

<https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-2-124-133>

УДК 669.018

Напряжения в композитной строительной арматуре, обусловленные различиями коэффициентов Пуассона

Докт. техн. наук, доц. В. Г. Барсуков¹⁾,
кандидаты техн. наук, доценты А. Г. Лежава¹⁾, Е. А. Евсева²⁾

¹⁾Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Гродно, Республика Беларусь),

²⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. Цель работы – расчетная оценка напряжений в элементах композитной строительной арматуры, обусловленных различиями коэффициентов Пуассона армирующих волокон и полимерного связующего. Методика исследований основана на разработке микромеханической модели межфазного взаимодействия армирующего волокна и полимерной матрицы в элементарной ячейке, представляющей собой полый полимерный микроцилиндр, в котором в виде соединения с изменяющимся под нагрузкой деформационным натягом расположен волокнистый армирующий наполнитель. Произведена трансформация задачи Ляме к расчетной оценке влияния различий в значениях коэффициентов Пуассона армирующих волокон и полимерной матрицы, а также растягивающих номинальных напряжений и объемного содержания волокон в композитной арматуре на изменение локальных напряжений в армирующих волокнах и полимерной матрице. Получены аналитические зависимости, связывающие параметры локального напряженно-деформированного состояния стенок элементарного цилиндра в окрестностях волокнистого наполнителя с комплексом показателей физико-механических свойств материалов полимерной матрицы и волокнистого наполнителя (модули упругости и коэффициенты Пуассона), а также объемным содержанием наполнителя. В качестве примера произведен расчет этих параметров для широкого диапазона степеней наполнения стеклянным и базальтовым волокном ряда полимерных матриц (эпоксидная и полиэфирная). Показано, что в диапазоне объемного содержания наполнителя 0,5–0,7 контактные давления на границе раздела армирующих волокон с полимерной матрицей составляют от 2 до 6 % от номинальных напряжений растяжения в полимерной матрице в зависимости от сочетания коэффициентов Пуассона волокон и матрицы. При этом окружные растягивающие напряжения в полимерной матрице на границе раздела с волокном составляют от 11,6 до 19,2 % от номинальных осевых напряжений растяжения в полимерной матрице для стеклопластиковой и от 10,6 до 17,1 % – для базальтопластиковой арматуры. Результаты исследований могут быть использованы в научно-исследовательской и учебной деятельности.

Ключевые слова: композитная строительная арматура, полимер, армирующие волокна, коэффициент Пуассона, контактное давление, локальные напряжения, степень наполнения

Для цитирования: Барсуков, В. Г. Напряжения в композитной строительной арматуре, обусловленные различиями коэффициентов Пуассона / В. Г. Барсуков, А. Г. Лежава, Е. А. Евсева // *Наука и техника*. 2025. Т. 24, № 2. С. 124–133. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-2-124-133>

Stresses in Composite Building Reinforcement due to Differences in Poisson's Ratios

V. G. Barsukov¹⁾, A. G. Lezhava¹⁾, E. A. Evseeva²⁾

¹⁾Yanka Kupala State University of Grodno (Grodno, Republic of Belarus),

²⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The aim of the work is the calculation assessment of stresses in the elements of composite building reinforcement caused by differences in the Poisson's ratios of reinforcing fibers and polymer binders. The research methodology is based

Адрес для переписки

Евсева Елена Анатольевна
Белорусский национальный технический университет
пр. Независимости, 65/3,
20113, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: + 375 17 239-93-04
vm3_ftk@bntu.by

Address for correspondence

Evseeva Elena A.
Belarusian National Technical University
146a, Nezavisimosty Ave.,
220014, Minsk, Republic of Belarus
Тел.: + 375 17 239-93-04
vm3_ftk@bntu.by

on the development of a micromechanical model of the interphase interaction of the reinforcing fiber and a polymer matrix in an elementary cell, which is a hollow polymer micro-cylinder in which a fibrous reinforcing filler is located in the form of a connection with a deformation tension changing under load. The transformation of the Lamé problem to the calculation assessment of the effect of differences in the values of the Poisson's ratios of the reinforcing fibers and the polymer matrix, as well as nominal tensile stresses and the volumetric content of fibers in the composite reinforcement on changes in local stresses in the reinforcing fibers and polymer matrix is made. Analytical dependencies are obtained linking the parameters of the local stress-strain state of the walls of an elementary cylinder in the vicinity of a fibrous filler with a set of indices of the physical and mechanical properties of polymer matrix materials and fibrous filler (moduli of elasticity and Poisson's ratios), as well as the volume content of the filler. As an example, these parameters are calculated for a wide range of degrees of filling with glass and basalt fiber for a number of polymer matrices (epoxy and polyester). It is shown that in the range of the volumetric filler content of 0.5–0.7, contact pressures at the interface of the reinforcing fibers with the polymer matrix are from 2 to 6 % of the nominal tensile stresses in the polymer matrix, depending on the combination of Poisson ratios of the fibers and the matrix. In this case, the circumferential tensile stresses in the polymer matrix at the interface with the fiber are from 11.6 to 19.2 % of the nominal axial tensile stresses in the polymer matrix for fiberglass and from 10.6 to 17.1 % for basalt-plastic reinforcement. The research results can be used in scientific research and educational activities.

