торе НИОКР / В. В. Климук, Г. В. Астратова, И. М. Кублин // Инновационная деятельность. – 2023. – № 1 (64). – С. 13–24.

12. Климук, В. В. Методические концепты анализа уровня экономической безопасности государства: на примере Беларуси и России / В. В. Климук, О. С. Мостовская // Социально-экономическое развитие России и Монголии: проблемы и перспективы : материалы IX Международной научно-практической конференции, посвященной 60-летию Восточно-Сибирского государственного университета технологий и управления, Улан-Удэ, 18 мая 2022 года / ФГБОУ ВО Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления; Финансово-Экономический Университет; Барановичский государственный университет. – Улан-Удэ : Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 2022. – С. 124–126.

УДК 517.956.4 + 517.955.2

Задача Коши для бипараболического уравнения теплопереноса четвертого порядка

Корзюк В. И., академик НАН Беларуси, доктор физ.-мат. наук, профессор;
Рудько Я. В., магистр
Институт математики Национальной академии наук Беларуси
220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11

Аннотация. Для дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка, предложенного Фущичем для математического описания процессов тепло- и массопереноса, рассмотрена задача Коши в полупространстве. Используя теорию полугрупп, найдено решение задачи Коши в явном аналитическом виде. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует ее классическое решение.
Ключевые слова: задача Коши, классическое решение, бипараболическое уравнение теплопроводности, теплопроводность, релаксация теплового потока.

Cauchy problem for the fourth-order biparabolic heat conduction equation

Korzyuk V. I., Rudzko J. V.
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

Annotation. We consider the Cauchy problem for the fourth-order partial differential equation given in the half-space and proposed by Fushchych for the mathematical description of heat and mass transfer processes. We construct the solution in an explicit analytical form using the theory of semigroups. For the problem in question, the uniqueness of the solution is proved and the conditions under which its classical solution exists are established.
Keywords: Cauchy problem, classical solution, biparabolic heat equation, thermal conduction, heat flow relaxation.

Введение. Общеизвестно, что классическая теория теплопроводности основана на линейном параболическом уравнении второго порядка

$$\left(\partial_t-\kappa^2\Delta\right)u(t,x)=f(t,x).¶ \tag{1}$$

Однако, в такой модели теплообмена постулированы жесткие ограничения, включая абстрактные допущения на физические процессы теплопереноса, например: бесконечная скорость распространения возмущений, линейная зависимость потока от градиента поля и энергии от температуры и т. д. При нарушении этих условий уравнение (1) становится не вполне математически корректным в описании процессов тепломассопереноса, что приводит к ряду известных парадоксов [1; 2].

В связи с этим для описания процесса теплопереноса с конечной скоростью некоторые авторы, например, [3; 4], предложили вместо уравнения (1) использовать гиперболическое телеграфное уравнение

$$\left(\partial_t-\kappa^2\Delta+\tau_r\partial_t^2\right)u(t,x)=f(t,x), \tag{2}$$

которое учитывает релаксацию теплового потока. Однако, как отмечено в [2], замена уравнения (1) гиперболическим уравнением (2) имеет принципиальное значение, но вряд ли может быть хорошо объяснена с теоретико-групповой точки зрения, поскольку нестационарное уравнение (2) не инвариантно относительно преобразований Галилея. Это означает, что уравнение (2) не может в полной мере соответствовать всем тем законам сохранения, которым полностью удовлетворяет классическое уравнение теплопроводности [1].

В связи с этим в работе [5] было указано естественное обобщение уравнения переноса (1)

$$\left(\left(\partial_t-\kappa^2\Delta\right)+\alpha\left(\partial_t-\kappa^2\Delta\right)^2\right)u(t,x)=f(t,x), \tag{3}$$

которое, в частности при $f\equiv 0$, инвариантно [5] относительно алгебры Галилея, поэтому предлагается, что его можно использовать для описания диффузионных процессов независимо от инерциальных систем отсчета, в которых они наблюдаются.

Настоящий доклад посвящен исследованию задачи Коши для уравнения четвертого порядка (3).

Постановка задачи. В области $(0,\infty)R^n$ $(n+1)$ независимых переменных рассмотрим n-мерное линейное бипараболическое уравнение теплопроводности

$$\left(\left(\partial_t-k^2\Delta\right)+\alpha\left(\partial_t-k^2\Delta\right)^2\right)u(t,x)=f(t,x), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times R^n, \tag{4}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, α – время релаксации; $k>0$ – коэффициент температуропроводности, характеризующий свойства среды; Δ – оператор Лапласа. К уравнению (4) присоединяются начальные условия

$$u(0,x)=\phi(x), \qquad \partial_t u(0,x)=\psi(x), \qquad x\in R^n, \tag{5}$$

где ϕ и ψ – функции, заданные на множестве R^n.

Основной результат. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия $\phi\in C^2(R^n)$, $\psi\in C^2(R^n)$, $f\in C([0,\infty)\times R)$, $\phi(x)\exp\left(b|x|^2\right)\to 0$, $\left(\psi-\kappa^2\Delta\phi\right)(x)\exp\left(b|x|^2\right)\to 0$ и $f(t,x)\exp\left(b|x|^2\right)\to 0$ при $|x|\to\infty$ для всех $t\in[0,\infty)$. Задача Коши (4), (5) имеет в классе корректности единственное решение u, которое принадлежит классу $C^{1,0}\left([0,\infty)\times R^n\right)\cap C^{2,4}\left((0,\infty)\times R^n\right)$ и определяется формулой

$$u(t,x)=\Pi[\phi](t,x)+\alpha\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right)\right)\Pi\left[\psi-k^2\Delta\phi\right](t,x)+$$
$$+\int_0^t\left(1-\exp\left(-\frac{t-\tau}{\alpha}\right)\right)\Pi_p[f](t,x,\tau)\mathrm{d}\tau,\ (t,x)\in(0,\infty)\times R^n,$$

где

$$\Pi[\phi](t,x)=\left(2\kappa\sqrt{\pi t}\right)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\xi)\exp\left(\frac{|x-\xi|^2}{4\kappa^2 t}\right)\mathrm{d}\xi,$$
$$\Pi_p[\phi](t,x;\tau)=\left(2\kappa\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\tau,\xi)\exp\left(\frac{|x-\xi|^2}{4\kappa^2(t-\tau)}\right)d\xi.$$

Заключение. В настоящем докладе в явном аналитическом виде построено решение задачи Коши для бипараболического уравнения теплопереноса четвертого порядка. Установлены достаточные условия единственности решения.

Литература

1. Bulavatsky, V. M. Fractional Differential Analog of Biparabolic Evolution Equation and Some Its Applications / V. M. Bulavatsky// Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – V. 52, № 5. – P. 737–747.

2. Fushchich, V. I. A New Mathematical Model of Heat Conduction / V. I. Fushchich, A. S. Galitsyn, A. S. Polubinskii // Ukr. Math. J. – 1990. – V. 42, № 2. – P. 210–216.

3. Cattaneo, C. Sulla Conduzione del Calore / C. Cattaneo // Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1948. – Vol. 3. – P. 83–101.

4. Luikov, A. V. Application of the Methods of Thermodynamics of Irreversible Processes to the Investigation of Heat and Mass Transfer / A. V. Luikov // Journal of Engineering Physics. – 1965. – Vol. 9. – P. 189–202.

5. Фущич, В. И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики / В. И. Фущич // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. – 1983. – С. 4–23.