

УДК 517.946.9

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ В КРИОМЕДИЦИНЕ

Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А., Паритов А.Ю., Хаихожеева Д.А.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена применению задач со свободными границами в проблемах криомедицины. Для определения максимального размера охлажденной, замороженной и криопораженной области биологической ткани решена стационарная задача, а также методом эквивалентной линеаризации получено приближенное решение нестационарной задачи. С использованием матрично-ориентированной среды MatLab проведены численные расчеты.

Ключевые слова: криомедицина, криогенное замораживание, биологическая ткань, свободная граница; одномерная задача; стационарная задача.

Введение. Криогенное замораживание используется в медицине для локального необратимого разрушения биологической ткани, для этого применяются криозонды с плоской, цилиндрической или с полусферической формами охлаждающей поверхности. Криохирurgia считается точным и управляемым процессом, хотя полное решение ее тепловых аспектов не получено до настоящего времени. Решающее значение для решения таких проблем приобретают математические методы расчета и прогноза, основанные на исследовании специальных постановок задач Стефана, относящихся к задачам математической физики. В таких задачах определению подлежат как температурное поле, так и его подвижные изотермические поверхности, закон движения которых заранее не известен. Предлагаемая работа посвящена исследованию одной такой краевой задачи со свободными границами для нелинейных эволюционных уравнений, возникающих при математическом моделировании проблем криохирurgerии.

Постановка задачи. Определение динамики температурного поля в охлаждаемых и замораживаемых биологических тканях описывается решением следующей задачи со свободными границами: [1-3]:

$$\begin{aligned}
 & u_{xx} - u_t = u^\beta, \quad 0 < x < s(t), \\
 & u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < s(0), \\
 & u_x - Hu = -H\varphi(t), \quad x = 0, \\
 & u(s(t), t) = 0, \quad u_x(s(t), t) = 0, \\
 & u(0, t_1) = 1;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_t = 0, \quad 0 < x < x^*(t), \\
 & u_{xx} - u_t = u^\beta, \quad x^*(t) < x < s(t), \\
 & u_x - Hu = -H\varphi(t), \quad x = 0, \\
 & [u]_{x^*} = 0, \quad [u_x]_{x^*} = Px_t^*, \quad u(x^*(t), t) = 1, \\
 & u(s(t), t) = 0, \quad u_x(s(t), t) = 0, \\
 & u(0, t_2) = u_n;
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 & u_{xx} - u_t = u^\beta, \quad x^*(t) < x < s(t), \\
 & u_x - Hu = -H\varphi(t), \quad x = 0, \\
 & [u]_{x^{**}} = 0, \quad [u_x]_{x^{**}} = P_1 x_t^{**}, \quad u(x^{**}(t), t) = 1, \\
 & u(s(t), t) = 0, \quad u_x(s(t), t) = 0, \\
 & [u]_{x^*} = 0, \quad [u_x]_{x^*} = Px_t^*, \quad u(x^*(t), t) = 1.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

В (1)-(3) температурное поле $u=u(x,t)$ и границы $x^{**}=x^{**}(t)$, $x^*=x^*(t)$, $s=s(t)$ являются искомыми функциями, остальные параметры и функции считаются известными.

Для определения максимального размера охлажденной, замороженной и криопораженной области биологической ткани при заданной температуре решается стационарная задача, соответствующей (1)-(3).