Keywords: composite construction reinforcement, polymer, reinforcing fibers, Poisson's ratio, contact pressure, local stresses, degree of filling

For citation: Barsukov V. G., Lezhava A. G., Evseeva E. A. (2025) Stresses in Composite Building Reinforcement due to Differences in Poisson's Ratios // *Science and Technique*. 24 (2), 124–133. <https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-124-133> (in Russian)

Введение

Накопленный в индустриально развитых странах опыт исследований и разработок свидетельствует о том, что композитная строительная арматура может эффективно использоваться для армирования бетонных конструкций, работающих в условиях контакта с коррозионно-активными средами при строительстве морских и речных набережных тоннелей [4], подземных коммуникаций, автомобильных и железнодорожных дорог [1–3], перронов, а также при производстве фундаментных плит и блоков, армировании кирпичной кладки [3, 5–6]. Вместе с тем многие вопросы механики композитной строительной арматуры остаются недостаточно изученными [7–9]. Необходим анализ, наряду с рабочими напряжениями, возникающими в композитах под нагрузкой, также дополнительных, обусловленных размерными эффектами [10–12], химической или термической усадкой компонентов системы [13] и др. Вследствие различий коэффициентов Пуассона в таких материалах появляются локальные микроконтактные напряжения, влияющие на эксплуатационные характеристики получаемых изделий. Однако этот вопрос разработан в значительно меньшей мере, а опубликованные данные фрагментарны и противоречивы. В работе [14] предложен вариант приближенной расчетной оценки таких напряжений в элементах однонаправленных волокнистых композитов, пока-

завший, что вклад этих дополнительных напряжений мал в сравнении с напряжениями от осевого растяжения и может при технических расчетах не учитываться, особенно при использовании углеродных армирующих волокон. Однако перенос путем обобщения предложенных в [14] расчетных зависимостей на композитную строительную арматуру не представляется эффективным, поскольку существующая методика предсказывает увеличение растягивающих напряжений в полимерной матрице, действующих в тангенциальном направлении, по мере увеличения расстояния от границы раздела матрицы и волокна, в то время как результаты исследований в смежной области – теории термоупругих напряжений в композитах – предсказывают снижение уровня радиальных и тангенциальных напряжений в матрице по мере удаления от границы раздела с волокном [15, 16]. К тому же имеются принципиальные отличия в механизмах разрушения при растяжении стеклопластиковой и базальтопластиковой арматуры от типовых композитов на основе углеродных волокон. Для углепластиков, как правило, разрушение обусловлено потерей прочности волокон, предельные деформации при растяжении которых обычно меньше предельных деформаций связующего, в связи с чем влияние напряжений в связующем на прочность композита малосущественно. У стеклопластиковой и базальтопластиковой арматуры ситуация противоположная –

разрушение происходит за счет потери прочности связующего при деформациях растяжения 2,3–2,7 %, что значительно меньше предельных деформаций волокон (3,8–4,0 %) [9]. Поскольку экспериментальное изучение распределения напряжений в структурных элементах композитной строительной арматуры трудноосуществимо, представляет интерес расчетная оценка этих напряжений с учетом влияния степени наполнения, а также модулей упругости и различий коэффициентов Пуассона.

Цель работы – расчетная оценка напряжений в элементах композитной строительной арматуры, обусловленных различиями коэффициентов Пуассона армирующих волокон и полимерного связующего.

Методика математического моделирования и расчетной оценки локальных напряжений

При численном моделировании термоупругих напряжений в волокнистых композитах обычно используют элементарные ячейки в виде элементарных призм с расположенным в центре стержнем [16]. Применительно к рассматриваемому случаю для равномерного распределения волокон по сечению такая ячейка имеет форму шестигранника (рис. 1). Вместе с тем для аналитических методов прогнозной оценки микрорезонансных взаимодействий волокнистого наполнителя с матрицей удобно

принять элементарные ячейки в форме толстостенного полого микроцилиндра [17], в полости которого расположены в виде соединения с натягом волокнистые частицы (рис. 1б, с). Поэтому заменим элементарную ячейку с шестигранным поперечным сечением на эквивалентную ячейку в виде полого полимерных цилиндров с наружным радиусом R_m и внутренним R_f . Эквивалентность ячеек заключается в обеспечении равной степени объемного содержания волокон, или равенства площадей поперечного сечения в форме шестигранника и круга.

Определим значение внешнего радиуса R_m из условия равенства площади элементарного шестигранника со стороной a и эквивалентного круга. Нетрудно убедиться, что площадь шестигранника A_u равна

$$A_u = 6 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2. \quad (1)$$

Площадь эквивалентного круга A_k

$$A_k = \pi R_m^2. \quad (2)$$

Приравняв площади из (1) и (2), получаем взаимосвязь радиуса эквивалентного круга R_m и стороны a шестигранника

$$R_m = a \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} = 0,9096a. \quad (3)$$

