БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет транспортных коммуникаций

Кафедра «Математические методы в строительстве»

СОГЛАСОВАНО Заведующий кафедрой «Математические методы в строительстве» _______________С.В. Чернявская __________________2025 г.	СОГЛАСОВАНО Декан факультета транспортных коммуникаций __________________С.Е. Кравченко __________________2025 г.

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

РАЗДЕЛ «ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА, ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

для студентов специальностей
7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств»,
7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых»

Составители: Акимов В. А., Рыжков С. П.

Рассмотрено и утверждено на заседании совета факультета транспортных коммуникаций
23 декабря 2024 г., протокол № 4

Минск БНТУ 2025

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕРИАЛОВ

Программа курса, краткий теоретический материал, материал для аудиторной и самостоятельной работы.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебно-методический комплекс по учебной дисциплине «Математика» раздел «Интегрирование функций одной переменной, приложения определенного интеграла, обыкновенные дифференциальные уравнения» предназначен для студентов второго курса специальностей 7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых». Объем изучаемого материала дисциплины в соответствии с учебным планом составляет 152 часа лекций и 136 часов практических занятий.

Целью ЭУМК является оптимизация процесса изучения учебной дисциплины «Математика» раздела «Интегрирование функций одной переменной, приложения определенного интеграла, обыкновенные дифференциальные уравнения» для студентов специальностей 7-07-0714-01 «Машины и оборудование для горнодобывающих производств», 7-07-0724-01 «Разработка месторождений полезных ископаемых», а также систематизация теоретического, практического и тестового материала для проверки знаний в единый модуль.

Структурирование и подача учебного материала. ЭУМК представлен в виде краткого лекционного материала, материала для аудиторной и самостоятельной работы, тестов по данному разделу. Учебный материал излагается в соответствии с типовой программой и в объеме, предусмотренном учебным планом.

Рекомендации по организации работы с ЭУМК. ЭУМК может быть использован студентами дневной и заочной форм обучения. Предварительно следует изучить тему лекционного материала, затем ознакомиться и проанализировать решение задач соответствующей темы. При выполнении самостоятельной работы использовать примеры, приведенные в ЭУМК. В случае появления вопросов при изучении учебного материала необходимо обратиться за консультацией к преподавателю.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Неопределенный интеграл.

1.1. Способ непосредственного интегрирования.

Способ непосредственного интегрирования опирается на таблицу основных интегралов и простейшие правила интегрирования.

Таблица 1. Таблица основных интегралов

1) $\int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \neq -1)$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,$

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

4) $\int e^u du = e^u + C$

5) $\int \cos(nu)du = \frac{1}{n}\sin(nu) + C$

6) $\int \sin(nu)du = -\frac{1}{n}\cos(nu) + C$

7) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C$

8) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$

9) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C_1 \end{cases} \quad (a > 0)$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C_1 \end{cases}$

11) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

12) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Все эти формулы справедливы независимо от того, является ли u независимой переменной, либо какой угодно функцией этой независимой переменной.

Простейшие правила интегрирования

I. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

(здесь a-постоянная величина, $a \neq 0$).

II. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x).$

III. Если $\int f(u)du = F(u) + C,$ то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C_1, \text{где } a \neq 0.$$

Очень часто встречаются случаи, когда, $a = 1$ либо $b = 0$.

При отыскании неопределенных интегралов полезно помнить таблицу дифференциалов, но не в том виде, как она дана в учебнике (см. $n^0 91$), а в немного преобразованном следующем виде (здесь как бы правые и левые части поменялись местами).

Таблица 2. Таблица дифференциалов.

1) $adx = d(ax+b)$

2) 3) $\frac{dx}{x} = d\ln|x|$

3) $x^k dx = d\,\frac{x^{k+1}}{k+1}$

4) $a^x dx = d\,\frac{a^x}{\ln a}$ 2′) $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$

5) 2′) $ae^x dx = d(ae^x + b)$

6) $\cos x dx = d\sin x$

7) $\sin x dx = -d\cos x$

8) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$

9) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)$

10) $\frac{dx}{x^2+1} = -d(arctgx)$

11) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$

Этой таблицей мы в дальнейшем широко пользоваться. При этом представление, например, выражения $\frac{1}{x}dx$ в виде $d\ln|x|$ или выражения $\cos xdx$ в виде $d\sin x$ мы будем называть подведением функций соответственно $\frac{1}{x}$ или $\cos x$ под знак дифференциала.

1. Найти интеграл:

$$\int\frac{5+x+x^2}{x\sqrt{x}}dx$$

Решение: Числитель подынтегральной функции делим почленно на знаменатель. Затем применяем правила II, I и формулу 1 из таблицы 1:

$$\int\frac{5+x+x^2}{x\sqrt{x}}dx=\int(5x^{-\frac{3}{2}}+7x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx=$$

$$=\int 5x^{-\frac{3}{2}}dx+\int 7x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=5\int x^{-\frac{3}{2}}dx+$$

$$+7\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{1}{2}}dx=5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+7\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\frac{10}{\sqrt{x}}+14\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$$

2. Найти интеграл:

$$\int(3\sin 9x+\frac{10}{\cos^2 5x})dx$$

Решение: Имеем:

$$\int(3\sin 9x+\frac{10}{\cos^2 5x})dx=\int 3\sin 9xdx+\int\frac{10dx}{\cos^2 5x}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\sin 9xd9x+2\int\frac{d5x}{\cos^2 5x}=-\frac{1}{3}\cos 9x+2tg5x+C.$$

Мы использовали здесь правило II; подведением соответствующего постоянного множителя под знак дифференциала мы привели интегралы к табличным (см. формулы 6 и 7 из табл. 1).

3. Найти интеграл:

$$\int\frac{dx}{2x^2+9}$$

Решение: Чтобы свести данный интеграл к табличному (см. формулу 9 из табл. 1), достаточно подвести под дифференциал множитель $\sqrt{2}$ и разделить весь интеграл на $\sqrt{2}$. Тогда, сравнив полученный интеграл с формулой 9, увидим, что $u = x\sqrt{2},\ \ a = 3$. Следовательно, получим:

$$\int \frac{dx}{2x^2+9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2+3^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} arctg\, \frac{x\sqrt{2}}{3} + C.$$

З а м е ч а н и е. Совершенно аналогично следует поступать с интегралами вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}},\quad \int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 \pm a^2}},\quad \int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}.$$

Если в каждом из них мы введем под знак дифференциала множитель, то приведем интегралы к табличным (см. формулы 10, 11, 12 в табл. 1), причем $u = bx$.

4. Найти интеграл:

$$\int (2x+5)^{27} dx$$

Решение: Вряд ли кому-нибудь придет в голову мысль возвести данный двучлен в 27 степень и затем интегрировать сумму из 28-ми слагаемых, хотя такой вполне законен. Данный интеграл берётся совсем легко с помощью правила III и формулы 1 из таблицы 1. В самом деле, имеем:

$$\int (2x+5)^{27} dx = \frac{1}{56}(2x+5)^{28} + C.$$

Данный интеграл можно свести к табличному, если внести множитель 2 под знак интеграла и разделить весь интеграл на 2:

$$\int (2x+5)^{27} dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{27} \cdot 2dx = \frac{1}{2}\int (2x+5) d(2x+5) =$$

$= ($см. формулу 1 из таблицы 2$) = \dfrac{1}{2}\int u^{27} du$, где $u = 2x+5$

Способ непосредственного интегрирования дает возможность брать интегралы вида $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$

В самом деле, так как $f'(x)dx = df(x)$, то

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \int \frac{du}{u}, \text{ где } u = f(x).$$

Окончательно имеем: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left| f(x)\right| + C.$

Итак, если числитель подынтегральной функции равен производной ее знаменателя (или отличается от нее постоянным множителем), то интеграл равен логарифму модуля знаменателя плюс произвольная постоянная.

