https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-2-118-123
УДК 539.3

Применение балочных функций для статического расчета изгибаемых стержней и прямоугольных плит

Докт. техн. наук, проф. С. В. Босаков[1)]

[1)]Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В представленной работе прогибы стержня и прямоугольной плиты с любыми типами граничных условий предлагается представлять в виде ряда и двойного ряда по собственным функциям дифференциального уравнения изгибных колебаний балки или плиты с соответствующими граничными условиями. Далее по методу Ритца определяется функционал полной энергии изгиба стержня и изгиба и кручения плиты и действующей на них внешней нагрузки. Для стержня с любыми типами граничных условий дифференцированием функционала полной энергии получено точное решение для прогибов в виде быстро сходящего ряда. При этом использованы ранее опубликованные результаты С. П. Тимошенко и Е. С. Сорокина. Для прямоугольной плиты, используя свойство ортогональности собственных функций и их вторых производных, вычисляется квадратичный функционал от неопределенных коэффициентов при собственных функциях. Дифференцированием функционала по каждому из неизвестных коэффициентов образуется бесконечная система линейных алгебраических уравнений, решение которой способом усечения, позволяет найти прогибы плиты. Далее известными методами теории изгибаемых пластинок находятся усилия в плите. Приведены два примера расчета прямоугольной плиты с четырьмя опертыми гранями и плиты с двумя опертыми гранями. Предлагаемый подход прост, универсален и позволяет рассчитывать прямоугольные плиты с любыми типами граничных условий на контуре на произвольную внешнюю нагрузку. В статье приведена таблица собственных чисел и форм для расчета прямоугольных плит.

Ключевые слова: стержень, прямоугольная плита, метод Ритца, собственные числа, собственные функции

Для цитирования: Босаков, С. В. Применение балочных функций для статического расчета изгибаемых стержней и прямоугольных плит / С. В. Босаков // *Наука и техника.* 2025. Т. 24, № 2. С. 118–123. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-2-118-123

Application of Beam Functions for Static Calculation of Bending Rods and Rectangular Plates

S. V. Bosakov

[1)]Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. In this paper, the deflections of a rod and a rectangular plate with any types of boundary conditions are proposed to be represented as a series and a double series of eigenfunctions of the differential equation of bending vibrations of a beam or plate with the corresponding boundary conditions. Then, using the Ritz method, the functional of the total energy of rod bending and bending and torsion of the plate and the external load acting on them is determined. For a rod with any types of boundary conditions, by differentiating the functional of the total energy, an exact solution for deflections in the form of a rapidly converging series is obtained. In this case, previously published results by S.P. Timoshenko and E.S. Sorokina are used. For a rectangular plate, using the orthogonality property of eigenfunctions and their second derivatives, a quadratic functional of the indefinite coefficients at the eigenfunctions is calculated. Differentiating the functional with respect to each of the unknown coefficients forms an infinite system of linear algebraic equations, the solution of which by the truncation method allows us to find the deflections of the plate. Further, the forces in the plate are found using known methods. Two examples of calculating a rectangular plate with four supported edges and a plate with two supported edges are given. The proposed

Адрес для переписки
Босаков Сергей Викторович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-93-04
vm3_ftk@bntu.by

Address for correspondence
Bosakov Siarhei V.
Belarusian National Technical University
65, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-93-04
vm3_ftk@bntu.by

approach is simple, universal and allows calculating rectangular plates with any types of boundary conditions on the contour for an arbitrary external load. The article provides a table of eigenvalues and forms for calculating rectangular plates.

