

$$G_{\min} = \frac{Q}{I_{\kappa}^* - I_{\text{н}}} = \frac{Lc_{\text{рж}}(t_{\text{н}} - t_{\kappa}) + Q_{\text{и}}}{I_{\kappa}^* - I_{\text{н}}}. \quad (7)$$

Отсюда скорость воздуха в рабочем сечении градирни $w_{\min} = G_{\min} / (S\rho_{\Gamma})$.

Для достижения высокой эффективности в градирне должно выполняться следующее условие $w_{\Gamma} > w_{\min}$ исходя из гидродинамических характеристик выбранных блоков оросителей и мощности на подачу воздуха вентиляторами.

Из выражения (6) можно записать максимальную ожидаемую эффективность охлаждения воды $E_{\text{ж}}$ (1). Например, при $E_{\Gamma} = 0,99$, получим

$$E_{\text{ж}} = \frac{0,99\rho_{\Gamma}w_{\Gamma}(I_{\kappa}^* - I_{\text{н}})}{\rho_{\text{ж}}c_{\text{рж}}q_{\text{ж}}(t_{\text{н}} - t^*) + Q_{\text{и}}}, \quad (8)$$

т.е. при заданном режиме $(w_{\Gamma}, q_{\text{ж}})$ и термодинамических параметрах воды $(t_{\text{н}}, t^*)$ и воздуха $(I_{\kappa}^*, I_{\text{н}})$ более глубокое охлаждение воды в данной постановке достичь невозможно.

Тепловую эффективность по газовой фазе, требуемую для охлаждения воды, можно вычислить на основе применения ячеечной или диффузионной моделей структуры потоков [4,5].

Список использованных источников

1. Комиссаров Ю.А., Гордеев Л.С., Вент Д.П. Процессы и аппараты химической технологии. Учеб. пособие для вузов. – М.: Химия, 2011. – 1230 с.
2. Александров И.А. Ректификационные и абсорбционные аппараты. Методы расчета и основы конструирования. – М.: Химия, 1971. – 296 с.
3. Пономаренко В.С., Арефьев Ю.И. Градирни промышленных и энергетических предприятий. Справочное пособие. Под общ. ред. В.С. Пономаренко. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 376 с.: ил.
4. Лаптева Е.А., Лаптев А.Г. Прикладные аспекты явлений переноса в аппаратах химической технологии и теплоэнергетики (гидромеханика и тепломассообмен). – Казань: Издательство «Печать-Сервис XXIвек», 2015. – 236 с.
5. Лаптев А.Г., Ведыгаева И.А. Устройство и расчет промышленных градирен. Казань: Казанский гос. энерг. ун-т, 2004. – 180 с.

УДК 511.42

ОЦЕНКА P-АДИЧЕСКОЙ НОРМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО МНОГОЧЛЕНА НА ЦИЛИНДРЫ Q_p

Морозова И.М., Кемеш О.Н.

Белорусский государственный аграрный технический университет

Аннотация. В настоящей работе дана оценка для величины p -адической нормы целочисленного многочлена на цилиндры в Q_p .

Ключевые слова: мера Хаара, лемма Гельфонда, размерность Хаусдорфа, поле p -адических чисел, p -адический цилиндр, диофантовы приближения, p -адическая норма.

Часто при решении прикладных задач, возникают ситуации, когда применение архимедовой метрики не описывает суть явления. В этом случае стали использовать неархимедову геометрию и p -адические числа.

Академик В.С. Владимиров [1] со своими учениками разработали p -адические модели квантовой механики и теории струн. В. Драгович и А. Драгович [2] описывают p -адическую модель генетического кода. А.Ю. Хренников [3] применил p -адический анализ к описанию

моделей мышления. Во всех случаях была применена неархимедова метрика, которая зависит от делимости заданного числа на степень простого числа. Нашу работу можно считать продолжением исследования выше указанных авторов.

Введем несколько определений.

Определение 1. Любое рациональное число x можно единственным образом представить в виде несократимой дроби $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, где p есть простое число, γ есть целое число, m – целое, n – натуральное, p, m, n – взаимно просты.