Рассмотрим несколько задач.

5. Найти интеграл:

$$\int ctgxdx$$

Решение: Имеем:

$$\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

так как функция $\cos x$ в числителе есть производная знаменателя $\sin x$.

Применяя к равенству (2) правило III, мы легко возьмём и более сложный интеграл:

$$\int ctg(3x+2)dx = \frac{1}{3}\ln\left|\sin(3x+2)\right| + C.$$

6. Найти интеграл:

$$\int \frac{x+1}{3x^2+2}dx$$

Решение: Имеем:

$$\int \frac{x+1}{3x^2+2}dx = \int \frac{x}{3x^2+2}dx + \int \frac{dx}{3x^2+2}$$

Так как производная знаменателя равна $6x$, то достаточно в первом интеграле помножить числитель на 6, а весь интеграл разделить на 6:

$$\int \frac{xdx}{3x^2+2} = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+2}dx = \frac{1}{6}\ln(3x^2+2).$$

Второй интеграл берется аналогично интегралу задачи 7:

$$\int \frac{dx}{3x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x\sqrt{3})}{(x\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{x+1}{3x^2+2}dx = \frac{1}{6}\ln(3x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{6}}arctg\,\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + C.$$

1.2. Способ замены переменной (способ подстановки)

Способ замены переменной или способ подстановки –один из наиболее сильных приёмов интегрирования. К сожалению, нельзя дать общего ответа на вопрос: как выбрать удачную подстановку. В процессе решения задач укажем некоторые приёмы для важных частных случаев. Заметим, что способом подстановки в самых простейших случаях мы уже пользовались в § 1 при решении задач с применением правила III интегрирования и введением под знак дифференциала.

1. Найти интеграл:

$$\int \sqrt[4]{4x-5}dx$$

Решение. Пробуем подстановку:

$$4x-5=t.$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем:

$4dx = dt$, откуда $dx = \frac{1}{4}dt$.

Заданный интеграл преобразуется теперь к табличному (см. формулу 1, табл. 1) и легко берётся:

$$\int \sqrt[4]{4x-5}dx = \frac{1}{4}\int \sqrt[4]{t}dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{4}}dt =$$

$$= \frac{1\cdot 4}{4\cdot 5}t^{\frac{5}{4}} + C = \frac{1}{5}\sqrt[4]{t^5} + C.$$

Возвращаясь теперь к первоначальной переменной x по формуле (1), находим:

$$\int \sqrt[4]{4x-5}dx = \frac{1}{5}\sqrt[4]{(4x-5)^5} + C.$$

Мы могли бы здесь сразу воспользоваться правилом III.

Покажем, как с помощью подстановки берётся интеграл $\int (2x+5)^{27}dx$ (см. выше задачу 8 на стр. 10). Берем постановку $2x+5=z$. Дифференцируя, получим $2dx = dz$, откуда $dx = \frac{1}{2}dz$.

Заданный интеграл примет вид:

$$\int (2x+5)^{27}dx = \frac{1}{2}\int z^{27}dz = \frac{1}{56}z^{28} + C = \frac{1}{56}(2x+5)^{28} + C.$$

Таким образом, если подынтегральная функция имеет вид $f(ax+b)$, то удобна подстановка $ax+b=t$.

2. Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cos xdx$$

Решение. Возьмём подстановку

$$\sin x = u.$$

Дифференцируем это равенство:

$$\cos xdx = du.$$

Теперь наш интеграл примет вид:

$$\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \int u^{-\frac{2}{3}}du.$$

Итак, с помощью подстановки $\sin x = u$ мы преобразовали заданный интеграл к табличному, который легко берётся по формуле 1 таблицы I :

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cos xdx = \int u^{-\frac{2}{3}}du = 3u^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{\sin x} + C.$$

После интегрирования мы снова вернулись к первоначальному переменному x.

При решении этой задачи можно рассуждать и так. Введем множитель $\cos x$ под знак дифференциала (см. формулу 6 из табл. 2) и получим:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\cos xdx = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

МЫ видим, что теперь под знаком интеграла всё выражено через $sinx$ и сама собой напрашивается постановка $\sin x = u$.

3. Найти интеграл:

$$\int (tgx + 3tg^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Решение. Берём подстановку

$$tgx = t.$$

Дифференцируя, получим:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt.$$

Заданный интеграл после этого берётся до конца. В самом деле, имеем:

$$\int (tgx + 3tg^2 x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int (t + 3t^2)dt = \int tdt + \int 3t^2 dt =$$

$$= \frac{t^2}{2} + t^3 + C = \frac{1}{2}tg^2 x + tg^3 x + C.$$

Здесь также можно сначала подвести под дифференциал множитель $\frac{1}{cos^2 x}$ (см. формулу 8 из табл. 2).

Если подынтегральное выражение можно разбить на два сомножителя, в одном из которых довольно легко по таблице 2 распознать дифференциал некоторой функции $\varphi(x)$, а другой сомножитель после подстановки $\varphi(x) = t$ превращается в такую функцию от t, которую мы умеем интегрировать, то такая постановка окажется удачной.

4. Найти интеграл:

$$\int [\sin(x^2 + 1)]xdx$$

Решение. В сомножителе $2xdx$ легко распознать дифференциал функции $x^2 + 1$. Поэтому берём постановку $x^2 + 1 = t$.

Отсюда $2xdx = dt$ и $xdx = \frac{1}{2}dt$. Мы имеем:

$$\int [\sin(x^2 + 1)]xdx = \frac{1}{2}\int \sin tdt = -\frac{1}{2}\cos t + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 1) + C.$$

5. Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение. В таблице 2 находим формулу $2'$. Поэтому берём подстановку

$$\sqrt{x} = t.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \text{ и } \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt.$$

Итак,

$$\int \frac{1}{\sin^2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -2ctgt + C = -2ctg\sqrt{x} + C.$$

141. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{4x^2-4x+1}$ 142. $\int \frac{(x+1)\,dx}{1-2x+x^2}$

143. $\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2-2x+5}$ 143. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{2x^2+x+1}$

§ 5 Интегралы вида $\int \frac{M_x+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Одним из способов приведения квадратного трехчлена к каноническому виду сводятся либо к формуле 10 из таблицы 1 (при a<0), либо к формуле 11 (при a>0).

В интегралах более общего вида

$$\int \frac{(M_x+N)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

Мы выделяем сначала в числителе часть, кратную производной трехчлена, и в результате получаем интеграл вида (1).

145. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}.$$

Решение. Приводим квадратный трехчлен к каноническому виду способом добавления до полного квадрата:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(1+6x+9x^2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} = \frac{1}{3}arcsin\frac{3x+1}{3} + \mathrm{C}$$

(см. формулу 10 из табл. 1).

146. Найти интеграл:

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$$

Решение. Числитель подынтегральной функции отличается от производной трехчлена постоянным множителем 4. Поэтому интеграл берется сразу подстановкой

$\sqrt{4x^2+4x-3}$ = t, откуда $\frac{(8x+4)\,dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}}$ = dt.

39

Таким образом,

$\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{2}\int \frac{(8x+4)\,dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x-3} +$ C.

147. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$$

Решение. Выделим в числителе часть, кратную производной от квадратного трехчлена, Получим:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)+\frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{(8x+4)\,dx}{2\sqrt{4x^2+4x-3}} + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2-4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} + \frac{5}{4}ln\left|2x+1+\sqrt{(2x+1)^2-4}\right| + C = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x-3} +$$

$$+\frac{5}{4}ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right| + C.$$

Первый интеграл мы взяли, как в решении задачи 146; второй интеграл подстановкой $2x+1=t$ сразу приводится к формуле 11 из таблицы 1.

148. Найти интеграл:

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x(2-x)}}.$$

Решение. Сначала выделяем в числителе часть, кратную производной квадратного трехчлена. Так как $[x(2-x)]' = (2x-x^2)' = 2-2x$,

То получим:

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \int \frac{-\frac{1}{2}(2-2x)+2}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{(2-2x)\,dx}{2\sqrt{2x-x^2}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} =$$

$$-\sqrt{2x-x^2} + 2\int \frac{dx}{1-(x-1)^2} = -\sqrt{2x-x^2} + 2arcsin(x-1) + C.$$

Интегралы вида

$$\int \frac{(M_x+N)\,dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (3)$$

Приводятся к интегралам (2) подстановкой вида

$$px+q=\frac{1}{t}.$$

Как это делается, показано в решении задачи 60 для случая, когда

$p = 1, q == 0.$

В задачах 149−156 возьмите интегралы путем приведения квадратного трехчлена к каноническому виду и там, где это необходимо, предварительно выделите в числителе часть, кратную производной от квадратного трехчлена.

149. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$. 150. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4x+2}}$.

151. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$. 152. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

153. $\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$. 154. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.

155. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 156. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x(x-2)}}$.

В задачах 157, 158 воспользуйтесь сначала подстановкой $px + q = \frac{1}{t}$.

157. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}$. 158. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Дополнительные задачи к главе I

159. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$. 160. $\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+1)^2}$.

161. $\int \frac{dx}{\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}}$. 162. $\int \sqrt{e^x+1}\,dx$.

163. $\int \frac{1+\sqrt{ctgx}}{\sin^2 x}dx$. 164. $\int \frac{dx}{(tgx+1)\sin^2 x}$.

165. $\int (2x+2)arctgxdx$. 166. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2}$.

Интегралы вида $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$

В интегралы указанного вида входит выражение

$d = b^2 - 4ac$, которое называют *квадратным трёхчленом.* Выражение

$d = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного трехчлена.

Напомним, что если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена (1), то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Из элементарной алгебры известно также, что квадратный трехчлен (1)

1) имеет вещественные различные корни, если $b^2 - 4ac > 0$,

2) имеет вещественные равные корни, если $b^2 - 4ac = 0$,

3) имеет комплексные сопряженные корни, если $b^2 - 4ac < 0$.

Всякий квадратный трехчлен, у которого коэффициент при x в первой степени равен нулю, называется каноническим. Он имеет вид ax^2+c.

Покажем на примерах, как квадратный трехчлен приводится к каноническому виду.

Первый способ. Пусть дан трехчлен x^2+x+1. Дополняем его до полного квадрата. Чтобы избежать дробных слагаемых, поступаем так:

$$x^2+x+1=\frac{1}{4}(4x^2+4x+4)=\frac{1}{4}(4x^2+4x+1+3)=$$

$$=\frac{1}{4}[(2x+1)^2+3]=\frac{1}{4}(z^2+3), \text{ где } z=2x+1.$$

Такой способ приведения к каноническому виду называется дополнением до полного квадрата. Заметив, что значение z равно производной от квадратного трехчлена по x, мы теперь можем предложить другой способ приведения к каноническому виду.

Второй способ. Привести к каноническому виду трехчлен $5x^2-x+2$. Производную от трехчлена принимаем за новую переменную:

$z=10x-1$, откуда находим $x=\dfrac{z+1}{10}$ и подставляем это значение x в данный трехчлен:

$$5x^2-x+2=5\frac{(z+1)^2}{100}-\frac{z+1}{10}+2=\frac{1}{20}(z^2+2z+1-$$

$$-2z-2+40)=\frac{1}{20}(z^2+39)=\frac{1}{20}[(10x-1)^2+39].$$

Приведем этот же трехчлен к каноническому виду 1-м способом:

$$5x^2-x+2=\frac{1}{20}(100x^2-20x+40)=\frac{1}{20}[(10x-1)^2+39]=$$

$$=\frac{1}{20}(z^2+39), \text{ где } z=10x-1.$$

Рассмотрим второй способ в общем виде. За новую переменную z принимаем производную от квадратного трехчлена (1):

$$z=2ax+b.$$

Из полученного равенства находим x как функцию от z:

$x=\dfrac{z-b}{2a}$ и подставляем это значение в трехчлен (1). Мы получим:

$$ax^2+bx+c=a\frac{(z-b)^2}{4a^2}+b\frac{z-b}{2a}+c=\frac{1}{4a}[(z-b)^2+2b(z-b)+$$

$$+4ac=\frac{1}{4a}(z^2-2bz+b^2+2bz-2b^2+4ac)=\frac{1}{4a}(z^2-d),$$

Где $d=b^2-4ac$, есть дискриминант квадратного трехчлена.

Двумя способами привести к каноническому виду трехчлен $5-7x-3x^2$.

1) Имеем:

$$5-7x-3x^2=-\frac{1}{12}(36x^2+84x-60)=-\frac{1}{12}[(6x+7)^2-$$

$$-49-60]=-\frac{1}{12}(z^2-109)=\frac{1}{12}(109-z^2), \text{ где } z=6x+7.$$

2) Применяем подстановку $z=6x+7$, откуда $x=\dfrac{z-7}{6}$.

Имеем:

$$5-7x-3x^2=5-7\frac{z-7}{6}-3\frac{(z-7)^2}{36}=\frac{1}{12}[60-14z+98-$$

$$-z^2+14z-49]=\frac{1}{12}(109-z^2)=\frac{1}{12}[109-(6x+7)^2].$$

Рассмотрим теперь интегралы вида $\int\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx.$

Начнем с более простых задач.

Найти интеграл: $\int\dfrac{dx}{x^2+x+1}$.

Решение. Применяя подстановку $z=2x+1$, откуда $dz=2dx$ и, следовательно $dx=\dfrac{1}{2}dz$, приведем квадратный трехчлен к каноническому виду:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{\frac{1}{2}dz}{\frac{1}{4}(z^2+3)}=2\int\frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}+$$

$$+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{6x^2+x-2}$.