Считая $x^*=x^*(t)$, $x^{**}=x^{**}(t)$ и $s=s(t)$, приближенное решение задачи (1)-(3) ищется в виде:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{u_n + H(u_n - \varphi(t))}{1 + Hx^{**}}(x - x^{**}(t)), & 0 < x < x^{**}(t), \\ 1 + \frac{H(1 - \varphi(t))}{1 + Hx^*(t)}(x - x^*(t)), & x^{**}(t) < x < x^*(t), \\ \left(\frac{s(t) - x}{s(t) - x^*(t)} \right)^{2/(1-\beta)}, & x^*(t) < x < s(t) \end{cases} \quad (4)$$

Краевые условия для $x=0$, $x=x^*(t)$, $x=s(t)$ выполняются автоматически. Дифференциальные уравнения и оставшиеся краевые условия удовлетворимы в смысле общих тепловых балансов по каждой из областей биоткани с учетом условия сопряжения:

$$\begin{aligned} u_x(x^*+0,t) - Px_t^* - H\left(1 + \frac{H(\varphi-1)x^*(t)}{1 + Hx^*(t)} - \varphi\right) - \frac{1}{a^2} \int_0^{x^*} u_t(x,t)dx &= 0, \\ u_x(x^*+0,t) + \int_0^{x^*} u_t(x,t)dx + \int_{x^*}^s u^\beta(x,t)dx &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая в (5) $u(x,t) \approx \tilde{u}(x,t)$, после вычисления производных и интегралов для определения $x^*=x^*(t)$ и $s=s(t)$ получаем задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} + \frac{2}{1-\beta} \frac{dx^*}{dt} + \frac{3-\beta}{1+\beta} (s-x^*) - \frac{2(3-\beta)}{(1-\beta)^2} \cdot \frac{1}{s-x^*} &= 0, \quad t > t_1, \\ \frac{d}{dt} \left\{ \left[\frac{(\varphi-1)x^*}{2a^2(H^{-1} + x^*)} + P \right] x^* \right\} - \frac{\varphi-1}{H^{-1} + x^*} + \frac{2}{1-\beta} \cdot \frac{1}{s-x^*} &= 0, \quad t > t_1 \\ x^*(t_1) = 0, \quad s(t_1) = s_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Заменяя производные конечными разностями, получаем систему нелинейных уравнений относительно $x^*=x^*(t)$ и $s=s(t)$ на данном временном слое.

Алгоритмы получения приближенных решений реализованы на ЭВМ. В работе проведены численные расчеты для определения динамики изотермы замораживания при плоско-параллельной криодеструкции при 1) $h=1000$, 2) $h=500$, 3) $h=100$, 4) $h=50$. Результаты представлены на рис. 1.

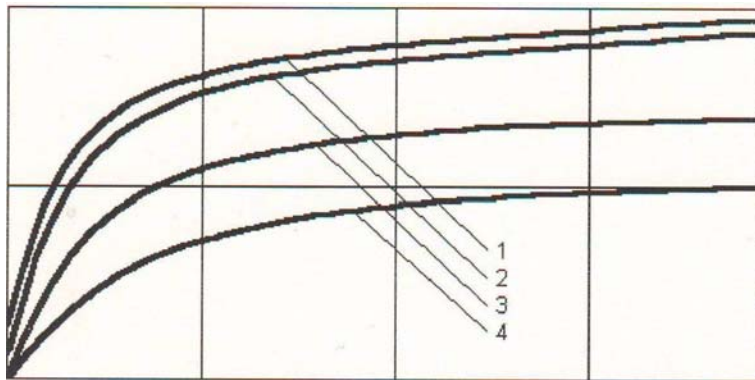


Рисунок 1 – Динамика изотермы замораживания при плоско-параллельной криодеструкции

Динамика температурного поля при плоско-параллельной криодеструкции представлена на рис. 2, пунктиром изображен случай, когда $h=103$, а сплошной линией случай, когда $h=105$.