Определение 2. p -адической нормой вышеприведенного рационального числа x называется число $|x|_p = p^{-\gamma}$. Таким образом, p -адическая норма измеряет, на какую степень p делится рациональное число, и норма тем меньше, чем больше эта степень, то есть последовательность $\{p^\gamma\}, \gamma \rightarrow +\infty$, будет стремиться к нулю в p -адической норме.

Введем класс целочисленных полиномов $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, у которых степень $\deg P = n$, а высота $H(P) = \max |a_j|, 0 \leq j \leq n$ не превосходит некоторого достаточно большого натурального числа Q . Этот класс обозначим через

$$P_n(Q) = \{P(x) \in Z[x], \deg P = n, H(P) \leq Q\}.$$

Будем обозначать $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$ величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q . Через $\#B$ обозначим количество элементов конечного множества B . Если два числа K и M отличаются в $c(n)$ раз, то будем записывать $K \asymp M$. Нетрудно получить оценки

$$c_1 Q^{n+1} < \#P_n(Q) < c_2 Q^{n+1}$$

и доказать, что подкласс $P_n(Q)$, состоящий из неприводимых над полем рациональных чисел полиномов – $T_n(Q)$ имеет мощность $c_3 Q^{n+1}$. А.О. Гельфонд [4] доказал, что два полинома $P_1(x), P_2(x) \in T_n(Q)$ не могут в трансцендентной точке ξ удовлетворять неравенству $\max(|P_1(\xi)|, |P_2(\xi)|) < c_4 Q^{-2n+1}$ при достаточно малой величине c_4 . Его лемма была обобщена В.И. Берником [5] на значения полинома в точках из некоторого интервала I длины $|I| = Q^{-\eta}, \eta > 0$. Это обобщение стало важным моментом при нахождении размерности Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности. Приведем формулировку этого результата.

Лемма 1. Пусть на интервале $I, |I| = Q^{-\eta}, \eta > 0$ заданы два полинома $P_1(x), P_2(x) \in T_n(Q)$, такие, что $\max_{x \in I} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \tau > 0$. Тогда, если $\delta > 0$, при $Q > Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta \tag{1}$$

Ясно, что неравенство (1) при уменьшении η может быть усилено, что важно, например, при оценке количества полиномов $P(x) \in P_n(Q)$ с заданными дискриминантами или дискриминантами, делящимся на бóльшую степень фиксированного простого числа. Для получения более точных оценок обобщим неравенство (1) на поле p -адических чисел.

Доказанная нами теорема отличается от теорем доказанных ранее В.И. Берником тем, что в левую часть неравенства добавлены слагаемые вида $2 \max(\tau + k\eta, 0), k = 1, 2, \dots$, что потребовало рассмотрения не первых производных многочленов, а производных всех порядков.

Обозначим через μA меру Хаара p -адического цилиндра $A \subset Q_p, |w|_p$, – p -адическую норму $w \in Q_p$.

Определение 3. Множество $A \subset Q_p$ называется p -адическим цилиндром, если оно содержит все точки Q_p вида

$$w = a_l p^{-l} + a_{l-1} p^{-l+1} + \dots + a_1 p^{-1} + a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^{-k} + b_{k+1} p^{k+1} + \dots,$$

где $a_j, -l \leq j \leq k$ – фиксированные целые числа $0 \leq a_j \leq p-1$, а $b_j, j \geq k+1$ – произвольные целые числа $0 \leq b_j \leq p-1$.

Пусть Q – достаточно большое натуральное число.