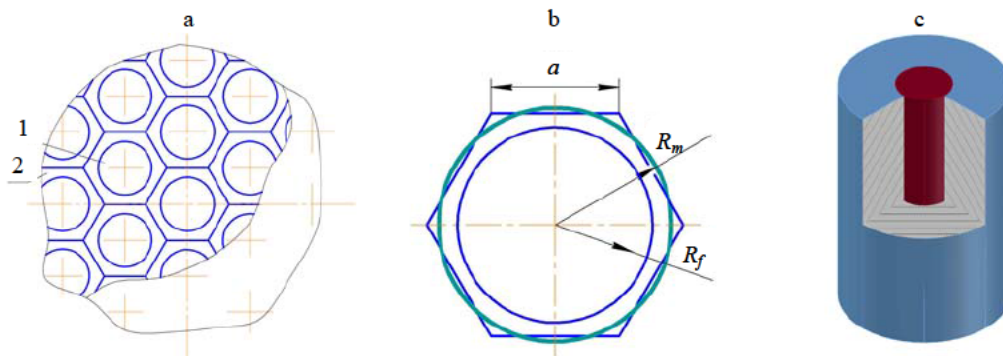


Рис. 1. Расчетная схема для определения параметров элементарных ячеек: а – условное изображение поперечного сечения стержня с шестигранными ячейками; б – изображение шестигранного и эквивалентного кругового поперечного сечения элементарной ячейки с характеристическими размерами; с – объемное изображение цилиндрической ячейки; 1 – волокно; 2 – полимерная матрица

Fig. 1. Calculation scheme for determining the parameters of elementary cells: a – conventional image of the cross-section of a rod with hexagonal cells; b – image of a hexagonal and equivalent circular cross-section of an elementary cell with characteristic dimensions; c – volumetric image of a cylindrical cell; 1 – fiber; 2 – polymer matrix

Анализ показывает, что R_m на 5 % превышает радиус *вписанной* в шестигранник окружности, который вычисляется как длина перпендикуляра, проведенного из центра окружности на сторону a шестигранника. Таким образом, минимальная толщина стенки шестигранной призмы на 5 % отличается от толщины стенки приведенного цилиндра, что вызовет некоторую погрешность расчетов при замене шестигранника на цилиндр.

Поскольку радиус волокон R_f равен радиусу внутренней полости элементарного цилиндра, наружный диаметр R_m можно вычислить через объемное содержание волокнистого наполнителя V_f , связанное с радиусами R_f и R_m при помощи следующей формулы:

$$V_f = \frac{\pi R_f^2}{\pi R_m^2} = \left(\frac{R_f}{R_m} \right)^2. \quad (4)$$

Откуда для внешнего радиуса элементарной ячейки можно записать

$$R_m = \frac{R_f}{\sqrt{V_f}}. \quad (4a)$$

Композитная строительная арматура работает преимущественно на растяжение. Рассмотрим деформации элементов ячейки с использованием принципа независимости действия сил (принцип суперпозиции) при определении деформаций волокна и матрицы в радиальном направлении. Обозначим действующие в осевом направлении напряжения растяжения в волокне и полимерном связующем (матрице) через σ_{f0} и σ_{m0} соответственно.

Относительные поперечные (радиальные) деформации волокна ε_{fr} и полимерной матрицы ε_{mr} в зоне контакта с волокном при растяжении связаны с продольными деформациями через соответствующие коэффициенты Пуассона. В соответствии с принципом суперпозиции на основании закона Гука можно записать, что поперечные деформации от действия только осевых напряжений σ_{f0} и σ_{m0} могут быть определены как:

$$\varepsilon_{fr} = -\mu_f \frac{\sigma_{f0}}{E_f}; \quad (5a)$$

$$\varepsilon_{mr} = -\mu_m \frac{\sigma_{m0}}{E_m}. \quad (5б)$$

где E_f , E_m , μ_f и μ_m – соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона армирующих волокон и полимерного связующего (матрицы).

Разность Δ поперечных деформаций армирующих волокон и полимерной матрицы, создающих деформационный натяг в сопряжении при растяжении системы, составляет

$$\Delta = \varepsilon_{fr} - \varepsilon_{mr} = \mu_m \frac{\sigma_{m0}}{E_m} - \mu_f \frac{\sigma_{f0}}{E_f}. \quad (6)$$

Произведем оценку возникающих контактных давлений в сопряжении волокно–матрица, обусловленных различиями коэффициентов Пуассона. Поскольку это своего рода сопряжение с натягом, контактные давления p_c можно вычислить по формуле Ляме [18, 19]

$$p_c = \frac{\Delta}{\frac{1-\mu_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \left(\frac{R_m^2 + R_f^2}{R_m^2 + R_f^2} + \mu_m \right)}. \quad (7)$$

Подставив в полученную формулу значение Δ из (6) и заменив радиусы элементарной ячейки R_f и R_m через объемное содержание волокнистого наполнителя V_f по формуле (4), зависимость (7) можно преобразовать к виду

$$p_c = \frac{\mu_m \frac{\sigma_{m0}}{E_m} - \mu_f \frac{\sigma_{f0}}{E_f}}{\frac{1-\mu_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \left(\frac{1+V_f}{1-V_f} + \mu_m \right)}. \quad (8)$$

Выполним анализ характера распределения напряжений в элементах системы. В соответствии с известным решением задачи теории упругости радиальные и тангенциальные напряжения в армирующих волокнах, не содержащих внутренних полостей, равны между собой и совпадают с контактным давлением p_c . У элементарного полимерного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления p_c [21, 22], радиальные напряжения σ_{mr} на внутренней поверхности ($r = R_f$) являются сжимающими и численно равны контактному

