

не более 10 % и 60 % напряжений от ветровой нагрузки. Напряжения растяжения-сжатия в стержнях купола составляют 30...40 % от напряжений при изгибе. Максимальные перемещения (не более 7 мм) получают узлы, расположенные в зоне экватора купола по направлению действия ветра. Эпюра перемещений узлов купола соответствует эпюре ветрового давления.

На втором этапе оптимизации количество унифицированных групп стержней было принято равным шести, при этом материалоемкость купола увеличилась менее чем на 2 %.

Графики зависимости ρ , ν , κ — расхода материала каркаса соответственно на единицу объема, поверхности купола и укрываемой площади — от диаметра купола показаны на рис. 1, а-в ($L_{\text{ср}}$ — средняя длина стержней, η — отношение высоты купола к его диаметру).

В результате оптимизации материалоемкость куполов снижается на 16...26 % по сравнению с конструкциями куполов, состоящими из стержней постоянного поперечного сечения в пределах всей конструкции.

Установлено, что при увеличении диаметра купола от 8 до 35 м расход материала на единицу объема купола увеличивается в 1,1...1,3 раза, на единицу его поверхности — в 3,5...5 раз, на единицу укрываемой площади — в 3...4 раза. При переходе от решеток со средней длиной стержней, равной $0,2D$, к более измелченным решеткам со средней длиной стержней, равной $0,1D$, расход материала на единицу объема купола уменьшается в 1,7...1,8 раза, на единицу его поверхности и укрываемой площади — в 1,5...2 раза.

Применение высокопрочных сталей позволяет существенно снизить материалоемкость куполов. Так, при повышении расчетного сопротивления стали от 210 до 400 МПа материалоемкость куполов снижается в 1,3...1,5 раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р ш у н Л.И. Определение глобального минимума теоретического объема шарнирно-стержневых систем // Докл. 25 научно-техн. конф. БПИ: Материалы секции строит. механики. — Мн., 1969. — С. 15—21. 2. Щ а л и н В.М. Расчет стержневых куполов на произвольную нагрузку // Техника, технология, орг. и экономика стр-ва: Строит. механика и строит. конструкции. — Мн., 1980. — Вып. 6. — С. 121—127.

УДК 539.3:624.07

Е.М.СИДОРОВИЧ

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИХ И ЗАКРИТИЧЕСКИХ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Разнообразные задачи статики и устойчивости геометрически и физически нелинейных систем сводятся к системам нелинейных алгебраических и (или) трансцендентных уравнений, которые эффективно могут быть решены методом продолжения решения по параметру и его модификациям [1]. Так, метод непрерывного продолжения, или метод дифференцирования по параметру [2], позволяет заменить решение системы нелинейных алгебраических и транс-

цендентных уравнений решением начальной задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в неявной форме:

$$R(X) \frac{dX}{dt} + P = 0, \quad (1)$$

где R — матрица Якоби исходной системы нелинейных уравнений; X — вектор неизвестных; P — вектор свободных членов; t — параметр.

Для большинства рассматриваемых задач R , X и P соответственно представляют собой матрицу касательной жесткости деформируемой системы и векторы координат узлов и узловых нагрузок.

Целью данной работы является разработка алгоритма прохождения особых точек, где матрица касательной жесткости вырождается, и исследование закритических равновесных состояний системы с сохранением симметричности матрицы коэффициентов решаемых уравнений.

Отнесем в (1) параметр t к числу неизвестных и предположим, что дифференцирование уравнений исходной нелинейной системы проводится по некоторому новому параметру s . Тогда вместо (1) получим

$$R(X) \frac{dX}{ds} + P \frac{dt}{ds} = 0,$$

или

$$RV + PU = 0, \quad (2)$$

где

$$V = dX/ds, U = dt/ds.$$

Если параметр s есть длина дуги кривой равновесных состояний системы, неизвестные V и U представляют собой направляющие косинусы касательной к этой кривой в рассматриваемой точке, определяемой вектором $[X^T t]^T$. Следовательно,

$$V^T V + U^2 = 1. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) образуют систему. Их решения определяют в многомерном пространстве точки пересечения прямой (2) со сферой единичного радиуса (3). Алгоритм получения этих решений зависит от вырожденности и знаковой определенности матрицы касательной жесткости деформируемой системы. Если решение может быть определено, задача расчета нелинейно деформируемой системы сводится к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{ds} = V, \quad \frac{dt}{ds} = U,$$

где V и U неявно заданы уравнениями (2) и (3).

