линейных уравнений, в которой число уравнений больше числа неизвестных. В этом случае, используя определенные правила линейной алгебры, можно определить δB. Когда размерность Z меньше, чем B, имеем неопределенную систему уравнений. Для улучшения того или иного показателя конструкции следует решить задачу линейного программирования.

Проверка высказанных выше положений осуществлялась на примере комбинированной системы [2]. Предполагалось, что небольшие изменения B не приводят к нарушению условий прочности и жесткости конструкции. В задачах оптимизации эти изменения необходимо учитывать. Изменение значений переменных проектирования приводит к расширению (или сужению) области допустимых решений, а следовательно, к изменению показателя качества конструкции.

Условия прочности $\psi_j(Z, B) \leqslant 0$ явно зависят не от δ^*, а от δZ. Поэтому ограничения для известного δZ могут быть линеаризованы и представлены в виде

$$\psi_j(Z^0, B^0) + \frac{\partial \psi_j(Z^0, B^0)}{\partial Z}\delta Z + \frac{\partial \psi_j(Z^0, B^0)}{\partial B}\delta B \leqslant 0.$$

Здесь второе и третье слагаемые — линейные приближения изменения ψ_j в точке (Z^0, B^0).

Условия жесткости $\psi_j(Z, B, \delta^*) \leqslant 0$ при фиксированных δ^*в линеаризованной форме имеют вид

$$\psi_j(Z^0, B^0, \delta^*) + \frac{\partial \psi_j(Z^0, B^0, \delta^*)}{\partial Z}\delta Z + \frac{\partial \psi_j(Z^0, B^0, \delta^*)}{\partial B}\delta B \leqslant 0.$$

Таким образом, ограничения представляются линейными относительно δB функциями, что позволяет рассматривать задачу проектирования как задачу ЛП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х о г Э., А р о р а Я. Прикладное оптимальное проектирование. — М., 1983. — 478 с. 2. Б о р и с е в и ч А.А. Поэтапная оптимизация стержневых систем с использованием линейной аппроксимации // Техника, технология, орг. и экономика стр-ва: Строит. механика и строит. конструкции. — Мн., 1980. — Вып. 6. — С. 9—18.

УДК 624.072.2:042:681.3

П.В.АЛЯВДИН, В.П.МУРАШКО

АНАЛИЗ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ

Совершенствование методики расчета и проектирования конструкций позволяет выявить резервы снижения их материалоемкости. Однако до настоящего времени не разработана методика расчета конструкций из идеально упругопластического [1, 2] материала на приспособляемость с учетом фактической работы сечений элементов и характеристик циклов нагружения при различном уровне развития пластических деформаций.

В данной работе предлагается методика определения пределов повторно-переменных нагрузок на идеально упругопластические стержневые конструкции. В условиях приспособляемости сечений учитывается взаимодействие возникающих в них обобщенных внутренних сил [3, 4]. Методика позволяет исследовать приспособляемость системы на любой стадии, от появления и развития пластических деформаций до предельного состояния вследствие прогрессирующего разрушения или знакопеременной текучести.

Конструкция подвергается воздействию постоянной нагрузки и повторно-переменной, квазистатически изменяющейся произвольным образом во времени в некоторой допустимой области. Для реальных задач проектирования эта область оказывается многомерным многогранником, включающим начало координат, вершины которого соответствуют расчетным сочетаниям внешних сил.

Предположим, что многогранник нагрузок определяется с точностью до скалярного множителя F_0. Задача нахождения предельной нагрузки на систему заключается в вычислении максимального параметра

$$F_0 \to \max \tag{1}$$

при условии приспособляемости расчетных сечений

$$\varphi_l\ (S) = f_l(S) - S_{l_0} \leqslant 0, l = 1, \ldots, L, \tag{2}$$

где S— вектор обобщенных внутренних сил в сечениях, его размерность для пространственных систем — GL, для плоских — $3L$; S_{l_0}, f_l, φ_l — соответственно предельная внутренняя сила, функция текучести и запас по условию приспособляемости в l-м сечении; L — число расчетных сечений.

Условиями (2) определяются поверхности взаимодействия обобщенных сил в сечениях.