давлению p_c , а на внешней поверхности они равны нулю. Тангенциальные напряжения σ_{mt} в элементарном цилиндре являются растягивающими и определяются в любой точке на расстоянии r от оси цилиндра по формуле Ляме

$$\sigma_{mt} = p_c \frac{R_f^2}{R_m^2 - R_f^2} \left(1 + \frac{R_m^2}{r^2} \right). \quad (9)$$

С учетом взаимосвязи между радиусами элементарного цилиндра и объемным содержанием волокон в форме (4) эти напряжения на внутренней поверхности элементарного цилиндра ($r = R_f$) можно рассчитать по следующей зависимости:

$$\sigma_{m1} = p_c \frac{R_g^2 + R_f^2}{R_g^2 - R_f^2} = p_c \frac{1 + V_f}{1 - V_f}. \quad (10)$$

Аналогично для тангенциальных напряжений на наружной поверхности элементарного цилиндра ($r = R_m$)

$$\sigma_{m2} = p_c \frac{2R_f^2}{R_g^2 - R_f^2} = p_c \frac{2V_f}{1 - V_f}. \quad (11)$$

Сравнение аналитических зависимостей (10) и (11) показывает, что окружные (тангенциальные) напряжения, действующие в полимерной матрице, имеют максимальное значение вблизи границы раздела с армирующим волокном (σ_{m1}), а минимальные – на наружной поверхности элементарного цилиндра (σ_{m2}), соответствующей середине расстояния между волокнами. При этом величина тангенциальных растягивающих напряжений зависит от возникающего контактного давления p_c и объемного содержания волокнистого наполнителя V_f . Характер распределения радиальных и тангенциальных напряжений в межволоконном пространстве композита показан на рис. 2.

Поскольку в уравнение (8) входят три неизвестных параметра (контактное давление p_c , осевые напряжения в матрице σ_{m0} и в волокнах σ_{f0}), для их определения составим дополнительные уравнения из условия совместности деформаций в виде гипотезы плоских сечений. Принимаем, что деформации волокон, матрицы и композита в осевом направлении равны и подчиняются обобщенному закону Гука.

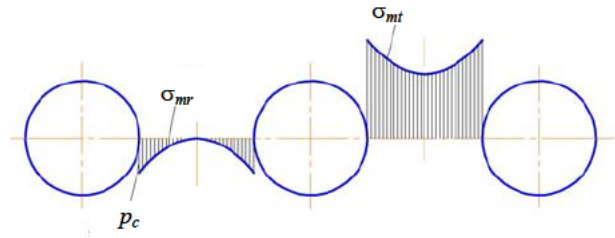


Рис. 2. Характер распределения радиальных и тангенциальных напряжений в межволоконном пространстве полимерной матрицы

Fig. 2. Nature of the distribution of radial and tangential stresses in the inter-fiber space of the polymer matrix

С использованием такого подхода для осевых деформаций компонентов системы в точке сопряжения минерального волокна с полимерной матрицей можно записать:

$$\varepsilon_{f0} = \frac{1}{E_f} [\sigma_{f0} - \mu_f (\sigma_{fr} + \sigma_{ft})] = \varepsilon_{k0}; \quad (12a)$$

$$\varepsilon_{m0} = \varepsilon_{k0} = \frac{1}{E_m} [\sigma_{m0} - \mu_m (\sigma_{mr} + \sigma_{mt})]. \quad (12б)$$

Решив систему (12a) и (12б), находим осевые напряжения в волокне и полимерной матрице:

$$\sigma_{f0} = \varepsilon_{k0} E_f - 2\mu_f p_c; \quad (13a)$$

$$\sigma_{m0} = \varepsilon_{k0} E_m + 2\mu_m p_c \frac{V_f}{1 - V_f}. \quad (13б)$$

Подставив эти значения в формулу (8), получаем зависимость для расчетной оценки возникающих контактных давлений

$$p_c = \frac{(\mu_m - \mu_f)(1 - V_f)\varepsilon_{k0}E_m}{\frac{E_m}{E_f}(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)(1 - V_f) + 1 + V_f - 2\mu_m^2 V_f} \rightarrow \frac{(\mu_m - \mu_f)(1 - V_f)\varepsilon_{k0}E_m}{+ \mu_m(1 - V_f) + 1 + V_f - 2\mu_m^2 V_f}. \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что входящее в формулу (14) произведение $\varepsilon_{k0}E_m$ представляет собой номинальное осевое напряжение в полимерной матрице σ_{m0} , рассчитываемое без учета упругого изменения площади поперечного сечения матрицы и волокон. При использовании такого обозначения формула (14) может быть записана в следующем виде:

$$p_c = \frac{(\mu_m - \mu_f)(1 - V_f)}{\frac{E_m}{E_f}(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)(1 - V_f) + \mu_m(1 - V_f) + 1 + V_f - 2\mu_m^2 V_f} \sigma_{mn}. \quad (15)$$

Как видно из (15), возникающее контактное давление прямо пропорционально действующим растягивающим номинальным напряжениям в полимерной матрице σ_{mn} и по более сложной функциональной зависимости изменяется при изменении модулей упругости и коэффициентов Пуассона материалов волокна и полимерной матрицы. Окружные (тангенциальные) напряжения σ_m в полимерной матрице в точке контакта с минеральным волокном могут быть определены по формуле (10), подставив в нее значение контактного давления из (15).