Решение. Применяем подстановку

$$z = 12x + 1, \quad x = \frac{z-1}{12}, \quad dx = \frac{1}{12}dz,$$

$$\int \frac{dx}{6x^2 + x - 2} = \int \frac{\frac{1}{12}dz}{\frac{1}{24}(z^2 - 49)} = 2\int \frac{dz}{z^2 - 49} = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{z-7}{z+7}\right| +$$

$$+C_1 = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{12x-6}{12x+8}\right| + C_1 = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{3}{2}\frac{2x-1}{3x+2}\right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{7}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| + C_1 = \frac{1}{7}\ln\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right| + C,$$

где $\quad C = \frac{1}{7}\ln\frac{3}{2} + C_1.$

Найти интеграл:

$$\int \frac{5x+8}{6x^2 + x - 2}dx.$$

Р е ш е н и е. В данном случае корни квадратного трёхчлена вещественны и равны соответственно $\int \frac{dx}{2ax - x^2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, следовательно,

$$6x^2 + x - 2 = 6(x - \frac{1}{2})(x + \frac{2}{3}) = (2x-1)(3x+2)\,.$$

Применим к решению этой задачи способ неопределённых коэффициентов [1, стр. 166]. Имеем тождественное равенство:

$$\frac{5x+8}{6x^2 + x - 2} \equiv \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{3x+2}\,.$$

Приводя к общему знаменателю, приравниваем числители:

$$5x + 8 = A(3x+2) + B(2x-8) = x(3A+2B) + 2A - B\,.$$

Теперь воспользуемся тем, что что в обеих частях тождества коэффициенты при одинаковых степенях x должны быть равны:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 3A + 2B = 5 \\ x^0 & 2A - B = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{Решая эту систему, найдем} \\ \qquad\qquad A = 3, \quad B - 2. \end{array}$$

Следовательно,

$$\frac{5x+8}{6x^2+x-2} \equiv \frac{3}{2x-1} - \frac{2}{3x+2}$$

и

$$\int \frac{5x+8}{6x^2+x-2}dx = 3\int \frac{dx}{2x-1} - 2\int \frac{dx}{3x+2} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|2x-1| - \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Найти интеграл:

$$\int \frac{dx}{2ax-x^2}$$

Решение. Знаменатель легко разложить на вещественные множители; применяем способ неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{2ax-x^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{2a-x};$$

$$1 \equiv A(2a-x) + Bx.$$

Неопределённые коэффициенты А и В можно найти с помощью такого рассуждения. Тождество (2) справедливо при любом значении х; при которых одно из выражений А или В обращалось бы в нуль. Такими значениями будут

$x=0, x=2a$. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 1=2aA, A=\dfrac{1}{2a}, \\ x=2a & 1=2aB, B=\dfrac{1}{2a}. \end{array}$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{2ax-x^2} = \int \frac{dx}{2ax} + \int \frac{dx}{2a(2a-x)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln|x| - \frac{1}{2a}\ln|2a-x| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x}{2a-x}\right| + C.$$

1.3. Способ интегрирования по частям.

Интегрированием по частям называется сведение заданного интеграла

$\int udv$ к интегралу $\int vdu$ с помощью формулы $\int udv = uv - \int vdu$.

Применяя способ интегрирования по частям, мы должны предварительно представить подынтегральное выражение в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Дадим два практических совета.

Если подынтегральное выражение представляет собой произведение либо тригонометрической на алгебраическую, либо показательной на алгебраическую, то за u следует принимать алгебраическую функцию.

Если в подынтегральное выражение входит множителем либо одна из обратных тригонометрических функций $\arcsin x, arctgx$ и др., либо функция $\ln x$, то за u следует выбирать одну из указанных функций.

Найти интеграл:

$\int xe^{-2x}dx.$

Решение. Сначала вводим множитель e^{-2x} под знак дифференциала

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \underset{u}{x} de^{-2x}.$$

Теперь подготовим все необходимое, расположив запись, как показано

$$u = -\frac{1}{2}x, \qquad \text{откуда} \begin{cases} du = -\frac{1}{2}dx, \\ v = e^{-2x}. \end{cases}$$

$dv = de^{-2x},$

Таким образом, по формуле (1) имеем:

$$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Найти интеграл:

$\int x\sin 4xdx.$

Решение. Имеем:

$$\int x\sin 4xdx = -\frac{1}{4}\int xd\cos x,$$

$$dv = d\cos 4x \qquad u = -\frac{1}{4}, \qquad \text{откуда}\begin{cases} du = -\frac{1}{4}dx \\ v = \cos 4x, \end{cases}$$

$$\int x\sin 4xdx = -\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4xdx =$$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

Найти интеграл:

$$\int x\ln^2 xdx.$$

Решение. Имеем:

$$\int x\ln^2 xdx = \int \ln^2 xd\,\frac{x^2}{2}.$$

$$\int x\ln^2 xdx = \int \ln^2 xd\,\frac{x^2}{2}$$

$$u = \ln x, \qquad dv = d\,\frac{x^2}{2}, \qquad \text{откуда}\begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2}, \end{cases}$$

$$\int x\ln xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 - C.$$

Окончательно получим:

$$\int x\ln^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Глава 2. Приложения определенного интеграла

2.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

Если на отрезке $[a, b]$ функция $f(x) \geq 0$, то, как известно, *площадь криволинейной трапеции*, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ох и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна

$$Q = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x) \le 0$ на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx) \le 0$. По абсолютной величине он равен площади Q соответствующей криволинейной трапеции: $-Q = \int_a^b f(x)dx$.

Если $f(x)$ конечное число меняет знак на отрезке $[a, b]$, то интеграл по всему отрезку $[a, b]$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам.

Интеграл будет положителен на тех отрезках, где $f(x) \ge 0$, и отрицателен там, где $f(x) \le 0$. Интеграл по всему отрезку дает соответствующую сумму площадей, лежащей выше и ниже оси Ох. Для того, чтобы получить сумму площадей в обычном смысле, нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам или вычислить интеграл

$$Q = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2 + 2$, прямыми $x = 1$, $x = 4$ и отрезком оси абсцисс.

Решение. В теоретическом курсе показано, что площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу

$$Q = \int_a^b f(x)dx.$$

В данном случае (рисунок 1) криволинейная трапеция, площадь которой мы вычисляем, ограничена параллельными прямыми AB и CD, отрезком прямой AC и отрезком кривой линии BD. Искомая площадь равна:

$$S = \int_1^4 (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_1^4 = 27$$

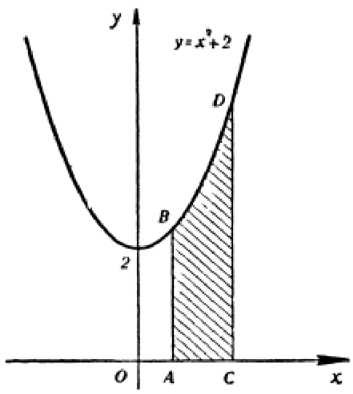

Рисунок 1

Пример 2. Вычислить площадь трапеции, ограниченной дугой параболы $y^2 = 4x$ и отрезком прямой $x = 2$.

Решение. Из рисунка 2 видно, что искомая площадь расположена симметрично относительно оси абсцисс и, следовательно.

$$S = 2\int_0^2 2\sqrt{x}dx = \left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

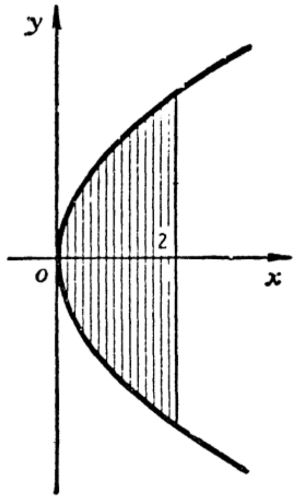

Рисунок 2

2.2 Кривые заданы параметрическими уравнениями.

