

СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ ЖЕСТКО СЦЕПЛЕННОЙ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Белорусская государственная политехническая академия

Минск, Беларусь

Рассмотрим равновесие упругой изотропной полосы жестко сцепленной основанием $z=0$ с неподвижным твердым телом, т.е. когда перемещения $U_0 = U|_{z=0}$ и $W_0 = W|_{z=0}$ тождественно равны нулю $U_0=0, W_0=0$. (рис. 1)

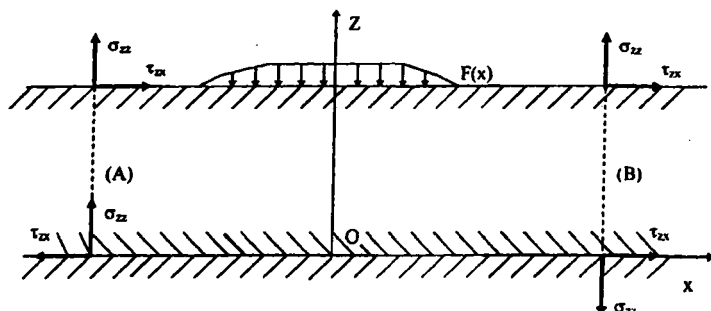


Рис. 1

Предположим, что на верхней кромке полосы $z=h$ перпендикулярно к поверхности приложена некоторая нагрузка $F(x)$, допускающая разложение в ряд Фурье

$$F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \delta_n x + B_n \sin \delta_n x),$$

где A_0, A_n, B_n, δ_n — известные величины.

Уравнения равновесия упругой среды имеют вид [1]:

$$\nabla^2 U + (\gamma - 1) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \nabla^2 W + (\gamma - 1) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

где U и W — соответственно горизонтальное и вертикальное перемещение частиц упругой среды,

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Для удобства разложения разобьем общую смешанную задачу на две: симметричную относительно серединной плоскости $z=h/2$ (задача А) и антисимметричную (задача В) [1].

Представим решение поставленной задачи в виде:

$$\text{Задача А: } U = -\frac{1}{2}[(\gamma-1)z \sin(z\partial_1)]f(x);$$

$$W = \frac{1}{2}\left[(\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1} - (\gamma-1)z \cos(z\partial_1)\right]f(x) \quad (1)$$

$$\text{Задача В: } U = \frac{1}{2}\left[(\gamma-1)z \cos(z\partial_1) + (\gamma+1)\frac{\sin(z\partial_1)}{\partial_1}\right]g(x);$$

$$W = -\frac{1}{2}[(\gamma-1)z \sin z\partial_1]g(x), \quad (2)$$

где $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$, $\nu_2 = \nu - 2$; ν – коэффициент Пуассона, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции. Формулы (1) и (2) тождественно удовлетворяют граничному условию $U|_{z=0} = 0$, $W|_{z=0} = 0$ и уравнениям равновесия внутри области.

Составим выражения для напряжений

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \text{ и } \sigma_{xx} = G\left(\gamma \frac{\partial W}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

Задача А:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G[\sin z\partial_1 - (\gamma-1)z\partial_1 \cos z\partial_1]f(x); \\ \sigma_{xx} &= G[\gamma \cos z\partial_1 + (\gamma-1)z\partial_1 \sin z\partial_1]f(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Задача В:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G[\gamma \cos z\partial_1 - (\gamma-1)z\partial_1 \sin z\partial_1]g(x); \\ \sigma_{xx} &= -G[\sin z\partial_1 + (\gamma-1)z\partial_1 \cos z\partial_1]g(x) \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь надо удовлетворить граничным условиям в напряжениях на верхнем основании

$$z = h: \tau_{xz}|_{z=h} = 0, \sigma_{zz}|_{z=h} = F(x)$$

Полагаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x), \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos \mu_k x + d_k \sin \mu_k x) \quad (5)$$

С учетом (5) уравнения (1), (2), (3), (4) примут вид:

$$\text{Задача А:} \quad U = \frac{\gamma-1}{2} z \sum_{k=1}^{\infty} sh(z\lambda_k) (a_k \sin \lambda_k x - b_k \cos \lambda_k x);$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\gamma+1) \frac{sh(z\lambda_k)}{\lambda_k} - (\gamma-1) z ch(z\lambda_k) \right] (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) + a_0 z; \quad (6)$$

$$\tau_{xz} = G \sum_{k=1}^{\infty} [sh(z\lambda_k) - (\gamma-1) z \lambda_k ch(z\lambda_k)] (a_k \cos \lambda_k x - b_k \sin \lambda_k x);$$

$$\sigma_{zz} = G \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma ch(z\lambda_k) - (\gamma-1) z \lambda_k sh(z\lambda_k)] (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) + G \gamma a_0$$

