

14. Развитие теории контактных задач в СССР / Академия наук СССР, Ин-т проблем механики; отв. ред. Л. А. Галин. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
15. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Под общ. ред. А. Б. Васильева [и др.]. – М.: Физматлит, 2003. – 432 с.
16. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
17. Коган, Б. И. Напряжения и деформации многослойных покрытий / Б. И. Коган // Труды ХАДИ. – 1953. Вып. 14. – С. 33–46.
18. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963.–1098 с.
19. Основания и фундаменты зданий и сооружений. Основные положения. Строительные нормы проектирования: ТКП 45-5.01-254–2012* (02250). Введен 01.07.2012. – Минск: Минстройархитектуры, 2012. – 118 с.
20. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Госуд. изд-во технико-теор. лит-ры, 1957. – 387 с.
21. Тимошенко, С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Физматгиз, 1963. – 536 с.
22. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 439 с.
23. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест: БрГТУ, 2006. – 107 с.
24. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 1. Теория расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. Т. 21, № 3. – С. 211–221.
25. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 400 с.
26. Козунова, О. В. Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании. Часть 2. Результаты расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. Т. 21, № 4. – С. 290–296.

УДК 51-74

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ ГОРОДСКОГО ЛАНДШАФТА

В.Т. Калайда, А.И. Шапошников, Национальный исследовательский Томский государственный университет,
пр. Ленина, 36, 634050, г. Томск, Российская Федерация, albertelena@mail.ru.

Недавно зарегистрированная Роспатентом [1] техника измерения фрактальной размерности применена для спутниковых изображений Минских городских кварталов. Подробно разобраны шаги вычисления статистических параметров. Приведены и обсуждены результаты для примеров вложенных друг в друга изображений. Примененный метод поиска статистических параметров фрактальной размерности позволяет обоснованно сравнивать между собой значения фрактальной размерности существенно различающихся объектов. В качестве материалов используются имеющиеся в открытом доступе [2] снимки городских кварталов Минска. Новизной данного исследования является использование двух вложенных друг в друга изображений. То есть, на втором изображении взят участок с первого более детализированным масштабом. Такой прием позволяет сравнивать между собой результаты, полученные для вообще говоря различных изображений. Приведены гистограммы и графики выборок значений фрактальной размерности, получившиеся в

разных случаях. Показана дополнительная информативность графика по отношению к гистограмме. Показано каким образом можно использовать значения, получаемые методом Box counting для получения оценки фрактальной размерности.

Ключевые слова: фрактальная размерность, городской квартал, оценка, ошибка, погрешность.

Введение. Фрактальной размерностью множества, следуя [3], будем называть размерность Минковского – величину $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_{\varepsilon} N(\varepsilon)$, где ε – единичный размер и $N(\varepsilon)$ – количество "шаров" размера ε , достаточное для покрытия этого множества. Эта конструкция имеет богатую историю: будучи изначально, как размерность пространства, интересной только профессиональным математикам и философам – Р. Декарту, А. Лебегу, А. Пуанкаре, в последние несколько десятилетий дробная размерность множества стала активно и успешно применяться в самом широком спектре областей. Для вычислений размерности применяется метод Box counting, сочетаемый с методом наименьших квадратов для нахождения предела. Поскольку предел бесконечен, а количество данных мало, то оценки фрактальной размерности получаются весьма приближительными [4]. В качестве оценки предела используется тангенс угла наклона регрессионной прямой, аппроксимирующей выборки, составленные из логарифмов количества покрывающих подмножество "шаров" единичного размера и самого единичного размера.

Фрактальная размерность полутонового изображения

Рассмотрим изображение в градациях серого размером 800×600 участка спутникового снимка города Минска [3]. На рис. 1 показан участок карты. Согласно [5] это изображение можно рассматривать как функцию из R^2 в R , то есть как подмножество в трехмерном пространстве. Такое подмножество является двумерной поверхностью в трехмерном пространстве. Интуитивно ясно, что его размерность должна бы равняться 2, во всяком случае не превышать 3.