Совокупность полученных аналитических зависимостей (10), (11) и (15) позволяет производить математическое моделирование влияния степени наполнения на изменение локальных микроконтактных напряжений в полимерной матрице, если известны входящие в эти уравнения показатели физико-механических свойств полимерных материалов и армирующих волокон.

Результаты исследования и их обсуждение

Моделирование и сравнительный анализ параметров локального микроконтактного взаимодействия произведем на базе наиболее широко распространенных в промышленности при производстве композитной строительной арматуры стеклянных и базальтовых волокон, а также эпоксидных и полиэфирных смол. Показатели механических свойств волокон зависят от вида волокна и сырья для его производства. Для стеклянных волокон марки E , наиболее широко распространенных при производстве стеклопластиковой арматуры, модуль упругости E_f и коэффициент Пуассона μ_f находятся в следующих диапазонах: $E_f = 70-73,5$ ГПа, $\mu_f = 0,22-0,23$ [20–24]. Для базальтовых волокон соответствующие показатели деформационных свойств составляют: $E_f = 79-93$ ГПа, $\mu_f = 0,23-0,24$ [20–24].

Деформационные свойства полимерных связующих зависят от рода связующего, вида отвер-

дителя, режимов отверждения и других факторов. Для полиэфирных смол этот диапазон составляет: $E_m = 2,2-2,8$ ГПа, $\mu_m = 0,35-0,39$, а для эпоксидных $E_m = 2,5-3,5$ ГПа, $\mu_m = 0,38-0,40$ [20–24]. Дальнейшие исследования проведены для перечисленного выше диапазона изменения показателей механических свойств.

Поскольку входящие в знаменатель формулы (15) слагаемые имеют различную величину, выполним вначале их сравнительный анализ путем расчета слагаемого

$$\eta = \frac{E_m}{E_f}(1 - \mu_f - 2\mu_f^2)(1 - V_f). \quad (16)$$

Результаты определения величины η для широкого диапазона изменения объемного содержания наполнителя V_f на примере стекловолокна марки E , базальтового волокна и эпоксидной смолы ЭД 20 приведены в табл. 1. Расчет выполнен методом верхней оценки, поскольку максимальное значение параметра η соответствует минимальной величине коэффициента Пуассона волокон ($\mu_f = 0,22$). Модуль упругости отвержденной эпоксидной смолы принят в диапазоне от 2,0 до 3,5 ГПа. Широкий диапазон изменения объемного содержания волокон в композите ($V_f = 0,50-0,70$) принят с целью учета продукции не только отечественных, но и зарубежных [12, 20] производителей.

Таблица 1

Расчетные значения параметра η для системы минеральное волокно – полимерная матрица

Calculated values of the parameter η for the mineral fiber – polymer matrix system

Модуль упругости, ГПа		Значение параметра η при объемном содержании минерального волокна V_f		
волокна E_f	полимера E_m	0,50	0,60	0,70
73,5	2,0	0,0093	0,0074	0,0056
	2,5	0,0116	0,0093	0,0070
	3,0	0,0139	0,0112	0,0084
	3,5	0,0163	0,0130	0,0098
81	2,0	0,0084	0,0067	0,0051
	2,5	0,0105	0,0084	0,0063
	3,0	0,0127	0,0101	0,0076
	3,5	0,0148	0,0118	0,0089

Таблица 2

Расчетные значения относительных контактных давлений p_c/σ_{mn} на границе раздела волокнистого наполнителя с полимерной смолой

Calculated values of relative contact pressures p_c/σ_{mn} at the interface of fibrous filler with polymer resin

Коэффициент Пуассона		Расчетное значение p_c/σ_{mn} при объемном содержании V_f волокна		
волокна μ_f	матрицы μ_m	0,50	0,60	0,70
0,22	0,35	0,042	0,033	0,024
	0,37	0,049	0,038	0,028
	0,40	0,060	0,047	0,035
0,23	0,35	0,039	0,030	0,022
	0,37	0,045	0,035	0,026
	0,40	0,055	0,043	0,032
0,24	0,35	0,036	0,028	0,020
	0,37	0,042	0,033	0,024
	0,40	0,052	0,041	0,030

Как видно из табл. 1, во всем исследованном диапазоне изменения объемного содержания минерального волокна V_f и модуля упругости отвержденной эпоксидной смолы значение параметра η является величиной, не превышающей 1 % от значений слагаемых $(1 + V_f = 1,5-1,7)$, входящих в знаменатель дроби в формулах (14) и (15). Этот вывод справедлив также и для отвержденных полиэфирных смол, поскольку их модуль упругости (табл. 1) находится внутри рассмотренного диапазона.