Вектор внутренних сил S равен сумме векторов упругих S_e и остаточных S_r усилий самонапряжения:

$$S = S_e + S_r. \tag{3}$$

Упругие усилия S_e выражаются с помощью матрицы влияния через внешние нагрузки в предположении идеально упругой работы материала. Поэтому они также произвольным образом изменяются внутри своей многогранной области, зависящей от параметра нагрузки F_0. Вершины этой области соответствуют векторам расчетных сочетаний усилий (РСУ) $F_0 S_j^*$, $j = 1, \ldots, I$, а сама область определяется зависимостями

$$S_e = F_0 \overline{S_e} \leqslant F_0 \sum_{j=1}^{I} \alpha_j S_j^*, \quad \sum_{j=1}^{I} \alpha_j = 1, \alpha_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, I\ . \tag{4}$$

Здесь α_j — множители к векторам S_j^*; I — количество РСУ; $\overline{S}_e$ — вектор упругих усилий, соответствующий единичному параметру нагрузки F_0.

Усилия самонапряжения S_r, возникающие в результате пластических деформаций, удовлетворяют однородным уравнениям равновесия системы и выражаются через вектор независимых параметров самонапряжения X размерностью k (k — степень статической неопределимости системы) с помощью матрицы влияния L_r:

$$S_r = L_r X. \tag{5}$$

Условия (2) приспособляемости сечений с учетом зависимостей (3), (4) можно выразить через предельные значения упругих усилий $F_0 S_j^*$ и самонапряжения S_r [3, 4]:

$$\varphi_l(F_0 S_j^* + S_r,\ j = 1, ..., l) \leqslant 0,\ l = 1, ..., L. \tag{6}$$

Эти функции оказываются нелинейными, негладкими и для произвольных сечений и нагружений вычисляются только алгоритмически.

Так, например, для плоской стержневой системы со сжато-изогнутыми элементами, воспринимающими изгибающий момент M, продольную N и поперечную Q силы, область изменения усилий $S = (M, N, Q)$ (4), в которой можно, не уменьшая общности, с запасом заключить в прямоугольный параллелепипед $M^- \leqslant M \leqslant M^+$, $N^- \leqslant N \leqslant N^+$, $Q^- \leqslant Q \leqslant Q^+$ ($M^-, M^+, ..., Q^+$ — пределы изменения внутренних сил в сечении), условия приспособляемости (6) принимают вид [3]

$$\varphi(M^- + M_r,\ M^+ + M_r,\ N^- + N_r,\ N^+ + N_r,\ Q_{ext} + Q_r) \leqslant 0.$$

Здесь учтена гипотеза об отсутствии в расчетных сечениях остаточных касательных напряжений [3] и введено обозначение $Q_{ext} = \max(|Q^-|, Q^+)$.

В результате задача (1) – (5) предельного равновесия системы при повторно-переменном нагружении сводится к вычислению (1) при ограничениях (5) и (6), когда переменными оптимизации служат параметр нагрузки F_0 и вектор независимых самонапряжений X.

Сформулированная задача относится к задачам нелинейного математического программирования. Ее особенность заключается в том, что негладкие и неявно заданные ограничения (6) зависят от переменных оптимизации X. Для решения этой задачи целесообразно использовать метод последовательных нагружений [4]. При этом на каждом p-м шаге малого приращения ΔF_0 условия (6) линеаризуются с учетом вектора $S_r(X_{p-1})$, полученного на предыдущем (p – 1)-м шаге:

$$\Phi(F_0 \overline{S}_e + LX) - S_0 \leqslant 0, \tag{7}$$

где Φ — матрица линеаризованных условий текучести, с помощью которой поверхности взаимодействия (6) для обобщенных сил в сечениях элементов аппроксимируются гиперплоскостями; S_0 — вектор свободных членов.

Элементы матрицы Φ зависят от векторов S_j^* и S_r. После вычисления вектора $S_r(X_p)$ на данном шаге условие (7) уточняется и выполняется новый расчет. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность расчетов.

Для плоской конструкции поверхность взаимодействия усилий M и N при фиксированной и вырождается в линию. Она заменяется в каждом квадранте двумя прямыми (рис. 1).