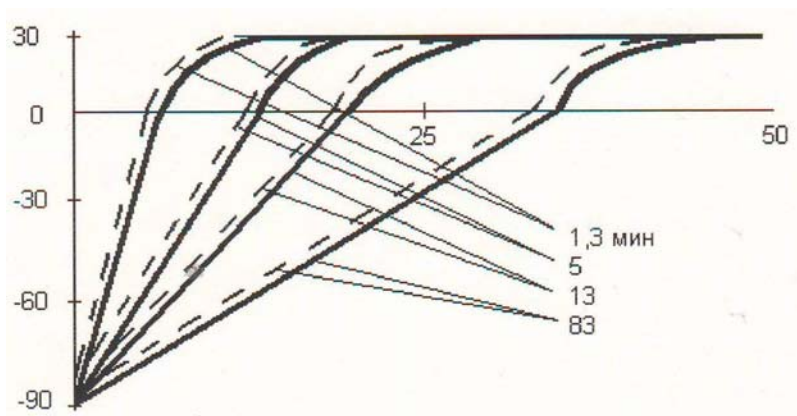


Рисунок 2 – Динамика температурного поля при плоско-параллельной криодеструкции

Интервал времени криопоражения при плоско-параллельной криодеструкции представлен на рис. 3. 1) $h=100$, 2) $h=500$, 3) $h=103$, 4) $h=104$, 5) $h=105$.

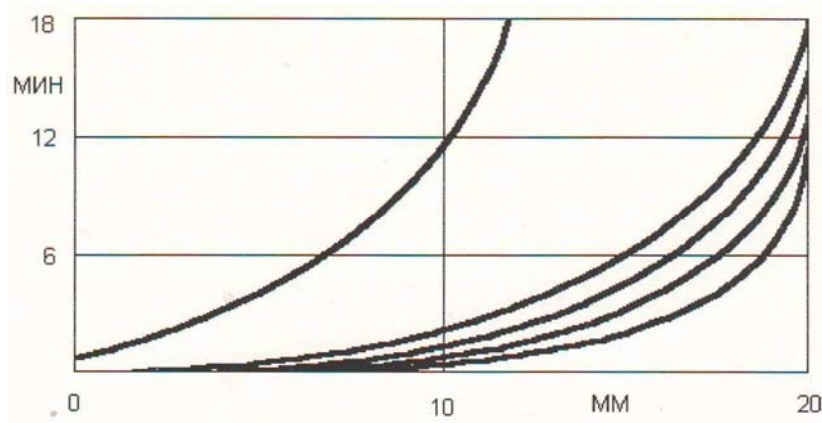


Рисунок 3 – Интервал времени криопоражения при плоско-параллельной криодеструкции

Численные расчеты показывают, что вполне удовлетворительные результаты дают простейшие приближенные решения.

Заключение. Полученные в работе результаты могут быть применены к расчету режимов низкотемпературного воздействия на биологическую ткань, определению значения параметров процесса замораживания, а также при конструировании и совершенствовании криоинструментов. Применение матрично-ориентированного пакета MatLab сокращает работу поиска решения, в отличие от поиска решения аналитическим математическим способом. С помощью данного пакета можно определить количество итераций, приводящих к решению и значения невязок.

Список использованных источников

1. Кайгермазов А.А., Кудаяева Ф.Х., Кармоков М.М., Нахушева Ф.М. Математическая модель плоской криодеструкции биологической ткани. Современные проблемы науки и образования. №2, URL: www.science-education.ru/129-21683, 2015г.
2. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Karmokov M.M., Kerefov M.A., Edgulova E.K., Bechelova A.R. Information and Communication Technologies Solving a Free Boundaries Problems/ Proceedings of the 2017 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information

Technologies” (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017. – ISIN 978-1-5386-0703-9. – Стр. 226.

3. Kudayeva F.K., Kaygermazov A.A., Edgulova E.K., Bechelova A.R., Tkhabisimova M.M., Kerefov M.A. Study of Spherically Symmetric Hypothermia and Biological Cryodestruction Tissues Using matlab/ Proceedings of the 2017 International Conference “Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies” (IT&QM&IS) September, 23-30, 2017 St. Petersburg, Russia, 2017. – ISIN 978-1-5386-0703-9. – Стр. 388.

УДК 539.3: 620.171.5

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИНЫ С ОВАЛЬНЫМ ВЫРЕЗОМ И ТРЕЩИНАМИ ПО КОНТУРУ

Лазарев А.А.