Теорема. Пусть $A \subset Q_p$ – цилиндр и $\mu A = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$ для всех p -адических чисел $w \in A$ и два полинома $P(w)$, $T(w)$ без общих корней удовлетворяют неравенствам

$$\max_{w \in A} (|P(w)|_p, |T(w)|_p) < Q^{-\tau}, \tau > 0, \max(H(P), H(T)) \leq Q.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$

$$\tau + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \max(\tau - k\eta, 0) > 2n + \delta. \quad (2)$$

Для доказательства теоремы понадобится

Лемма 2. Пусть γ_1 – ближайший корень полинома $P(x)$ к фиксированному числу $w \in Q_p$. Тогда справедливы неравенства

$$|w - \gamma_1|_p \leq |P(w)|_p |P'(w)|_p^{-1}, \quad |w - \gamma_1|_p \leq |P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \quad (3)$$

$$|w - \gamma_1|_p \leq \min_{2 \leq j \leq n} \left(|P(w)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} |\gamma_1 - \gamma_2|_p \cdots |\gamma_1 - \gamma_j|_p \right)^{\frac{1}{j}}. \quad (4)$$

Лемма 2 доказана в работах В.Г. Спринджука и В.И. Берника [6]. Корни $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ полинома $P(w)$ упорядочим относительно w следующим образом:

$$|w - \gamma_1|_p \leq |w - \gamma_2|_p \leq \dots \leq |w - \gamma_n|_p. \quad (5)$$

Доказательство теоремы. Из системы неравенств $|P(w)|_p < Q^{-\tau}$, $|T(w)|_p < Q^{-\tau}$, $w \in A$, и леммы 2 заключаем, что среди корней $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ полинома $P(w)$ и корней $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ полинома $T(w)$ найдется пара корней (γ_k, β_l) , $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n$ таких, что корень γ_k будет ближайшим ко всем $w_1 \in L_1 \subset A$, $\mu L_1 \geq n^{-1} Q^{-\eta}$, а корень β_l – ко всем $w_2 \in L_2 \subset A$, $\mu L_2 > n^{-1} Q^{-\eta}$. Так как $w_1, w_2 \in A$, то $|w_1 - w_2|_p \leq Q^{-\eta}$. Полагаем $k=1, s=1$, и относительно корней γ_1, β_1 произведем упорядочивание остальных корней γ_i, β_j :

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p, \quad |\beta_1 - \beta_2|_p \leq |\beta_1 - \beta_3|_p \leq \dots \leq |\beta_1 - \beta_n|_p.$$

Введем обозначения:

$$|\gamma_i - \gamma_j|_p = Q^{-p_j}, p_j = \sum_{i=j}^{n-1} p_{i+1}, 2 \leq j \leq n. \quad (6)$$

Такие же обозначения введем и для корней β_j полинома $T(w)$. Будем предполагать, что полиномы $P(w)$ и $T(w)$ выбраны из некоторого подмножества $M_n(Q) \subset P_n(Q)$ такого, что величины p_j и p_i в (6) для различных полиномов $P(w)$ и $T(w)$ отличаются друг от друга не более чем на некоторую очень малую, но фиксированную величину $\varepsilon_1 > 0$. В итоге левая часть неравенства может измениться на $c_5 \varepsilon_1 < \frac{\delta}{2}$ при подходящем выборе ε_1 . Это стандартное рассуждение в метрической теории диофантовых приближений.

Из последнего неравенства (4) в лемме 2 условие $|P(w)|_p < Q^{-\tau}$ с учетом новых обозначений (6) можно записать так:

$$|w_1 - \gamma_1|_p \leq \min_{1 \leq j \leq n-1} Q^{-\frac{\tau-p_j}{j}}. \quad (7)$$

Аналогичное неравенство получим для

$$|w_2 - \beta_1|_p \leq \min_{1 \leq i \leq n-1} Q^{-\frac{\tau-p_i}{i}}. \quad (8)$$

Пусть минимальное значение в правой части неравенства (7) достигается при $j = j_0$, а в (8) при $i = i_0$. Так как w_1 и w_2 можно выбрать так, что

$$|w_1 - \gamma_1|_p \geq \frac{1}{4n} Q^{-\eta}, |w_2 - \beta_1|_p \geq \frac{1}{4n} Q^{-\eta},$$

что легко доказать от противного.