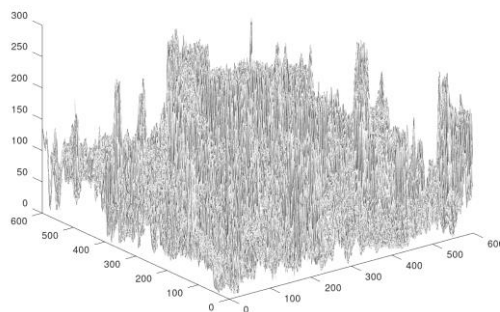


Рис. 1. Изображение главного корпуса БНТУ в градациях серого, и та же функция, вид сбоку.

Для получения идентичных подмножеств добавляем ко всем значениям упомянутой выше функции последовательно по 1. Затем также ко всем значениям функции прибавляем по 2, затем по 3, и так далее. В результате получается выборка, состоящая из одинаковых поверхностей – подмножеств, обладающих, по построению, одинаковыми фрактальными размерностями. Для элементов этой выборки вычисляем оценки фрактальных размерностей методом Box counting. Результаты расчетов приведены на рис. 2.

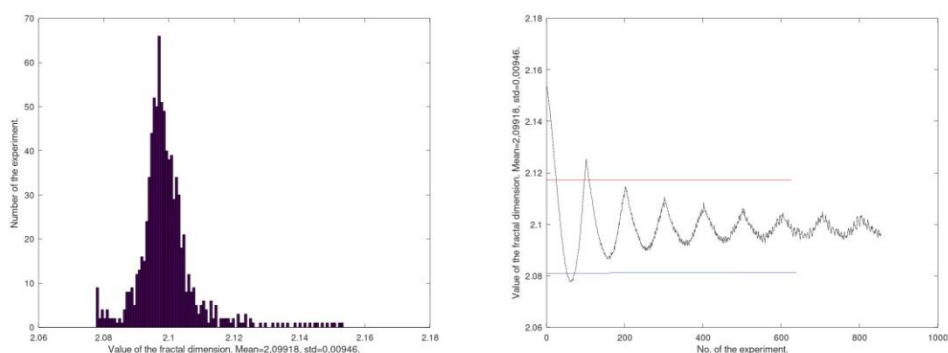


Рис. 2. Гистограмма и график значений фрактальной размерности как функции от номера эксперимента = величине сдвига. Красной и синей линиями отмечены границы доверительного интервала.

Для изображения, представленного на рис. 1 было проведено 854 эксперимента. Среднее полученных значений фрактальной размерности составило 2,0991, среднеквадратичное отклонение 0,00946. На рис. 2 слева приведена гистограмма для выборки, составленной из значений фрактальной размерности. В правой части гистограммы имеется большой хвост значений, не попадающих даже в 99% доверительный интервал. Для уточнения природы этого хвоста, справа приведен график функциональной зависимости значений фрактальной размерности от величины сдвига, который равен номеру эксперимента. По графику видно, что в доверительный интервал не попадают значения именно первых экспериментов. То есть, если напрямую брать для оценки размерности первое значение, выдаваемое Box-counting'ом, то результаты будут значительно искажены.

Рассмотрим еще одно изображение. Представленный на рис. 3 снимок включает в себя участок, показанный на рис. 1. Логично ожидать, что размерность нового подмножества будет не меньше, чем значение, полученное для предыдущего случая.