Если кривая, ограничивающая площадь плоской фигуры, задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны вместе со своими производными на $t_1 \le t \le t_2$, то для вычисления площади плоской фигуры следует в определенном интеграле $S = \int_a^b ydx$ произвести замену переменной:

$$S = \int_a^b ydx = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\psi'(t)\,dt.$$

Пример 3. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом:

$$x = a\,cost, y\ =\ b\,sin\,t$$

Решение. Эллипс расположен симметрично относительно обеих осей, (рисунок 3), следовательно, можно вычислить сначала $\frac{1}{4}$ часть площади данной фигуры. Вычислим площадь той части плоской фигуры, которая расположена в первом квадранте:

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx$$

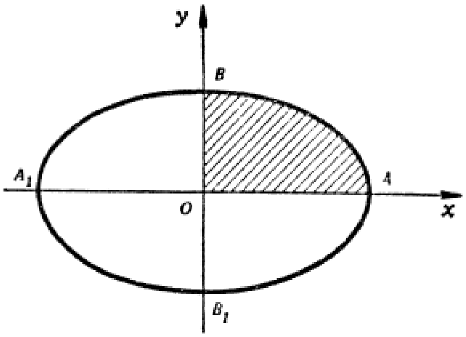

Рисунок 3

Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

$$0 = a\cos t, \qquad t_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad a = a\cos t, \qquad t_2 = 0.$$

Имеем:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\,sint(-a\,sint)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2t\,dt =$$

$$\frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt = \frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}sin2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}$$

Вся площадь эллипса равна: $S = \pi ab$

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой:

$$x = acos^3t, \qquad y = asin^3t$$

Решение. Искомая площадь изображена на рисунке 4. Вычислим сначала площадь той части плоской фигуры, которая расположена в первом квадранте, это будет $\frac{1}{4}$ часть всей искомой площади. Найдем пределы интегрирования для переменной t из условий:

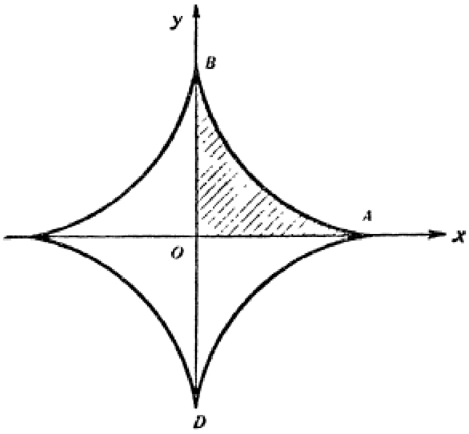

Рисунок 4

$$0 = a\,cos^3t, \qquad t_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = a\, cos^3 t, \qquad t_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\, sin^3 t \cdot (-3a\, cos^2 t\, sint)\, dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 t \cdot cos^2 t\, dt = \frac{3}{4}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t\, sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2t(1 - cos2t)\, dt$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - cos4t}{2} - sin^2 2t\, cos2t\right) dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}sin4t - \frac{1}{6}sin^2 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}a^2 \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{32}a^2$$

Вся площадь, ограниченная астроидой, равна:$S = \frac{3}{8}\pi a^2$.

2.3 Кривые заданы в полярной системе координат.

Пусть в полярной системе координат имеем кривую, заданную уравнением $\rho = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – непрерывная функция при $\alpha \le \theta \le \beta$.

Определим площадь сектора OAB, ограниченного кривой $\rho = f(\theta)$ и радиус-векторами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$.

Разобьем данную область радиус-векторами $\alpha = \theta_0, \theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$ на n частей. Обозначим через $\Delta\, \theta_1, \Delta\, \theta_2, \dots, \Delta\, \theta_n$ углы между проведенными радиус-векторами (рисунок 5).

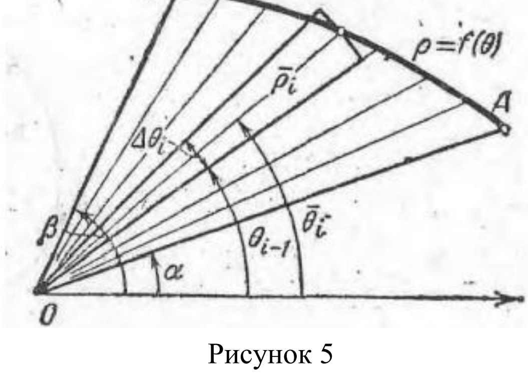

Рисунок 5

Обозначим через $\overline{\rho_i}$ длину радиус-вектора, соответствующего какому-нибудь углу $\overline{\theta_i}$, заключенному между θ_{i-1} и θ_i.

Рассмотрим круговой сектор с радиусом $\overline{\rho_i}$ и центральным углом $\Delta\,\theta_i$. Его площадь будет равна $\Delta\,Q_i = \frac{1}{2}\,\overline{\rho_i}^2\ \Delta\,\theta_i$.

Сумма $Q_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho_i}^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(\overline{\theta}_i))^2\Delta\theta_i$ даст площадь «ступенчатого» сектора. Так как эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2 = \left(f(\theta)\right)^2$

на отрезке $\alpha \le \theta \le \beta$, то ее предел при $\max\Delta\,\theta_i \to 0$ есть определенный интеграл

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta.$$

Он не зависит от того, какой радиус-вектор $\overline{\rho_i}$ мы возьмем внутри угла

$\Delta\ \theta_i$. Этот предел, естественно, считать искомой площадью фигуры. Можно было бы показать, что это определение площади не противоречит данному ранее; иначе говоря, если вычислять площадь криволинейного сектора с помощью криволинейных трапеций, то мы получим тот же результат. Таким образом, площадь сектора OAB равна

$$Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta, \text{или} Q = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta.$$

Пример 5. Вычислить площадь, ограниченную первым витком спирали Архимеда $r = a\varphi$ (рисунок 6).

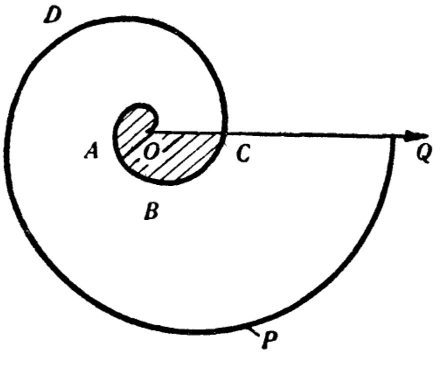

Рисунок 6

Решение. Найдем пределы интегрирования. Первый виток спирали образуется при изменении параметра t от 0 до 2π. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Пример 6. Найти площадь, ограниченную одним лепестком кривой
$r=a\,sin2\varphi$.

Решение. Пределы интегрирования для φ найдем из условий:

$$0\le 2\varphi\le\pi.$$

Отсюда

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

и, следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2 sin^2 2\,\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left((\varphi-\frac{1}{4}sin4\varphi)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{8}\pi a^2.$$

2.4 Длина дуги плоской кривой

Уравнение кривой задано в декартовой системе координат. Длина дуги плоской кривой $y=f(x)$ может быть вычислена при помощи определенного интеграла:

$$L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

или

$$L=\int_{c}^{d}\sqrt{1+x'^2}\,dy$$

где a и b – абсциссы, а c и d – ординаты точек концов данной дуги.

Пример 7. Вычислить длину дуги параболы $y^2=4x$ от точки $x=0$ до $x=1$.

Решение. Для вычисления длины данной дуги воспользуемся второй из данных формул. Заметим, что при $x=0$ будет $\mathrm{y}=0$, а при $x=1$ будет $y=\pm2$. Из уравнения параболы находим $\mathrm{x}=\frac{y^2}{4}$, следовательно, $\mathrm{x}'=\frac{y}{2}$, отсюда

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}dy = \int_{0}^{2} \sqrt{4+y^2}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(y\sqrt{4+y^2} + 4ln\left(y+\sqrt{4+y^2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{2} + ln(1+\sqrt{2}\right)$$

Пример 8. Вычислить длину дуги кривой $y = 1 - lncosx$ от точки M(0,1) до точки $N(\frac{\pi}{4}, ln\, e\sqrt{2})$.