Таким образом, при технических расчетах параметром η , учитывающим влияние модулей упругости армирующего волокна и полимерной матрицы в стеклопластиковой и базальтопластиковой арматуре, можно пренебречь и производить определение контактного давления по следующей упрощенной формуле:

$$p_c = \frac{(\mu_m - \mu_f)(1 - V_f)}{1 + V_f + \mu_m(1 - V_f) - 2\mu_m^2 V_f} \sigma_{mn}. \quad (17)$$

Подставив (17) в (11), получаем аналитическую зависимость для определения окружных (тангенциальных) напряжений в полимерной матрице

$$\sigma_{tm} = \frac{(\mu_m - \mu_f)(1 + V_f)}{1 + V_f + \mu_m(1 - V_f) - 2\mu_m^2 V_f} \sigma_{mn}. \quad (18)$$

Осевые напряжения в полимерной матрице, на основании формул (13б) и (17), описываются следующей аналитической зависимостью

$$\sigma_{m0} = \frac{1 + V_f + \mu_m(1 - V_f) - 2\mu_m \mu_f V_f}{1 + V_f + \mu_m(1 - V_f) - 2\mu_m^2 V_f} \sigma_{mn}. \quad (19)$$

Сравнение числителя и знаменателя в формуле (19) показывает, что они отличаются только последними слагаемыми, являющимися величинами второго порядка малости в сравнении со слагаемыми $(1 + V_f)$. Это дает основание полагать, что фактические σ_{m0} и номинальные σ_{mn} напряжения, действующие в матрице в осевом направлении, будут отличаться незначительно.

В табл. 2 приведены расчетные значения относительных контактных давлений, численно равных радиальным и тангенциальным напряжениям в волокнах композита, для широкого диапазона изменения коэффициента Пуассона матрицы.

Из полученных данных видно, что в диапазоне объемного содержания наполнителя $V_f = 0,5-0,7$ контактные давления на границе раздела армирующих волокон с полимерной матрицей составляют от 2 до 6 % от номинальных напряжений растяжения в полимерной матрице, что можно считать величиной второго порядка малости.

Расчет по формуле (19) показывает, что значения осевых растягивающих напряжений в полимерном связующем превышают на 2,9-6,3 % соответствующие номинальные значения (полученные по правилу аддитивности без учета упругого изменения площади сечения компонентов и различия коэффициентов Пуассона) для стеклопластиковой и на 3,5-5,6 % – для базальтопластиковой арматуры. Причем меньшие значения соответствуют объемному содержанию волокон $V_f = 0,5$, а большие $V_f = 0,7$.

Вместе с тем представляет интерес расчетная оценка величины действующих в тангенциальном направлении растягивающих напряжений, вызванных этим контактным давлением. В табл. 3 приведены соответствующие значения максимальных растягивающих напряжений, действующих на границе раздела полимера с волокном, а также минимальных растягивающих тангенциальных напряжений, действующих в середине расстояния между волокнами.

Расчетные значения относительных максимальных $\sigma_{tm \max}/\sigma_{mn}$ и минимальных $\sigma_{tm \min}/\sigma_{mn}$ растягивающих тангенциальных напряжений в полимерной матрице

Calculated values of relative maximum $\sigma_{tm \max}/\sigma_{mn}$ and minimum $\sigma_{tm \min}/\sigma_{mn}$ tensile tangential stresses in the polymer matrix

Коэффициент Пуассона		Расчетное значение $\sigma_{tm \max}/\sigma_{mn}$ при объемном содержании V_f волокна					
волокна, μ_f	матрицы μ_m	0,50		0,60		0,70	
		max	min	max	min	max	min
0,22	0,35	0,126	0,084	0,131	0,098	0,135	0,111
	0,37	0,146	0,097	0,151	0,113	0,158	0,130
	0,40	0,176	0,117	0,183	0,137	0,192	0,158
0,23	0,35	0,116	0,077	0,121	0,091	0,125	0,103
	0,37	0,136	0,091	0,141	0,106	0,147	0,121
	0,40	0,166	0,111	0,173	0,130	0,181	0,149
0,24	0,35	0,106	0,071	0,110	0,083	0,114	0,094
	0,37	0,126	0,084	0,131	0,098	0,136	0,112
	0,40	0,156	0,104	0,163	0,122	0,171	0,141

Из табл. 3 видно, что максимальные тангенциальные растягивающие напряжения в полимерной матрице на границе раздела с волокном составляют 11,6–19,2 % от номинальных осевых напряжений растяжения σ_{mn} для стеклопластиковой и 10,6–17,1 % – для базальтопластиковой арматуры в зависимости от сочетания коэффициентов Пуассона волокна и полимера. Минимальные растягивающие тангенциальные напряжения, действующие на середине расстояния между волокнами, составляют 7,7–15,8 % от σ_{mn} для стеклопластиковой и 7,1–14,1 % от σ_{mn} для базальтопластиковой арматуры. Такой уровень тангенциальных напряжений свидетельствует о том, что их роль в разрушении композита существенна и в настоящее время недооценивается.

Еще одним представляющим интерес фактором является некоторое снижение окружных растягивающих напряжений в полимерной матрице в окрестности базальтовых волокон в сравнении со стеклянными. Это способствует увеличению предельных деформаций при разрыве базальтопластиковой арматуры и указывает на перспективность базальтового волокна как армирующего наполнителя для композитной строительной арматуры.

ВЫВОДЫ

1. Результаты выполненных исследований позволили разработать инженерную методику

расчетной оценки параметров напряженного состояния полимерной матрицы в окрестностях волокнистого наполнителя в композитной строительной арматуре как функций от действующих номинальных растягивающих напряжений, объемного содержания волокон, а также показателей механических свойств волокон и полимерных матриц.

2. Определены значения этих параметров применительно к широкому диапазону изменения объемного содержания волокон, а также показателей деформационных свойств, характерному для промышленно выпускаемой строительной композитной арматуры.