Keywords: rod, rectangular slab, Ritz method, eigenvalues, eigenfunctions

For citation: Bosakov S. V. (2025) Application of Beam Functions for Static Calculation of Bending Rods and Rectangular Plates / *Science and Technique*. 24 (2), 118–123. https://doi.org/10.21122/2227-1031-2025-24-2-118-123 (in Russian)

Введение

Под балочными функциями в работе будем понимать собственные функции дифференциального уравнения изгибных колебаний стержня с непрерывно распределенной массой. Такие функции для различно опертых балок построены в работах С. П. Тимошенко [1], В. Н. Фаддеевой [2]. Автором они собраны в табл. 1, где также приводятся уравнения для определения собственных чисел и величины первых трех собственных чисел и уравнения для определения последующих. Ранее таблицы численных значений этих функций и интегралов от них приведены в монографии Е. С. Сорокина [3] и позднее у И. М. Бабакова [4] даны таблицы для определения частот собственных колебаний различно опертых прямоугольных плит. Эту же задачу решали авторы [5, 6]. Балочные функции и четные производные от них ортогональны и полезны при решении задач статики, динамики и устойчивости различно опертых стержней и балок.

Основная часть

1. Рассмотрим изгибаемый стержень с любыми граничными условиями.

Энергия деформаций изгиба выражается известной формулой [1]

$$U = \frac{EJ}{2}\int_0^{\ell}\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx, \tag{1}$$

где EJ, ℓ – изгибная жесткость и длина стержня; Y – прогибы стержня.

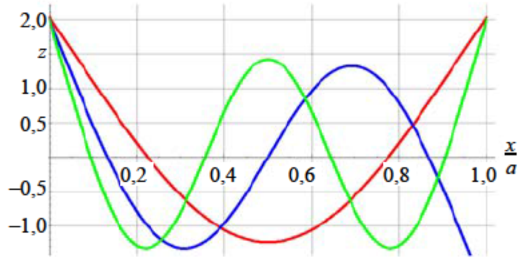
Таблица 1

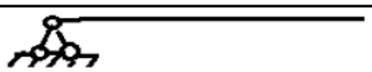
Балочные функции

Beam functions

$$Z_k = -\sin\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) + \frac{\cos\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)(\sin\lambda_k - \sinh\lambda_k)}{\cos\lambda_k - \cosh\lambda_k} + \frac{\cosh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)(\sin\lambda_k - \sinh\lambda_k)}{\cos\lambda_k - \cosh\lambda_k} - \sinh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)$$

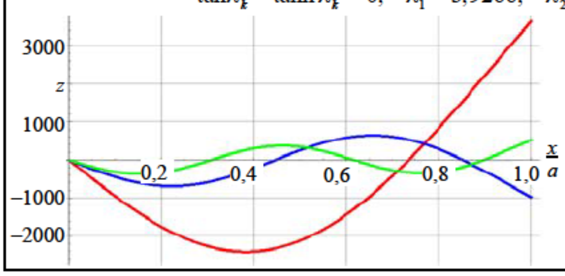
$\cosh\lambda_k \cos\lambda_k - 1 = 0, \quad \lambda_1 = 4{,}73004; \quad \lambda_2 = 7{,}8532; \quad \lambda_3 = 10{,}9955; \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \pi, \quad k = 4, 5, \ldots$



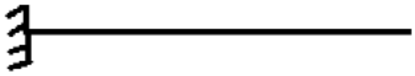


$$Z_k = \cos\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) + \frac{1+\cot\lambda_k}{1-\cot\lambda_k}\sin\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \frac{\mathrm{sech}\lambda_k\left(1 - \cos\lambda_k \sinh\lambda_k + \sin\lambda_k \sinh\lambda_k\right)}{\cos\lambda_k - \sin\lambda_k}\sinh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)$$

$\tan\lambda_k - \tanh\lambda_k = 0; \quad \lambda_1 = 3{,}9266; \quad \lambda_2 = 7{,}0686; \quad \lambda_3 = 10{,}2102; \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \pi, \quad k = 4, 5, \ldots$

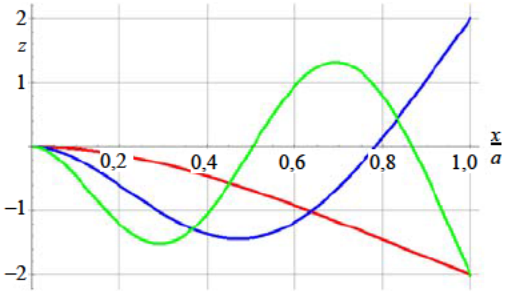


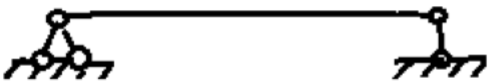
Продолжение табл. 1
Continuation of the table 1