В рассматриваемом ниже алгоритме прохождения особых точек ограничимся пока наиболее важным для практики случаем, когда матрица жест-

кости либо положительно определена, что соответствует устойчивым состояниям равновесия деформируемой системы, либо неотрицательно определена или не определена, но имеет единственное нулевое или отрицательное собственное значение, что соответствует неустойчивым критическим или закритическим состояниям равновесия системы.

Прямым ходом Гаусса с выбором ведущего положительного элемента по главной диагонали с соответствующей перестановкой строк и столбцов, чтобы сохранить симметричность, приведем матрицу коэффициентов однородных уравнений (2) к треугольному виду:

$$\begin{aligned} R_{11}V_1 + R_{12}V_2 + P_1U &= 0; \\ R_{22}V_2 + P_2U &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где R_{11} — верхняя треугольная положительно определенная матрица; R_{12} , P_1 — векторы; R_{22} , P_2 — числа.

От значений последнего диагонального элемента R_{22} зависит знаковая определенность всей матрицы касательной жесткости R и, следовательно, устойчивость или неустойчивость исследуемого равновесного состояния системы, так как $|R| = |R_{11}|R_{22}$, где $|R_{11}| > 0$.

Если $R_{22} > 0$, матрица касательной жесткости положительно определена и деформируемая система находится в устойчивом равновесии. При $R_{22} = 0$ матрица касательной жесткости является особенной и деформируемая система находится в критическом состоянии. Если при этом $P_2 \neq 0$, то $U = 0$. Уравнение (3) примет вид

$$V^T V = 1 \tag{5}$$

и система (4) — (5) имеет определенное до знака решение. Соответствующее критическое состояние деформируемой системы является предельным: она потеряла отпорность, перемещения растут ($V \neq 0$) без роста нагрузки ($U = 0$). Вектор V единичной длины определяет форму потери устойчивости системы второго рода, оставаясь по смыслу ортом касательной к кривой равновесных ее состояний в предельной точке.

Если при $R_{22} = 0$ и $P_2 = 0$ система (4) — (5) “теряет” одно уравнение, ее решение становится неопределенным, ветвится. Критическая точка является точкой бифуркации. Происходит потеря устойчивости деформируемой системы первого рода со сменой формы ее первоначальных деформаций.

И, наконец, при $R_{22} < 0$ деформируемая система находится в неустойчивом закритическом состоянии равновесия. Тем не менее уравнения (2) и (3) имеют определенное до знака решение, и, как и в предыдущих случаях, исследование кривой равновесных состояний в закритической области может быть продолжено без особых затруднений и с достаточной степенью обусловленности.

Чтобы выбрать знак решения системы уравнений (4) — (5) и составить алгоритм, который может быть распространен на все рассмотренные случаи, изучим подробнее уравнения (4). Разрешим первое из них относительно

но V_1 : $V_1 = -LV_2 - NU$, (6)

где

$$L = R_{11}^{-1} R_{12}, \quad N = R_{11}^{-1} P_1.$$

Векторы L и N легко получить в результате обратного хода Гаусса. Подставляя (6) в (3), получим

$$(1+a)V_2^2 + 2cV_2U + (1+b)U^2 = 1, \quad (7)$$

где $a = L^T L$, $b = N^T N$, $c = L^T N = N^T L$.