Откуда, используя неравенство $p_j \geq 0$, имеем

$$p_j > \max(\tau - j\eta, 0), 1 \leq j \leq n-1. \quad (9)$$

Так как минимум в правых частях неравенств (7), (8) достигается при $j_0 = j$, то для всех точек цилиндра A

$$|w_1 - \gamma_1|_p \leq \max\left(Q^{-\frac{\tau-p_{j_0}}{j_0}}, Q^{-\eta}\right), |w_2 - \beta_1|_p \leq \max\left(Q^{-\frac{\tau-p_{j_0}}{j_0}}, Q^{-\eta}\right). \quad (10)$$

В дальнейшем важным является соотношение величин $Q^{-p_j}, 2 \leq j \leq n$ и правых частей неравенств (10). Ясно, что существует $2 \leq s \leq n-1$, для которого верно неравенство

$$Q^{-p_s} \leq Q^{-\frac{\tau-p_{j_0}}{j_0}} \leq Q^{-p_{s+1}}, 2 \leq s \leq n-1. \quad (11)$$

Рассмотрим результат полиномов $P(w)$ и $T(w)$, не имеющих общих корней. Доказано, что $|R(P, T)| \leq c_6 Q^{2n}$, поэтому по формуле произведения $|a|_p |a_p| \geq 1$ для $a \in Z$ имеем

$$Q^{-2n} \leq |R(P, T)|_p. \quad (12)$$

Оценим $|R(P,T)|_p$ сверху. Из определения результата

$$|R(P,T)|_p = \left| a_n^n(P) a_n^n(T) \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\gamma_i - \beta_j| \right|_p \leq \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\gamma_i - \beta_j|_p.$$

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\gamma_i - \beta_j|_p \leq Q^{-s^2 \frac{\tau - p j_0}{j_0} - (2s+1)p_s - 2(p_{s+1} + \dots + p_{n-1})} = Q^{-b}. \quad (13)$$

Оценим значение показателя степени b в (13) при $j_0 = s$.

$$b \geq s(\tau - p_s) + (2s+1)p_s + \sum_{k=s+1}^{n-1} p_k. \quad (14)$$

Покажем, что правая часть в неравенстве (14) больше $2n$. Для этого достаточно убедиться, что

$$s(\tau - p_s) + (2s+1)p_s > \tau + 2 \sum_{k=1}^s \max(\tau - k\eta, 0). \quad (15)$$

При $\tau - k\eta \geq 0$ суммы в левой и правой частях (15) можно записать в виде

$$s\tau + (s+1)p_s > 2(s+1)(\tau - s(s+1)\eta), \text{ или } (s+1)p_s \geq (s+1)\tau - s(s+1)\eta,$$

$$p_s \geq \tau - s\eta. \quad (16)$$

Так как последнее неравенство в (16) справедливо по (9), поэтому верно и неравенство (15). Теорема доказана.

Список использованных источников

1. Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И. p -Адический анализ и математическая физика. Москва: Наука, 1994. – Singapore: World Scientific, 1994.
2. В. Dragovich, A. Dragovich A p -Adic Model of DNA Sequence and Genetic Code, <http://arxiv.org/abs/q-bio.GN/0607018>
3. Хренников А.Ю. Неархимедов анализ и его приложения. – Москва: Физматлит, 2003.
4. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – С. 448.
5. Гельфонд А.О. Трансцендентные и алгебраические числа / А.О. Гельфонд. – 2-е изд. – М.: URSS, 2006. – 224 с.
6. Bernik V. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations / V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1983. – Vol. 42, № 3. – P. 219–253.
7. Кемеш О.Н. Обобщение леммы Гельфонда на цилиндры в поле p -адических чисел. – Мн.: Весці НАН Беларусі, 2018. – Т. 1. – С. 24-29.

УДК 511

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АНИМАЦИОННЫХ РИСУНКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ СПОСОБОМ НАГЛЯДНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Новик И.А.¹, Ненартович М.В.²

¹ Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка

² Государственное учреждение образования «Средняя школа № 17 г. Лида»

Аннотация. В данной статье дается определение понятия «информационного образовательного ресурса» и выявлена сущность наглядного моделирования при обучении учащихся математике.