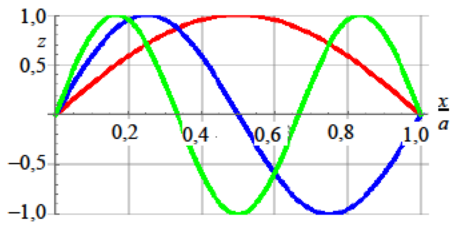
$$Z_k = \cos\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \frac{\cos\lambda_k + \cosh\lambda_k}{\sin\lambda_k + \sinh\lambda_k}\sin\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) + \frac{\cos\lambda_k + \cosh\lambda_k}{\sin\lambda_k + \sinh\lambda_k}\sinh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)$$

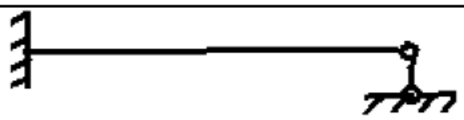
$$1 + \cos\lambda_k \cosh\lambda_k = 0; \quad \lambda_1 = 1{,}8751; \quad \lambda_2 = 4{,}6941; \quad \lambda_3 = 7{,}8648; \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \pi, \quad k = 4, 5, \ldots$$





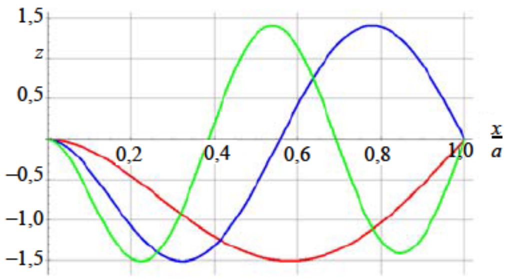
$$Z_k = \sin\left(k\frac{\pi x}{a}\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$



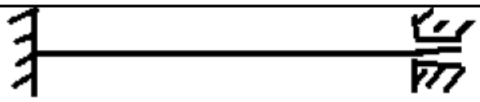


$$Z_k = \cos\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \cosh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right) - \frac{(\cos\lambda_k - \cosh\lambda_k)\sin\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)}{\sin\lambda_k - \sinh\lambda_k} + \\ + \frac{(\cos\lambda_k - \cosh\lambda_k)\sinh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)}{\sin\lambda_k - \sinh\lambda_k}$$

$$\tan\lambda_k - \tanh\lambda_k = 0; \quad \lambda_1 = 3{,}9266; \quad \lambda_2 = 7{,}0686; \quad \lambda_3 = 10{,}2102; \quad \lambda_k = \lambda_{k-1} + \pi, \quad k = 4, 5, \ldots$$

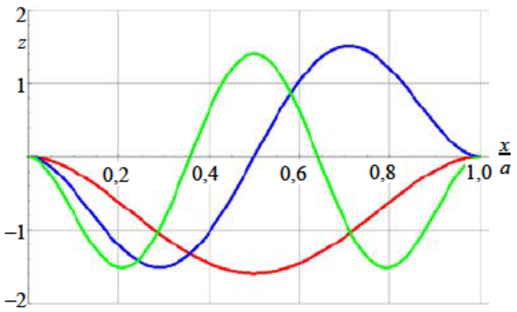


Окончание табл. 1
End of table 1



$$Z_k=\cos\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)+\frac{\sin\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)(\cosh\lambda_k\sin\lambda_k+\cos\lambda_k\sinh\lambda_k)}{-1+\cos\lambda_k\cosh\lambda_k-\sin\lambda_k\sinh\lambda_k}+\frac{(\cosh\lambda_k\sin\lambda_k+\cos\lambda_k\sinh\lambda_k)\sinh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)}{1-\cos\lambda_k\cosh\lambda_k+\sin\lambda_k\sinh\lambda_k}+$$
$$+\frac{\cosh\left(\frac{x\lambda_k}{a}\right)(\cos\lambda_k-\mathrm{sech}\lambda_k+\sin\lambda_k\tanh\lambda_k)}{\cos\lambda_k-\mathrm{sech}\lambda_k-\sin\lambda_k\tanh\lambda_k}$$

$$\cosh\lambda_k\cos\lambda_k-1=0,\quad \lambda_1=4{,}73004;\quad \lambda_2=7{,}8532;\quad \lambda_3=10{,}9955;\quad \lambda_k=\lambda_{k-1}+\pi,\quad k=4,5,\ldots$$