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)

Цель работы – экспериментальная проверка численного решения, полученного с использованием программного комплекса SCAD. В качестве экспериментального метода исследования напряжений применён метод фотоупругости.

В обоих случаях исследовалась модель из поляризационно-оптического материала – оргстекла марки Э2 (модуль упругости $E = 3500$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$, цена полосы по напряжениям $\sigma_0^{1,0} = 1650$ кПа·см) с габаритными размерами 93мм×84мм×6мм. Элемент ослаблен овальным вырезом на пересечении осей симметрии. К контуру отверстия под разным углом сделаны пропилы, имитирующие трещины, в количестве десяти штук. Модель приведена на рисунке 1, цифры 1–10 – номера трещин-пропилов.

Численный расчёт. Методом конечных элементов (МКЭ) с использованием программного комплекса «SCAD» выполнен расчет плоской модели, описанной выше. Конечно-элементная схема расчетной модели и вид нагружения приведены на рисунке 2. Модель нагружена сжимающей номинальной нагрузкой $q_0=10,75$ кН/м в вертикальном направлении. Вертикальная ось симметрии закреплена от горизонтальных смещений, а горизонтальная – от вертикальных. Модель имела квадратную базовую сетку с размером ячеек 1х1 мм. В зоне вершин трещин размер ячеек сетки уменьшен и составляет 0,25х0,25 мм.

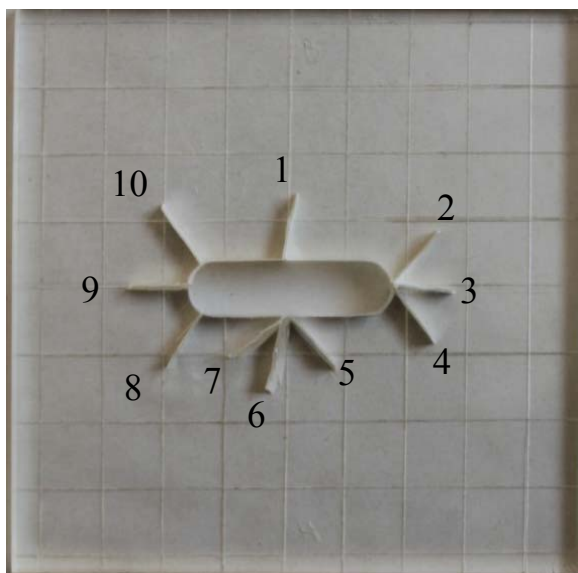


Рисунок 1 – Исследуемая модель

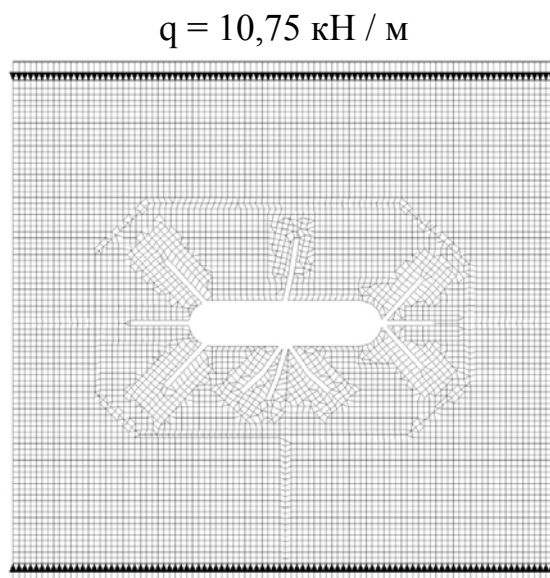


Рисунок 2 – Схема нагружения
расчетной модели

На рисунке 3 представлены поля напряжений σ_1 , σ_2 , и τ_{xy} в модели. Анализируя полученные результаты можно отметить, что зона влияния концентраторов не велика, напряжения в мо-