3. Показано, что вклад локальных микроконтактных напряжений в полимерном связующем на прочность стеклопластиковой и базальтопластиковой арматуры существенный и в настоящее время недооценен. Результаты исследований могут быть использованы в научно-исследовательской и учебной деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars: ACI 440.1R-06. Detroit: American Concrete Institute (ACI), 2006. 44 p.
2. Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers: CAN/CSA-S806-02 (R2007). Canadian Standards Association, 2012. 206 p.
3. Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforcing Materials /

- Japan Society of Civil Engineers (JSCE). Tokyo: JSCE. 1997. 199 p. (Concrete Engineering, Series 23).
4. Jarek, B. Zastosowanie Prętów Zbrojeniowych z Włókna Szklanego (GFRP) w Budownictwie / B. Jarek, A. Kubik // *Przegląd budowlany*. 2015. No 012. P. 21–26.
 5. Development of Ductile Composite Reinforcement Bars for Concrete Structures / Y. Cui, M. S. M. Cheung, B. Noruziaan [et al.] // *Materials and Structures*. 2008. Vol. 41, No 9. P. 1509–1518. <https://doi.org/10.1617/s11527-007-9344-8>.
 6. Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars: CNR-DT 203/2006. Rome: Italian National Research Council (CNR), 2006. 35 p.
 7. Корягин, С. И. Несущая способность композиционных материалов / С. И. Корягин. Калининград: Калининград. ун-т, 1996. 301 с.
 8. Tensile fracture specificity of unidirectional metal-polymer glass-fiber composites with cord wire / M. Yu. Ashcherkau, S. V. Shil'ko, T. V. Drobysh, H. Choe // *Механика машин, механизмов и материалов*. 2020. No 3 (52). P. 55–61. <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-3-52-55-62>.
 9. Barsukov, V. G. Structural and Mechanical Aspect of Composite Reinforcement Strength / V. G. Barsukov, A. R. Volik, S. A. Sazon // *E3S Web Conf*. 2020. Vol. 212. P. 02002. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202021202002>.
 10. Садин, Э. Я. Анкеровка в бетоне стеклопластиковой арматуры, производимой в Республике Беларусь / Э. Я. Садин // *Архитектура и строительство*. 2016. № 3. С. 68–71.
 11. Особенности испытаний и характер разрушения полимеркомпозитной арматуры / А. Р. Гидзатулин, В. Г. Хозин, А. Н. Куклин, А. М. Хуснутдинов // *Инженерно-строительный журнал*. 2014. № 3. С. 40–50.
 12. Castro, P. F. Tensile and Nondestructive Testing of FRP bars / P. F. Castro, N. J. Carino // *J. Compos. Constr.* 1998. Vol. 2, No 1. P. 17–27. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0268\(1998\)2:1\(17\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0268(1998)2:1(17)).
 13. Василевич, Ю. В. Влияние химической усадки связующего в процессе отверждения на образование остаточных напряжений в цилиндрических оболочках из композита / Ю. В. Василевич, К. А. Горельий, С. В. Сахоненко, С. Н. Иванов // *Теоретическая и прикладная механика: междунар. науч.-техн. сб.* Минск: БНТУ. 2016. Вып. 31. С. 67–72.
 14. Скудра, А. М. Прочность армированных пластиков / А. М. Скудра, Ф. Я. Булавс. М.: Химия, 1982. 213 с.
 15. Модельные представления о механике межфазного микроконтактного взаимодействия в чугунах с вермикулярным графитом / В. Г. Барсуков, А. Е. Шишкин, Б. Крунич, В. В. Барсуков // *Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр.* Минск: Промпечать, 2013. Вып. 2. С. 382–387.
 16. Dems, K. Modeling of Fiber Reinforced Composite Materials Subjected to Thermal Load / K. Dems, E. Radaszewska, J. Turant // *Journal of Thermal Stresses*. 2012. Vol. 35, No 7. P. 579–595. <https://doi.org/10.1080/01495739.2012.674786>.
 17. Барсуков, В. Г. Параметры элементарных ячеек для аналитического определения термоупругих усадочных напряжений в наполненных термопластах / В. Г. Барсуков, Е. В. Грахольская // *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 6. Тэхніка*. 2020. Т. 10, № 2. С. 32–40.
 18. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев; отв. ред. Г. С. Писаренко. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Наук. думка, 1988. 736 с.
 19. Прикладная механика / А. Т. Скойбеда, А. А. Миклашевич, Е. Н. Левковский [и др.] / под общ. ред. А. Т. Скойбеда. Минск: Высш. шк., 1997. 522 с.
 20. Мэттьюз, Ф. Композитные материалы: механика и технология / Ф. Мэттьюз, Р. Ролингс; пер. с англ. С. Л. Баженов. М.: Техносфера, 2004. 406 с.
 21. Композиционные материалы: справ. / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин [и др.] / под ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
 22. Композиционные материалы: справ. / Л. Р. Вишняков, Т. В. Грудина, В. Х. Кадыров [и др.]; под ред. Д. М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
 23. Миненков, Б. В. Прочность деталей из пластмасс / Б. В. Миненков, И. В. Стасенко. М.: Машиностроение, 1977. 264 с.
 24. FRP reinforcement in RC structures: Technical report. fib CEP=FIP. 2007. Bulletin 40. 147 p. URL: <https://www.alientechologies.ru/docs/40%20-%20FRP%20reinforcement%20in%20RC%20structures.pdf>