Задача В:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\gamma-1) z ch(z\mu_k) + (\gamma+1) \frac{sh(z\mu_k)}{\mu_k} \right] (c_k \cos \mu_k x + d_k \sin \mu_k x) + \gamma c_0;$$

$$W = \frac{\gamma-1}{2} z \sum_{k=1}^{\infty} sh(z\mu_k) (c_k \sin \mu_k x - d_k \cos \mu_k x);$$

$$\tau_{xz} = G \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma ch(z\mu_k) + (\gamma-1) z \mu_k sh(z\mu_k)] (c_k \cos \mu_k x + d_k \sin \mu_k x) + G \gamma c_0; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = G \sum_{k=1}^{\infty} [sh(z\mu_k) + (\gamma+1) z \mu_k ch(z\mu_k)] (c_k \sin \mu_k x - d_k \cos \mu_k x)$$

Слагаемые a_0 и c_0 в (6) и (7) являются частью элементарного решения, позволяющего получить точное решение задачи для слоя при равномерном его обжатии и сдвиге. Формальным основанием для включения этих слагаемых служит то обстоятельство, что полные системы функций $\cos \lambda_k x$ и $\cos \mu_k x$ содержат константы.

Вводя обозначения

$$D_{1k} = -(\gamma-1) h \lambda_k ch(h \lambda_k) + sh(h \lambda_k), \quad D_{2k} = \gamma ch(h \lambda_k) - (\gamma-1) h \lambda_k sh(h \lambda_k)$$

$$D_{3k} = \gamma ch(h \mu_k) + (\gamma-1) h \mu_k sh(h \mu_k), \quad D_{4k} = sh(h \mu_k) + (\gamma+1) h \mu_k ch(h \mu_k)$$

запишем граничные условия $t_{xz}|_{z=h}=0, s_{xz}|_{z=h}=F(x)$ в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} D_{1k} (a_k \cos \lambda_k x - b_k \sin \lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{3k} (c_k \cos \mu_k x + d_k \sin \mu_k x) + G\gamma c_0 = 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k} (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) + \sum_{k=1}^{\infty} D_{4k} (c_k \sin \mu_k x - d_k \cos \mu_k x) + G\gamma a_0 = \\ & = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos \delta_n x + B_n \sin \delta_n x) \end{aligned} \quad (9)$$

Если решение разыскивается в ортогональных рядах, то следует положить:

$$\lambda_n = \mu_n = \delta_n = \frac{\pi n}{h}$$

В этом случае

$$c_0 = 0; \quad D_{1k} a_k = -D_{3k} c_k, \quad D_{1k} b_k = D_{3k} d_k; \quad G\gamma a_0 = A_0,$$

$$D_{2k} a_k - D_{4k} d_k = A_k; \quad D_{2k} b_k + D_{4k} c_k = B_k.$$

Отсюда находим:

$$a_0 = \frac{A_0}{G\gamma}, \quad a_k = \frac{D_{2k} D_{3k} A_k + D_{1k} D_{4k} B_k}{\Delta \cdot D_3}, \quad b_k = \frac{D_{2k} D_{3k} B_k + D_{1k} D_{4k} A_k}{\Delta \cdot D_3}$$

$$c_k = -\frac{D_{1k}}{D_{3k}} a_k, \quad d_k = \frac{D_{1k}}{D_{3k}} b_k$$

где $\Delta = D_{2k}^2 - (D_{1k} D_{4k} / D_{3k})^2$

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что предложенный метод является достаточно универсальным. Он позволяет получить новые аналитические решения, удобные для проведения инженерных расчетов. Использование общих операторно-символических решений в большинстве случаев требует в дальнейшем меньших вычислительных работ и выигрывает с точки зрения представления вида решения. За счет надлежащего выбора входящих в решение произвольных аналитических функций можно получить более полную и точную информацию о физической сущности решаемой задачи, а в ряде случаев дать оценку приближенным численным методам и той математической модели, которая положена в основу расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я.С. Уфлянд. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. // АН СССР, М. – Л., 1963. – 367 с.