Решение. Для вычисления длины дуги воспользуемся первой из данных формул, тогда $y = 1 - lncosx$, $y' = tgx$, следовательно,

$$L = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+tg^2x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cosx} = ln\left|\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|.$$

Кривые заданы параметрическими уравнениями в полярной системе координат. Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x' = \varphi'(t)$ и $y' = \psi'(t)$ на $t_1 \leq\ t \leq t_2$, вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt.$$

Пример 9. Вычислить длину одной арки циклоиды:

$$x = a(1 - sint), y = a(1 - cost).$$

Решение. Найдем производные по аргументу t:

$$x' = a(1 - cost), y' = a\, sint.$$

Следовательно, $x'^2 + y'^2 = a^2(1 - cost)^2 + a^2sin^2t = 4a^2sin^2\frac{l}{2}$. Так как параметр t измеряется от 0 до 2π и в этом промежутке функции $a(1 - cost)$ и $a\, sint$ непрерывны, то, следовательно,

$$L = 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = -4a\, cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Пример 10. Вычислить длину дуги кривой $x = e^t sint, y = e^t cost$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Вычислим производные по аргументу t:

$$x' = e^t sint + e^t cost = e^t(sint + cost)$$

$$y' = e^t cost - e^t sint = e^t(sint - cost)$$

В промежутке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ эти функции непрерывны (как суммы произведений непрерывных функций). Вычислим сумму:

$$x'^2 + y'^2 = e^{2t}\,[(sint + cost)^2 + (cost - sint)^2] = 2e^{2t},$$
следовательно,

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}e^t dt = \sqrt{2}e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$$

2.5 Объем тела произвольной формы

Объем тела, содержащегося между плоскостями $x = a$ и $x = b$, выражается формулой:

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

где S(x) – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс в точке $x(a \le x \le b)$.

Пример 11. Вычислить объем шарового слоя, вырезанного из шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

Решение. Плоскость, перпендикулярная к оси абсцисс в точке x, пересечет шар по окружности радиуса $r = \sqrt{9 - x^2}$. Площадь сечения $S(x) = \pi r^2 = \pi(9 - x^2)$ и, следовательно,

$$V = \pi\int_1^2 (9 - x^2)dx = \pi\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = 6\frac{2}{3}\pi.$$

2.6 Объемы и поверхности тел вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$, ординатами $x = a, x = b$ и осью Ох, вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

Пример 12. Вычислить объем тела, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси Ох.

Решение. При вращении эллипса вокруг оси Ох образуется тело, называемое эллипсоидом вращения. Из уравнения эллипса видно, что большая его полуось равна 2, следовательно, $-2 \le x \le 2$. Разрешив уравнение эллипса относительно y^2, получим $y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$. Объем эллипсоида вращения равен:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} \frac{9}{4}(4 - x^2)dx = \frac{9}{2}\pi \int_{0}^{2} (4 - x^2)dx =$$

$$= \frac{9}{2}\pi \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{9}{2}\pi \left(8 - \frac{8}{3}\right) = 24\pi.$$

Пример 13. Вычислить объем прямого конуса, высота которого h и радиус основания r, рассматривая конус как тело вращения прямоугольного треугольника около одного из катетов (рисунок 7)

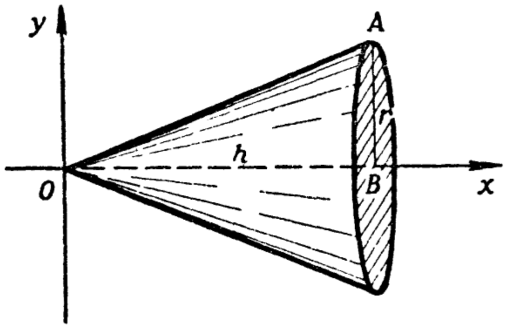

Рисунок 7

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ось Ох совпала с высотой h, а вершину конуса примем за начало координат. Тогда уравнение прямой ОА запишется так: $y = \frac{r}{h}x$. Следовательно, объем конуса будет равен:

$$V = \pi \int_{0}^{h} y^2 dx = \pi \int_{0}^{h} \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

2.7 Площади поверхности тела вращения

Площадь поверхности тела вращения определяется по формуле:

$$P = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + (f\,'(x))^2}$$

Пример 14. Определить площадь поверхности параболоида, образованного вращением дуги параболы $y^2 = 2x$ вокруг оси Ох от $x = 0$ до $x = 2$.

Решение. В нашем случае $f(x) = \sqrt{2x}$, $f\,'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$. Поэтому

$$P = 2\pi \int_{0}^{2} \sqrt{2x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}dx = 2\pi \int_{0}^{2} \sqrt{2x + 1}dx = \frac{2\pi}{3}(2x + 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 =$$

$$\frac{2\pi}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Глава 3. Дифференциальные уравнения

3.1 Общие понятия

Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3.1}$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции.

Определение 2. Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Например:

1) $y' + 5y = 0$ – уравнение первого порядка
2) $y'' + 8y' + 16y = 8x$ – уравнение второго порядка

Определение 3. Всякая функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставленная вместо y в выражение (3.1), обращает это выражение в тождество, называется решением дифференциального уравнения (3.1).

Если φ(x) – решение, то φ(x) + C тоже является решением. Это значит, что уравнение имеет бесчисленное множество решений, зависящих от параметра C.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-ого порядка $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ зависит от n произвольных независимых постоянных. В частности, общее решение дифференциального уравнения первого порядка зависит от одной произвольной постоянной.

В случаях, когда не удается явно найти $y = y(x)$, решение ищут в виде общего интеграла, т. е. соотношения

$$G(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

определяющего решение дифференциального уравнения $y = y(x)$ как неявную функцию.

Для дифференциального уравнения рассматривают задачу Коши: найти решение уравнения (3.1), удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Используя эти n начальных условий, находят конкретные значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в общем решении. В результате получают некоторое частное решение уравнения (6.1).

3.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$y' = f_1(x) f_2(y)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – заданные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными. Его также можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y).$$

Для нахождения решения разделим переменные в уравнении. Предположим, что $f_2(y) \neq 0$ преобразуем уравнение:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\, dx.$$

Левая часть полученного уравнения зависит от y, правая – от x. Интегрируя обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\, dx,$$

получим общий интеграл уравнения

$$G(y) = F(x) + C,$$

где $G(y)$ – первообразная функция $\frac{1}{f_2(y)}$, $F(x)$ – первообразная функция $f_2(x)$, С – произвольная постоянная.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными записывают в дифференциалах:

$$P_1(x) P_2(y) dx = Q_1(x) Q_2(y)\, dy.$$

Разделив на $P_2(y) Q_1(x) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy.$$

Проинтегрировав, получим общий интеграл уравнения

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy + C.$$

При делении уравнения на $P_2(y) Q_1(x)$ можно потерять решения $x = x_k$, при которых $Q_1(x_k) = 0$ и $y = y_i$, при которых $P_2(y_i) = 0$. Такие решения $x = x_k$ и $y = y_i$ могут входить в общий интеграл при определенных значениях постоянной С или могут быть решениями исходного уравнения, но не входить в общий интеграл уравнения. В последнем случае их называют особыми решениями.

Пример 1. Найти частное решение ДУ $y' = -\frac{y}{x}$, если $y(2) = 1$ – задача Коши.

Решение. Запишем это дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Для нахождения решения разделим переменные в уравнении.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Затем проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}.$$

Получим результат $lny = -lnx + C$.