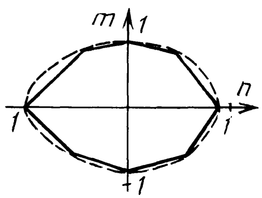

Рис. 1. Поверхность взаимодействия относительных изгибающих моментов m и продольных сил n

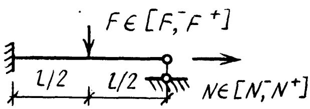

Рис. 2. Расчетная схема стержня

В процессе изменения параметра F_0 для каждого его фиксированного значения вместо задачи (1), (7) решается преобразованная линейная минимаксная задача о приспособляемости конструкции:

$$\max_{\substack{l=1,\ldots,L\\ t=1,\ldots,T}}(\Phi_{lt}(F_0\overline{S}_e + LX) - S_{0lt}) \to \min_{X\in R_k}, \tag{8}$$

где t — индекс аппроксимирующей гиперплоскости (7); T — их общее число для l-го сечения.

Задача (8) может решаться с помощью стандартных программ линейного программирования или специально разработанных минимаксных процедур.

Начиная последовательные нагружения при F_0, соответствующей упругой работе материала, легко проследить изменение усилий самонапряжений S_r и наименьших запасов φ приспособляемости сечений при возрастании уровня нагружения. Если по условию задачи пластические напряжения ограничены, можно получить решение задачи о приспособляемости конструкции с гарантированным ограниченным развитием самонапряжений. Если такого ограничения нет, находят решение задачи предельного равновесия.

В качестве примера применения предлагаемой методики приведем расчет стержня, жестко закрепленного одним концом и шарнирно опертого другим, загруженного поперечной нагрузкой F и продольной силой N (рис. 2). Поперечное сечение — двутавр № 36.

Исследовалась несущая способность конструкции в зависимости от поперечной Q и продольной N внутренних сил в сечении, соотношения постоянной и переменных составляющих внешней нагрузки.

Пренебрежение поперечными усилиями Q при отсутствии продольных усилий ($N = 0$) при $h/l > 0{,}1$ приводит к завышению фактической несущей способности на 5 % и более:

h/l	0,12	0,06	0,03
F_Q/F_M	0,933	0,988	0,994

Влияние соотношения повторно-переменных поперечных нагрузок различного знака $(\alpha = F^+ / F^-)$:

$\alpha = F^-/F^+$	0,25	0,5	1
F_0	309,2	296,6	253,5
Снижение F_0, %	0,34	4,4	18,3

Учет продольной силы N приводит к уменьшению предельной поперечной нагрузки на балку:

N_c/N_0	0	0,1644	0,329	0,822	0,904
F_0/F_e	1,273	1,503	1,256	1,426	1,817
F_0/F_M	0,994	0,981	0,659	0,192	0,136
$F_0/F_0(N_c=0)$	1,0	0,986	0,662	0,199	0,137

Пренебрежение продольной силой, соизмеримой с поперечной, в расчетах упругопластических стержневых конструкций, например высоких рам или пологих арок, ведет к недопустимым погрешностям (до 100 %).

N^+/F^+	0	1	5	10	25	50	100
$F_0/F_0(N^+=0)$	1,0	0,837	0,477	0,297	0,139	0,0737	0,0377

Результаты расчета с учетом одновременного или независимого действия продольных и поперечных постоянных и переменных сил показывают, что постоянные нагрузки повышают эффект пластического расчета по сравнению с упругим до 40 %.

В процессе возрастания параметра поперечной нагрузки F_0 от предела упругости материала конструкции до момента ее разрушения при нагрузке F_* приведенный запас $\overline{\varphi}$ по приспособляемости уменьшается до нуля:

F_0/F_*	0,808	0,889	0,970	1,0
$\overline{\varphi}\cdot 10^4$	80	77	76	0

Полученные результаты подтверждают необходимость учета всех обобщенных внутренних сил в расчетных сечениях стержневых конструкций из упругопластического материала, а также учета характера нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чирас А.А. Математические модели анализа и оптимизации упругопластических систем. — Вильнюс, 1982. — 112 с. 2. Стрелецкий Н.Н., Бельский Г.Е., Любаров Б.И., Чернов Н.Л. Расчет элементов стальных конструкций по критерию предельных пластических деформаций (на прочность) // Пром. стр-во. — 1978. — № 6. - С. 16—18. 3. Алявдин П.В., Мурашко В.П. Приспособляемость стержней при продольно-поперечном изгибе // Вопр. стр-ва и архитектуры. — Мн., 1986. — Вып. 15. С. 99—104. 4. Алявдин А.В., Мурашко В.П. Определение предельной нагрузки на геометрически нелинейные упругопластические стержневые системы // Техника, технология, орг. и экономика стр-ва. — Мн., 1984. — Вып. 10. — С. 3—6.