДК 624.042.8

В.В.ШЕВКО

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЕЕ ОПАСНОЙ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК

Зависимость окончательных пластических деформаций балок от формы импульса исследовалась в ряде работ. Например, в [1] показано, что пластические деформации существенно зависят от вида функции "нагрузка—время"

для кратковременных нагрузок, имеющих одинаковые импульс и максимальную интенсивность.

Рассмотрим движение свободно опертой жесткопластической балки под действием произвольной равномерно распределенной нагрузки  $q(t)$ . Если интенсивность импульса  $q(t)$  в течение некоторого времени превышает статически допустимую интенсивность  $q_0$ , в балке возникает пластический шарнир или пластическая зона. Движение балки с пластической зоной описывается системой уравнений [2]:

$$\frac{1}{3} m_s l^3 \ddot{\theta} = \frac{1}{2} [q(t) + q_s] l^2 - M_0; m_s \frac{d}{dt} (l \dot{\theta}) = q(t) + q_s, \quad (1)$$

где  $m_s$ ,  $q_s$  — распределенные масса и нагрузка от собственного веса балки;  $\theta$  — угол поворота жесткого звена балки;  $M_0$  — предельный изгибающий момент.

Определим функцию  $q(t)$ , соответствующую максимальным прогибам  $\delta$  в центре балки в каждый момент времени при заданном приложенном импульсе  $I = \int_0^{\infty} q(t) dt$ . Функция  $q(t)$  принадлежит области  $0 \leq q(t) \leq q_{\max}(t)$ .

Кроме указанных выше ограничений, возможны ограничения на скорости деформации (скорости вращения в пластических шарнирах), от которых существенно зависят механические характеристики материала [3]:  $\dot{\theta} \leq \dot{\theta}_{\max}$ , где  $\dot{\theta}_{\max}$  — максимальная допустимая скорость вращения в пластическом шарнире.

Целевая функция задачи

$$\delta = \int_0^{t_f} -l \dot{\theta} dt + \int_0^{t_f} F(t) dt,$$

где  $t_f$  — время движения;  $F(t)$  — функция штрафа:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{\theta} \leq \dot{\theta}_{\max}, \\ \lambda' [\dot{\theta} - \dot{\theta}_{\max}]^2 & \text{при } \dot{\theta} > \dot{\theta}_{\max}; \end{cases}$$

$\lambda'$  — весовой коэффициент.

Представим систему уравнений (1) в форме

$$\dot{y}_1 = y_2; \dot{y}_2 = \frac{3}{2} \frac{q(t) + q_s}{m_s y_3} - \frac{3M_0}{m_s y_3^3}; \dot{y}_3 = \frac{q(t) + q_s}{m_s y_2} - \frac{y_3 \dot{y}_2}{y_2}. \quad (2)$$

Здесь  $y_1 = \theta$ ,  $y_2 = l \dot{\theta}$ ,  $y_3 = l$ .

Составим гамильтониан

$$H = \psi_0 [-y_3 y_2 + F(t)] + \psi_1 y_2 + \psi_2 \left( \frac{3}{2} \frac{q(t) + q_s}{m_s y_3} - \frac{3M_0}{m_s y_3^3} \right) +$$

$$+ \psi_3 \left( \frac{q(t) + q_s}{m_s y_2} - \frac{y_3 \dot{y}_2}{y_2} \right).$$

Система сопряженных уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y_1} = 0; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y_2} = \psi_0 y_3 - \psi_1 - \psi_3 \left( \frac{y_3 \dot{y}_2}{y_2^2} - \frac{q(t) + q_s}{m_s y_2^2} \right); \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial y_3} = \psi_0 y_2 - \psi_2 \left( \frac{9M_0 y_3^2}{m_s y_3^6} - \frac{3}{2} \frac{q(t) + q_s}{m_s y_3^2} \right) + \psi_3 \frac{\dot{y}_2}{y_2}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Согласно принципу максимума [4], оптимальное значение в каждый момент времени функция  $q(t)$  имеет при максимальном значении гамильтониана и находится путем одновременного интегрирования систем уравнений (2) и (3).

Рассматриваемая задача оптимального управления представляет собой краевую задачу, отличительная особенность которой состоит в том, что для интегрирования системы сопряженных уравнений (3) недостает половины начальных условий (так как неизвестны начальные значения компонент вектора сопряженных переменных  $\psi \{ \psi_1, \psi_2, \psi_3 \}$ ). Следовательно, разработка алгоритма численного решения рассматриваемой задачи требует такой организации вычислительной процедуры, которая позволила бы свести данную двухточечную краевую задачу к нескольким задачам Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемой каким-либо из численных методов (например, методами Рунге—Кутты). Суть алгоритма заключается в следующем.

1. Фиксируют некоторый момент времени  $t_r$ , который заведомо меньше момента  $t_f$  окончания движения:  $t_r \ll t_f$ .

2. Предполагают, что в момент времени  $t_f$  вектор фазовых координат  $Y \{ y_1, y_2, y_3 \}$  может принять любые значения. Тогда в силу условий ортогональности векторов фазовых координат и сопряженных переменных [4, 5] вектор  $\psi \{ \psi_1, \psi_2, \psi_3 \}$  должен быть нулевым, так как только нулевой вектор является ортогональным к произвольному на одном из концов траектории.

3. Используя значения векторов  $Y \{ y_1, y_2, y_3 \}$  в начальной точке  $t_0$  и  $\psi \{ \psi_1, \psi_2, \psi_3 \}$  в точке  $t_r$ , применяют стандартную процедуру метода последовательных приближений [5].

4. Задают следующие начальную и конечную точки  $t_0 = t_r$ ;  $t_r = t_r + \Delta t$  и опять выполняют стандартную процедуру метода последовательных приближений.

Предлагаемая методика позволяет определить опасную форму импульса для жесткопластических балок и систем перекрестных связей, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stronge W.J. Efficient pulse shapes to plastically deform beams // Trans. ASME. — 1974. — E. 41, N. 3. — P. 604—608.
2. Комаров К.Л., Немировский Ю.В. Динамика жесткопластических элементов конструкций. — Новосибирск, 1984. — 234 с.
3. Динамический расчет зданий и сооружений / М.Ф. Барштейн, В.А.Ильичев, Б.Г.Коренев. — М., 1984. — 308 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. — М., 1969. — 384 с.
5. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. — М., 1973. — 240 с.