Чтобы исключить натуральные логарифмы, возведем обе части уравнения в степень $e^{f_1} = e^{f_2}$ с применением формул

$$ln(a) + ln(b) = ln(ab)$$

$$ln(a) - ln(b) = ln\frac{a}{b}$$

$$aln(b) = ln(b^a)$$

$$e^{ln(a)} = a$$

Свойство $e^{a+b} = e^a e^b$ в сочетании с подстановкой $C = log(C_1)$ позволяет упростить выражение $e^C = C_1$. И поскольку C является произвольной константой, её индекс не существен

$$y = \frac{e^C}{x}$$

Решение дифференциального уравнения $y = \frac{C}{x}$.

Но у нас есть ещё задача Коши. В выражении $y(2) = 1$ 2 – это значение x, 1 – значение y. Подставим 2 и 1 вместо x и y, чтобы найти C.

$$1 = \frac{C}{2}$$

Отсюда мы получим, что $C = 2$.

Получим единственное решение $y = \frac{2}{x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

Решение. Делим уравнение на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \neq 0.$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{C}$$

$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$ – общее решение ДУ.

3.3 Однородные уравнения

Функция $f(x,y)$ называется *однородной* функцией своих аргументов измерения n, если справедливо тождество $f(tx,ty)\equiv t^n f(x,y)$.

Например, функция $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ есть однородная функция второго измерения, так как $f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)=t^2(x^2+y^2--xy)=t^2f(x,y)$.

При $n=0$ имеем функцию нулевого измерения. Например, $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как

$$f(tx,ty)=\frac{(tx)^2-(ty)^2}{(tx)^2+(ty)^2}=\frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=f(x,y).$$

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ называется однородным относительно x и y, если $f(x,y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения. Однородное уравнение всегда можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Вводя новую искомую функцию $u=\frac{y}{x}$, уравнение (1) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u.$$

Если $u=u_0$ есть корень уравнения $\varphi(u)-u=0$, то решение однородного уравнения будет $u=u_0$ или $y=u_0x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Замечание. При решении однородных уравнений можно сразу сделать подстановку $y=ux$.

Пример 3. Решить уравнение $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$y'=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

так что данное уравнение оказывается однородным относительно x и y. Положим $u=\frac{y}{x}$ или $y=ux$. Тогда $y'=xu'+u$. Подставляя в уравнение выражения для y и y$'$, получаем

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2}.$$

Разделяя переменные:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x},$$

Отсюда интегрированием находим

$arcsin\, u = \ ln|x| + lnC_1(C_1 > 0),$ или $arcsin\, u = lnC_1|x|$.

Так как $C_1|x| = \pm C_1 x$, то, обозначая $\pm C_1 = \text{C}$, получаем $arcsin\, u = lnC_x$, где $|lnCx| \le \frac{\pi}{2}$ или $e^{-\frac{\pi}{2}} \le Cx \le e^{\frac{\pi}{2}}$. Заменяя u на $\frac{y}{x}$, будем иметь общий интеграл

$$arcsin\frac{y}{x} = lnCx.$$

Отсюда общее решение: $y = x \sin \ln Cx$.

При разделении переменных мы делили обе части уравнения на произведение $x\sqrt{1-u^2}$, поэтому могли потерять решение, которые обращают в ноль это произведение.

Положим теперь $x = 0$ и $\sqrt{1-u^2} = 0$. Но $x \ne 0$ в силу подстановки $u = \frac{y}{x}$, а из соотношения $\sqrt{1-u^2} = 0$ получаем, что $1 - \frac{y^2}{x^2} = 0$, откуда $y = \pm x$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y = -x$ и $y = x$ также являются решениями данного уравнения.

3.4 Линейные уравнения

Определение. Линейным дифференциальным уравнением 1 порядка называется дифференциальное уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

где $y(x)$ – неизвестная функция;

p(x), q(x) – заданные функции.

Если q(x) = 0, то уравнение будет линейным однородным; если q(x) ≠ 0, то уравнение будет линейным неоднородным.

Рассмотрим линейное однородное уравнение. Это уравнение с разделяющимися переменными. Пусть $y \ne 0$, тогда

$$\frac{dy}{y} + p(x)\,dx = 0.$$

Отсюда общий интеграл $\int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = C$ или $ln|y| = C - \int p(x)dx$;

$|y| = e^C e^{-\int p(x)dx} - \int p(x)dx$; e^C заменяем на $\tilde{C} > 0$; $y = \pm\tilde{C}e^{-\int p(x)dx}$.

Но $\pm\tilde{C}$ есть любое число, кроме нуля. Положим $\pm\tilde{C} = \hat{C}$.

$$y = \hat{C}e^{-\int p(x)dx}, \hat{C} \neq 0,$$

где $\hat{C}$ – произвольная постоянная. Это общее решение не содержит функции $y = 0$, которая является решением уравнения. Для того, чтобы общее решение содержало все решения, его надо записать в виде:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

где C – произвольная постоянная, принимающая любые значения.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y' + 2x^2y = 0$.

Решение. Имеем $p(x) = 2x^2$. Тогда $\int p(x)dx = \frac{2x^3}{3}$ (произвольную постоянную можно считать равной нулю). Получаем $y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\frac{2x^3}{3}}$ –общее решение.

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Его решаем с помощью подстановки $y = uv; y' = u'v + uv'$. Подставляем в исходное уравнение: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$. Второе и третье слагаемое объединяем в скобку и выносим общий множитель $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. Определяем $v(x)$ из условия, что $v' + p(x)v = 0$: $\frac{dv}{dx} = -p(x)$; $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$;

$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx;\ ln|v| = -\int p(x)dx; v = e^{-\int p(x)dx}$. Найденное выражение для v подставляем в оставшуюся часть уравнения:

$$u'v = q(x);\ u' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x);\ \frac{du}{dx} = q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}dx;$$

$$u = \int q(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C.$$

Общее решение имеет вид $y = u \cdot v = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}$, C – произвольная постоянная.

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'sinx - ycosx = 1$$

Решение. Имеем: $y' - y\frac{cosx}{sinx} = \frac{1}{sinx}$ – линейное неоднородное уравнение. Решаем с помощью подстановки $y = uv; y' = u'v + uv'$. Получаем:

$$u'v + uv' - uv\frac{cosx}{sinx} = \frac{1}{sinx};\ u'v + u\left(v' - v\frac{cosx}{sinx}\right) = \frac{1}{sinx}.$$

Пусть $v' - v\frac{cosx}{sinx} = 0$; $\frac{dv}{dx} = v\frac{cosx}{sinx}$; $\frac{dv}{v} = \frac{cosxdx}{sinx}$;

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{d(\sin x)}{sinx}; ln|v| = ln|sinx|; v = sinx.$$

Найденное выражение для v подставляем в оставшуюся часть уравнения:

$$u'sinx = \frac{1}{sinx}; u' = \frac{1}{sin^2x}; \ \frac{du}{dx} = \frac{1}{sin^2x}; \ \int du = \int \frac{dx}{sin^2x}; u = -ctgx + C.$$

Следовательно, общее решение $y = u \cdot v = (-ctgx + C) \cdot sinx$.

3.5 Уравнение Бернулли

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

где n – любое число, не обязательно целое.

При $n = 0$ уравнение Бернулли превращается в линейное неоднородное уравнение. При $n = 1$ оно превращается в линейное однородное уравнение.