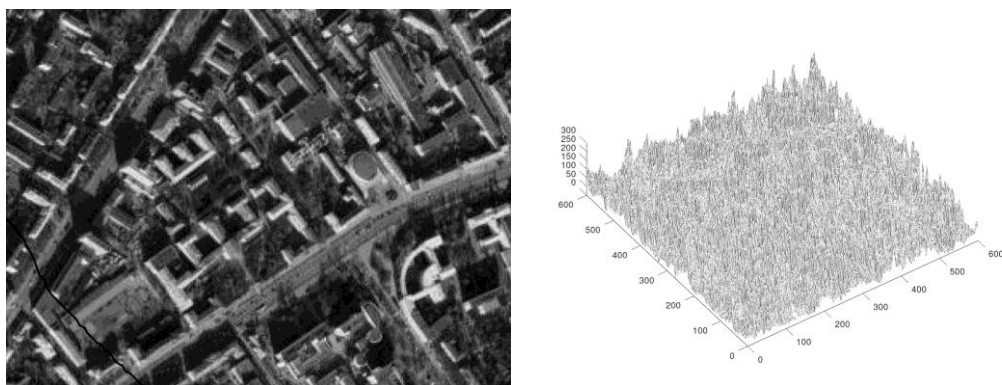


Рис. 3. Большой участок земной поверхности, содержащий в себе изображение главного корпуса БНТУ, и эта функция, вид сбоку

Чтобы корректно сравнивать результаты обоих изображений, размеры их сделаны одинаковыми – 800×600 пикселей. Также как и для предыдущего изображения, составлена выборка из 854 идентичных изображения, для которых вычислены фрактальные размерности. Результаты расчетов представлены на рис. 4. Слева показана гистограмма значений фрактальной размерности, а справа график зависимости фрактальной размерности от величины сдвига.

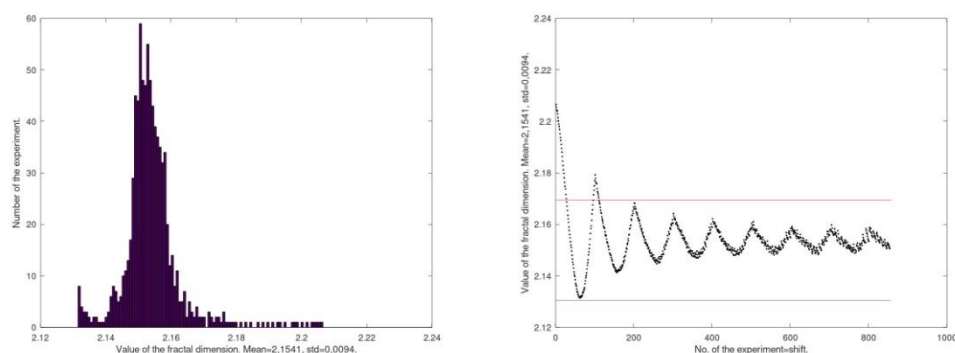


Рис. 4. Слева – гистограмма, справа – график значений фрактальной размерности. Горизонтальными линиями на графике значений фрактальной размерности снова отмечены границы доверительного интервала

Среднее полученных значений фрактальной размерности для изображения на рис. 3 составило 2,1541, среднеквадратичное отклонение 0,0094. Как и ожидалось, значение фрактальной размерности множества больше фрактальной размерности его подмножества, а среднеквадратичное отклонение для однотипных изображений оказывается одинаковым. Снова отмечаем выпадение из довольно широкого доверительного интервала именно первых экспериментальных данных, несмотря на существенную нетребовательность интервала.

Заключение

Техника оценивания фрактальной размерности, изложенная в [1] доступна для применения в разных случаях и показывает адекватные результаты. Для вложенных изображений получаются возрастающие значения, тогда как величина разброса остается неизменной.

Литература

1. Калайда В.Т., Шапошников А.И. Получение статистических параметров оценки фрактальной размерности // Программа для ЭВМ, Номер свидетельства о регистрации 2022666440. Дата регистрации: 01.09.2022.
2. Электронные карты Яндекс [Электронный ресурс] // Яндекс Карты, 2022. URL : <https://yandex.ru/maps> (access date: 17.10.2022). Access mode: free.
3. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 402 с.
4. Шелухин О.И., Магомедова Д.И. Анализ методов измерения фрактальной размерности цветных и черно-белых изображений // Научные технологии в космических исследованиях Земли. 2017. Т. 9. № 6. С. 6-16.
5. Шапошников А.И. Цифровое описание множества при компьютерной обработке // Актуальные проблемы радиофизики АПР-2021. Сборник трудов IX Международной научно-практической конференции. Томск, 2021. С. 276.