Итак, получена система двух уравнений с двумя неизвестными, решения которой определяются точками пересечения на плоскости эллипса (7) с прямой, соответствующей второму уравнению (4):

$$R_{22} V_2 + P_2 U = 0.$$

Уравнения (4), (7) всегда имеют по два симметричных относительно начала координат решения, отличающихся знаками. Выбор знака определяет направление движения по кривой равновесных состояний и зависит от сущности физического процесса деформирования физической системы. Если $R_{22} \neq 0$ с помощью (4) из (7) исключается V_2 и с точностью до знака определяется U из выражения

$$U = \pm [1 + b - 2cP_2/R_{22} + (1+a)(P_2/R_{22})^2]^{-1/2}.$$

Причем, если $R_{22} > 0$ (докритическая стадия деформирования), параметр нагрузки должен возрастать (принимается $U > 0$). Если $R_{22} < 0$ (закритическая стадия деформирования), параметр нагрузки убывает ($U < 0$). При $R_{22} = 0$ и $P_{22} \neq 0$ (предельное состояние) из (4) следует, что $U = 0$, а V_2 можно найти из (7) и принять положительным:

$$V_2 = (1+a)^{-1/2}$$

(параметр нагрузки стационарен, а перемещения растут).

Другими словами, процесс продолжения решения должен быть таким, чтобы не убывала длина дуги кривой равновесных состояний, т.е.

$$\begin{bmatrix} V_{i-1} \\ U_{i-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V_i \\ U_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

где i — номер шага.

Если $R_{22} = P_2 = 0$, (4) вырождается, а (7) имеет бесконечное множество решений (кривая состояний равновесия деформируемой системы ветвится). Приняв $V_2 = 0$ и $U = (1+b)^{-1/2}$, можно "продолжить нагружение" деформируемой системы, продвигаясь по первоначальной ветви кривой ее состояний. Однако все последующие состояния равновесия будут неустойчивыми. Любая

другая пара допустимых значений V_2 и U соответствует продвижению по новой ветви кривой равновесных состояний. Принимая $U = 0$, а $V_2 = \pm (1+a)^{-1/2}$, можно осуществить в зависимости от знака V_2 продвижение в одном из двух направлений по новой ветви, ортогональной к первоначальной.

В заключение рассмотрим общий случай, когда в (4) R_{22} представляет собой не скаляр, а квадратную матрицу с неположительными диагональными элементами. При этом деформируемая система находится заведомо в неустойчивом состоянии равновесия. Приняв

$$-R_{22} = R^*, -U = U^*, P_2 = P^*, V_2 = V^*,$$

получим вместо (4) и (7) соответственно

$$R^*V^* + P^*U^* = 0, \quad (8)$$

$$(V^*)^T(E + A)V^* + 2(V^*)^T C U^* + (1+b)(U^*)^2 = 1, \quad (9)$$

где E — единичная матрица; A — квадратная матрица; C и V^* — векторы; $A = L^T L$, $C = L^T N$.

Таким образом, установив факт неустойчивости деформируемой системы, снова приходим к необходимости совместного решения нелинейных уравнений (8) и (9), аналогичных исходным (2) и (3), но при меньшей размерности матриц. Кроме того, решение их определяется точками пересечения прямой в многомерном пространстве не со сферой, а с некоторым эллипсоидом (см. (3) и (7)). Матрица коэффициентов R^* в (8) имеет на главной диагонали неотрицательные элементы и соответствует матрице касательной жесткости некоторой деформируемой подсистемы, существующей как бы в "отраженном" подпространстве, в котором нагружение соответствует разгрузке, устойчивые состояния равновесия являются на самом деле неустойчивыми. В процессе дальнейшего рассмотрения эта "антисистема" может претерпеть еще одно "отражение", что будет свидетельствовать о неустойчивости более высокого порядка.

Таким образом, в критических и закритических стадиях работы нелинейно деформируемых систем расчет их не встречает принципиальных затруднений даже в случае особенной матрицы жесткости. Рассматриваемые при этом матрицы коэффициентов системы уравнений остаются симметричными, и эти системы можно решать традиционными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш а л а ш и л и н В.И. Оптимизация параметра продолжения решения уравнений нелинейного деформирования упругих систем // Статика и динамика гибких систем. — М., 1987. — С. 81—104.
2. Д а в ы д е н к о Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. мат. журн. — 1953. — Т. 5, № 2. — С. 196—206.