Таким образом, уравнение Бернулли служит некоторым обобщением линейных уравнений, в общем случае оно является нелинейным дифференциальным уравнением (при $n \neq 0$ и $n \neq 1$).

Однако во всех случаях его решение тесно связано с решением линейного уравнения.

Теорема. Пусть $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Тогда уравнение Бернулли с помощью подстановки $\mathrm{z} = y^{1-n}$ сводится к решению линейного уравнения (для функции z).

Замечание. Уравнение Бернулли может быть решено другим способом. Введем вместо неизвестной функции $y(x)$ две неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$, такие, что $y(x) = u(x) \cdot v(x)$,

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Далее решаем по аналогии с линейным уравнением

Пример 6. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Здесь $p(x) = -\frac{4}{x}, q(x) = x, n = \frac{1}{2}$. Преобразуем уравнение, разделив его на $\sqrt{y}$: $\frac{y\prime}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$.

Положим $z = \sqrt{y}$, тогда $z' = \frac{y\prime}{2\sqrt{y}}, \frac{y\prime}{\sqrt{y}} = 2z'$. Следовательно, $2z' - \frac{4}{x}z = x$ или $z' - \frac{2}{x}z = \frac{x}{2}$. Отсюда $z = Ce^{\int\frac{2}{x}dx} + e^{\int\frac{2}{x}dx} \int \frac{x}{2} e^{\int\frac{2}{x}dx} dx$.

$z = Cx^2 + x^2\int \frac{dx}{2x} = Cx^2 + \frac{1}{2}x^2 ln|x|$ и $y = z^2 = \left(Cx^2 + \frac{1}{2}x^2 ln|x|\right)^2$, $y = 0 -$ особое решение.

3.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение. Если в уравнении

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, то оно называется уравнением в полных дифференциалах. Это уравнение можно переписать в виде $du(x, y) = 0$, следовательно, его общий интеграл $u(x, y) = c$.

Например, уравнение $xdy + ydx = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах, так как его можно переписать в виде $d(xy) = 0$. Общим интегралом будет $xy = c$.

Теорема. Предположим, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и x. Тогда для того, чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Пример 6. Найти общий интеграл уравнения:

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy = 0.$$

Решение. Здесь $M(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} + e^x . N(x, y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$.

Тогда $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Следовательно, заданное дифференциальное уравнение 1-го порядка является уравнением в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция $u(x, y)$, частные производные которой соответственно по x и y равны $M(x, y)$ и $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Интегрируем первое из двух соотношений по x:

$$u(x, y) = \int \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx + \varphi(y); u(x, y) = arctg\frac{x}{y} + e^x + \varphi(y).$$

Теперь продифференцируем $u(x, y)$ по y и приравняем полученное в результате выражение выписанной выше частной производной

$$\frac{du}{dy}: -\frac{x}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Откуда $\varphi'(y)=0$ и $\varphi(y)=c$. Следовательно, общим интегралом заданного уравнения является: $arctg\frac{x}{y}+e^x=c$.

3.7 Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Рассмотрим частные случаи уравнений второго порядка, допускающих «понижение» порядка, т.е. случаи, когда уравнение второго порядка приводится к интегрированию двух уравнений первого порядка.

Правая часть не содержит y и y'

Пусть дано уравнение $y''=f(x)$.

Положим $y'=z$. Тогда $y''=z'$ и $z'=f(x)$. Получили уравнение первого порядка. Отсюда $z=\int f(x)dx+c_1$ или $y'=\int f(x)dx+c_1$. Имеем опять уравнение первого порядка $y=\int(\int f(x)dx+c_1)dx+c_2$ или $y=\int(\int f(x)dx)dx+c_1x+c_2$. Получили общее решение уравнения

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y''=cos2x+x+5$

Решение. Последовательно интегрируем исходное уравнение

$$y'=\int(cos2x+x+5)dx=\frac{1}{2}sin2x+\frac{x^2}{2}+5x+C_1$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}sin2x+\frac{x^2}{2}+5x+C_1\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}cos2x+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^2}{2}+C_1x+C_2$$

Это и будет являться общим решением уравнения.

Правая часть не содержит y

Пусто дано уравнение

$$y''=f(x,y').$$

Положим $y'=z$, тогда для z имеем уравнение $z'=f(x,z)$. Пусть его решение будет $z=\varphi(x,\mathrm{c}_1)$. Следовательно, $y=\varphi(x,c_1)$.

Отсюда $y=\int\varphi(x,c_1)dx+c_2$. Это общее решение уравнения.

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''=\frac{y'}{x}+x^2$.

Решение. Положим $\mathrm{z}=y'$, тогда $z'=\frac{z}{x}+x^2$ и его решение $\mathrm{z}=\frac{x^3}{2}+2c_1x$. Следовательно $\mathrm{y}'=\frac{x^3}{2}+2c_1x$ и $y=\int\left(\frac{x^3}{2}+2c_1x\right)dx+c_2$

или $y = \frac{x^4}{8} + c_1x^2 + + c_2 -$ общее решение уравнения.

Правая часть не содержит x

$y'' = f(x, y')$.

Положим $y' = z$ и будем считать z функцией y. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Итак, $y'' = z\frac{dz}{dy}$. Подставляя это в уравнение получим: $z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$, т.е. уравнение первого порядка относительно z. Решив его, будем иметь $z = \varphi(y, c_1)$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Отсюда $\frac{dy}{\varphi(y,c_1)} = dx$.

$$x + c_2 = \int \frac{dy}{\varphi(y,c_1)} - \text{это общий интеграл уравнения.}$$

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y'' = -y$.

Решение. Положим $z = y'$, тогда $z\frac{dz}{dy} = -y$ или $zdz = -ydy$. Отсюда $z^2 = c_1 - y^2; z = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$ или $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 - y^2}$; $\frac{dy}{\sqrt{c_1-y^2}}$; $\frac{dy}{\sqrt{c_1-y^2}} = \pm dx$;

$arcsin\frac{y}{c_1} = c_2 \pm x$ или $y = \sqrt{c_1}sin(c_2 \pm x) -$ общее решение.

3.8 Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

где a_1и a_2 – постоянные коэффициенты.

Найдем общее решение этого уравнения. Будем искать решение уравнения в форме $y = e^{\lambda x}$. Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$; $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставляя это выражение в уравнение, получим $e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$. Но так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0.$$

Это уравнение называется характеристическим.

Если функция $y = e^{\lambda x}$ есть решение уравнения, то λ должно быть корнем характеристического уравнения.

Рассмотрим 3 случая

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ и действительные

В этом случае функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ будут решениями уравнения.

Так как их отношение $\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} \neq const,$ то эти решения линейно независимы и, следовательно, они составляют фундаментальную систему. А поэтому общее решение уравнения в этом случае будет

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение будет $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$ Его корни можно найти через дискриминант, или по теореме Виета.

$$D = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

В данном случае $a = 1, b = -6, c = 8.$ Подставляем это в формулу дискриминанта.

$$D = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 32}}{2}$$

В данном случае корни $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4.$ Общее решение будет

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$$

2 случай. Корни равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}.$

Общее решение будет в виде: $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}.$

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$ Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$ Общее решение: $y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$

3 случай. Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + \beta i;$ $\lambda_2 = \alpha - \beta i.$ Следовательно, имеем два комплексных линейно независимых решения $y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x},$ $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$

Общее решение имеет вид: $y = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x).$

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 13y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$

$$\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i \ (\alpha = 3, \beta = 2).$$

Общее решение: $y = e^{3x}(c_1 cos2x + c_2 sin2x).$