Представим

$$Y=\sum_{k=1}^{\infty}A_k y_k\left(\lambda_k\frac{x}{\ell}\right),\quad \frac{d^4y_k}{dx^4}-\frac{\lambda_k^4}{\ell^4}y_k=0. \tag{2}$$

Здесь λ_k, y_k, A_k – собственные числа, собственные функции и неизвестные постоянные коэффициенты.

Подставим (2) в (1) и выполним интегрирование с учетом [1, 3]:

$$\int_0^{\ell} y_i\left(\lambda_i\frac{x}{\ell}\right)y_k\left(\lambda_k\frac{x}{\ell}\right)dx=0,\quad i\neq k;$$
$$=\left(\frac{\ell}{4}y_i^2(\ell)-\frac{\ell^5}{2\lambda_i^4}y_i'(\ell)y_i'''(\ell)+\frac{\ell^5}{4\lambda_i^4}y_i''^2(\ell)\right),\quad i=k; \tag{3}$$
$$\int_0^{\ell} y_i''^2\left(\lambda_i\frac{x}{\ell}\right)dx=\frac{\lambda_i^4}{\ell^4}\int_0^{\ell} y_i^2\left(\lambda_i\frac{x}{\ell}\right)dx.$$

При действии на стержень сосредоточенной силы P в точке xp составим функционал полной энергии деформаций изгиба и действующей на стержень нагрузки при выполнении (2). Продифференцировав полученное выражение по A_k и приравняв полученное выражение нулю, получим формулу для A_k при любых граничных условиях на концах стержня

$$A_k=\frac{4P\ell^3}{EJ}\frac{y_k\left(\lambda_k\frac{xp}{\ell}\right)}{\left(\lambda_k^4y_k^2(\ell)-2\ell^4y_k'(\ell)y_k'''(\ell)+\ell^4y_k''^2(\ell)\right)}. \tag{4}$$

Для шарнирно опертого стержня:

$$\lambda_k=k\pi;\quad y_k=\sin\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right);\quad y_k(\ell)=y_i''(\ell)=0;$$
$$y_i'(\ell)y_i'''(\ell)=-\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^4\cos^2(k\pi).$$

Если $xp=\dfrac{\ell}{2}$, то

$$Y=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\left(k\pi\frac{x}{\ell}\right)=\frac{2P\ell^3}{\pi^4EJ}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi x}{\ell}}{k^4}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Для максимального прогиба получим с учетом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2}}{k^4}=\frac{\pi^4}{96}$

$$Y_{\max}=\frac{P\ell^3}{48EJ}.$$

Таким образом, получено выражение функции Грина в форме бесконечного ряда для балки с любыми типами граничных условий. Это выражение позволяет решать разнообразные задачи статики при любом нагружении балок.

2. Рассмотрим вопрос применения балочных функций к расчету прямоугольных изгибаемых плит с использованием метода Ритца [7]. Сразу отметим, если плита по четырем сторонам опирается, то энергия деформаций изгиба и кручения плиты выражается в следующем виде [4, 8]:

$$\Phi=\frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy, \tag{5}$$

где $W(x,y)$ – прогибы плиты; D – ее цилиндрическая жесткость.

Если некоторые грани плиты не опираются, то для энергии деформаций необходимо использовать полное выражение

$$\Phi=\frac{D}{2}\left\{\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy, \tag{6}$$

ν – коэффициент Пуассона материала плиты.