Поступила 10.09.2024

Подписана в печать 19.11.2024

Опубликована онлайн 31.03.2025

REFERENCES

1. ACI 440.1R–06. *Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars*. Detroit: American Concrete Institute (ACI), 2006. 44.
2. CAN/CSA-S806–02 (R2007). *Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers*. Canadian Standards Association, 2012. 206.
3. Japan Society of Civil Engineers (JSCE) (1997). *Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforcing Materials. Concrete Engineering, Series 23*. Tokyo, JSCE. 199.
4. Jarek B., Kubik A. (2015) Zastosowanie Prętów Zbrojeniowych z Włókna Szklanego (GFRP) w Budownictwie. *Przegląd Budowlany*, (012), 21–26.
5. Cui Y., Cheung M. M. S., Noruziaan B., Lee S., Tao J. (2008) Development of Ductile Composite Reinforcement Bars for Concrete Structures. *Materials and Structures*, 41 (9), 1509–1518. <https://doi.org/10.1617/s11527-007-9344-8>.
6. CNR-DT 203/2006. *Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars*. Rome, Italian National Research Council (CNR), 2006. 35.
7. Koryagin S. I. (1996) *Load-Bearing Capacity of Composite Materials*. Kaliningrad, Kaliningrad University. 301 (in Russian).

8. Ashchepkau M. Yu., Shil'ko S. V., Drobysh T. V., Choe H. (2020) Tensile Fracture Specificity of Unidirectional Metal-Polymer Glass-Fiber Composites With Cord Wire. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 3 (52), 55–62. <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2020-3-52-55-62>.
9. Barsukov V. G., Volik A. R., Sazon S. A. (2020) Structural and Mechanical Aspect of Composite Reinforcement Strength. *E3S Web Conf.*, 212, 02002. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202021202002>.
10. Sadin E. Ya. (2016) Anchoring of Fiberglass Reinforcement in Concrete Produced in the Republic of Belarus. *Arkhitektura i Stroitelstvo* [Architecture and Construction], (3), 68–71 (in Russian).
11. Gizdatullin G. A., Khozin V. G., Kuklin A. N., Khusnutdinov A. M. (2014) Specifics of Testing and Fracture Behavior of Fibre-Reinforced Polymer Bars. *Magazine of Civil Engineering*, 47 (3), 40–47. <https://doi.org/10.5862/mce.47.4>(in Russian).
12. Castro P. F., Carino N. J. (1998) Tensile and Nondestructive Testing of FRP Bars. *Journal of Composites for Construction*, 2 (1), 17–27. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0268\(1998\)2:1\(17\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0268(1998)2:1(17)).
13. Vasilevich Yu. V. (2016) The Influence of Chemical Shrinkage of the Binder during Curing Process on the Formation of Residual Stresses in Cylindrical Composite Shells. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunar. nauch.-tekhn. sb.* [Theoretical and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection]. Minsk, BNTU, Iss. 31, 67–72 (in Russian).
14. Skudra A. M., Bulavs F. Ya. (1982) *Strength of Reinforced Plastics*. Moscow, Khimiya Publ. 213 (in Russian).
15. Barsukov V. G. Shishkin A. E., Krupich B., Barsukov V. V. (2013) Model Concepts of the Mechanics of Interphase Microcontact Interaction in Cast Irons with Vermicular Graphite. *Aktual'nye voprosy mashinovedeniya: sb. nauch. tr.* [Actual Issues of Mechanical Engineering: Collection of Scientific Papers]. Minsk, Prompechat Publ., Iss. 2, 382–387 (in Russian).
16. Dems K., Radaszewska E., Turant J. (2012) Modeling of Fiber-Reinforced Composite Material Subjected to Thermal Load. *Journal of Thermal Stresses*, 35 (7), 579–595. <https://doi.org/10.1080/01495739.2012.674786>.
17. Barsukov V. G., Grakholskaya E. V. (2020) Parameters of Elementary Cells for Analytical Determination of Thermoelastic Shrinkage Stresses in Filled Thermoplastics. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta Imia Ianki Kupaly. Seryia 6. Tekhnika = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 6. Engineering Science*, 10 (2), 32–40 (in Russian).
18. Pisarenko G. S., Yakovlev A. P., Matveev V. V. (1988) *Handbook of Strength of Materials*. 2nd ed. Kiev, Naukova Dumka Publ. 736 (in Russian).
19. Skoibeda A. T., Miklashevich A. A., Levkovskii E. N. [et al.] (1997) *Applied Mechanics*. Minsk, Vysshaya Shkola Publ. 522 (in Russian).
20. Matthews F., Rawlings R. (1999) *Composite Materials: Engineering and Science*. Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-17714-8>.
21. Vasil'ev V. V., Protasov V. D., Bolotin V. V. [et al.] (1990) *Composite Materials: Handbook*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 512 (in Russian).
22. Minenkov B. V., Stasenko I. V. (1977) *Strength of Plastic Parts*. Moscow, Mashinostroenie Publ. 264 (in Russian).
23. International Federation for Structural Concrete (fib) (2007) *FRP Reinforcement in RC Structures: Technical Report*. Bulletin 40. 147. Available at: <https://www.aliens-technologies.ru/docs/40%20-%20FRP%20reinforcement%20in%20RC%20structures.pdf>.

Received: 10.09.2024

Accepted: 19.11.2024

Published online: 31.03.2025