Рассмотрим прямоугольную плиту, две грани которой защемлены, две шарнирно оперты (рис. 1). Плита загружена равномерно распределенной нагрузкой. Принимаем прогибы в виде суммы произведений двух функций из табл. 1 для балки с защемленным и шарнирно опертыми концами:

$$W=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{m,n}\,U_m\left(\lambda_m\frac{x}{a}\right)V_n\left(\mu_n\frac{y}{b}\right), \tag{7}$$

$$\frac{d^4U_m}{dx^4}-\lambda_m{}^4U_m=0;\quad \frac{d^4V_n}{dy^4}-\mu_n{}^4V_n=0.$$

Используя (5), находим полную потенциальную энергию плиты и действующей на нее нагрузки как квадратичную функцию коэффициентов $A_{m,n}$. Система линейных алгебраических уравнений для определения $A_{m,n}$ получается дифференцированием полной энергии по каждому из коэффициентов $A_{m,n}$ и приравниванием полученного выражения нулю.

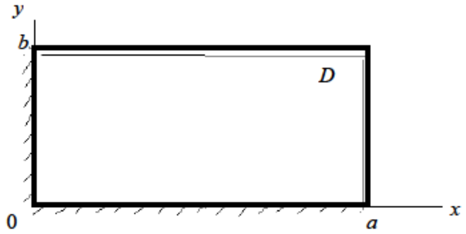


Рис. 1. Прямоугольная плита под действием равномерно распределенной нагрузки

Fig. 1. Rectangular plate under uniformly distributed load

Для плиты с a = 6 м; b = 4 м; D = 21000 кНм; q = 10 кН/м^2 способом усечения [9] с учетом первых четырех членов ряда (7) получено:

$$A_{1,1}=\frac{0,41439q}{D};\ A_{1,2}=\frac{0,01989q}{D};$$

$$A_{2,1}=-\frac{0,02367q}{D};\ A_{2,2}=\frac{0,00277q}{D}.$$

На рис. 2 приведена поверхность прогибов рассматриваемой плиты (м).

Теперь рассмотрим прямоугольную плиту, одна грань которой жестко защемлена, другая шарнирно оперта, остальные не опираются. На плиту действует угловая сосредоточенная сила (рис. 3). Представим прогибы плиты в виде (7), где балочные функции выберем из табл. 1 для консольной балки и балки с шарнирной опорой. Для плиты с характеристиками предыдущего примера и P = 40 кН с учетом первых четырех членов ряда (7) после промежуточных вычислений получено:

$$A_{1,1}=2{,}12410\cdot10^{-8}P;\ A_{1,2}=-3{,}13033\cdot10^{-12}P;$$

$$A_{2,1}=-1{,}07439\cdot10^{-8}P;\quad A_{2,2}=2{,}97864\cdot10^{-12}P.$$

На рис. 4 приведена поверхность прогибов плиты. По функциям прогибов по известным формулам находятся внутренние усилия в плите [3].

Отметим, что в этом примере на неопертых краях плиты неточно выполняются статические граничные условия для каждого члена ряда (7). Однако известно [8], что при использовании метода Ритца они выполняются при взятии достаточно большого числа членов ряда (7).

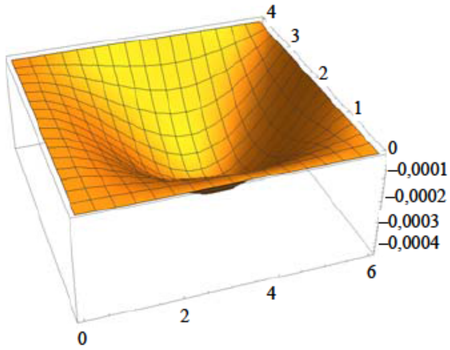


Рис. 2. Поверхность прогибов плиты

Fig. 2. Surface of slab deflections

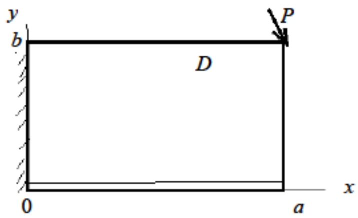


Рис. 3. Прямоугольная плита, загруженная угловой силой

Fig. 3. Rectangular plate loaded with angular force

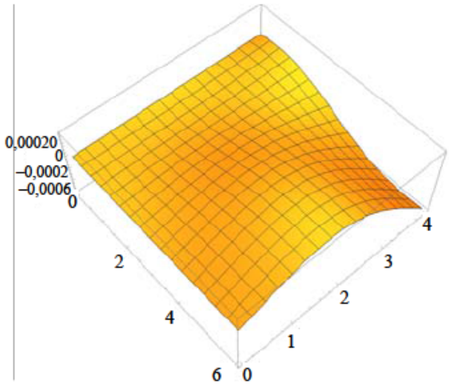


Рис. 4. Поверхность прогибов в прямоугольной плите с двумя опорными краями

Fig. 4. Surface of deflections in a rectangular plate with two supported edges

ВЫВОДЫ

1. К настоящему времени известны точные решения Навье и Леви для статического расчета изгибаемых плит в форме тригонометрических и гиперболо-тригонометрических рядов [7] для шарнирно опертой по четырем граням и шарнирно опертой по двум противоположным граням и различно опертой по двум остальным. В монографии [10] изложен подход В. Новацкого, в котором задача расчета прямоугольной плиты с различными опертыми гранями сложным образом сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

2. Предлагаемое в работе решение универсальное, проще и быстрее позволяет получить прогибы прямоугольной плиты с любыми граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
2. Фаддеева, В. Н. О фундаментальных функциях оператора X^{IV} / В. Н. Фаддеева // Труды Математического института АН СССР. 1949. Т. 28. С. 157–159.
3. Сорокин, Е. С. Динамика междуэтажных перекрытий / Е. С. Сорокин. М.–Л.: Стройиздат, Наркомстрой, 1941. 240 с.
4. Бабаков, И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. М.: Наука, 1965. 559 с.
5. Галеркин, Б. Г. Упругие тонкие плиты / Б. Г. Галеркин. М.: Госстройиздат, 1933. 371 с.
6. Wu, J. H. Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions / Jiu Hui Wu, A. Q. Liu, H. L. Chen // Journal of Applied Mechanics. 2007. Vol. 74. P. 1247–1251. https://doi.org/10.1115/1.2744043.
7. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
8. Михлин, С. Г. Прямые методы в математической физике / С. Г. Михлин. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1950. 429 с.
9. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. М.–Л.: Физматгиз, 1962. 701 с.
10. Кончковский, З. Плиты: статические расчеты / З. Кончковский. М.: Стройиздат, 1980. 480 с.

Поступила 04.11.2024
Подписана в печать 21.01.2025
Опубликована онлайн 31.03.2025

REFERENCES

1. Timoshenko S. P. (1959) *Oscillations in Engineering*. Moscow, Fizmatgiz Publ. 439 (in Russian).
2. Faddeeva V. N. (1949) On the fundamental functions of the operator X^{IV}. *Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences*, 28, 157–159 (in Russian).
3. Sorokin E. S. (1941) *Dynamics of Interfloor Ceilings*. Moscow-Leningrad, Publishing Houses “Stroyizdat”, “Narkomstroy”. 240 (in Russian).
4. Babakov I. M. (1965) *Theory of Oscillations*. Moscow, Nauka Publ. 559 p.
5. Galerkin B. G. (1933) *Elastic Thin Plates*. Moscow, Gosstroyizdat Publ. 371 (in Russian).
6. Wu J. H., Liu A. Q., Chen H. L. (2005) Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions. *Journal of Applied Mechanics*, 74 (6), 1247–1251. https://doi.org/10.1115/1.2744043.
7. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. (1990) *Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ. 400 (in Russian).
8. Mikhlin S. G. (1950) *Direct Methods in Mathematical Physics*. Moscow-Leningrad, Gostekhteorizdat Publ. 429 (in Russian).
9. Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1962) Approximate Methods of Higher Analysis. Moscow-Leningrad, Fizmatgiz Publ. 701 (in Russian).
10. Konchkovsky Z. (1980) *Plates. Static Calculations*. Moscow, Stroyizdat Publ. 480 (in Russian).

Received: 04.11.2024
Accepted: 21.01.2025
Published online: 31.03.2025