

Остриков В.О., Остриков О.М.

СТАТИКА И ДИНАМИКА ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА
АУСТЕНИТ/МАРТЕНСИТ В НАГРУЖЕННОМ ПРИЗМАТИЧЕСКОМ
МОНОКРИСТАЛЛЕ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ,
НАХОДЯЩЕМСЯ В ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКЕ

*Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого
Гомель, Беларусь*

С использованием методов механики решена задача по расчету силы, действующей в плоскости границы раздела аустенит/мартенсит, находящейся в нагруженном призматическом ферромагнитном монокристалле с памятью формы в случае фиксации его в жесткой заделке. Решено уравнение движения границы раздела аустенит/мартенсит при бездиффузионных фазовых превращениях в материалах с эффектом памяти формы.

Введение. Ферромагнитные материалы с памятью формы (сплавы Гейслера) в настоящее время находят все более широкое практическое применение в технических системах нового поколения [1]. Уникальные физико-механические свойства ферромагнитных сплавов с эффектом запоминания формы полностью определяются закономерностями движения границы раздела аустенит/мартенсит и в настоящее время находятся на стадии активного исследования [1–7].

В настоящее время отсутствует построенная на принципах механики деформируемого твердого тела теория данного явления. Разработка данной теории даст аппарат для прогнозирования поведения ферромагнитных материалов с памятью формы под действием внешних нагрузок и магнитного поля.

Для применения ферромагнитных сплавов с памятью формы важна высокая подвижность границ раздела аустенит/мартенсит, которая позволяет уменьшать величину магнитного поля, восстанавливающего форму материала [1]. Методы механики деформируемого твердого тела позволят подобрать оптимальную схему нагружения материала с памятью формы и ориентацию магнитного поля для наиболее полной реализации эффекта.

Целью данной работы стал расчет силы, действующей в плоскости границы раздела аустенит/мартенсит находящегося в жесткой заделке нагруженного ферромагнитного призматического монокристалла с эффектом запоминания формы и применение результат расчета в динамической задаче данной границы.

Постановка задачи. На рисунке 1 схематически изображен призматический ферромагнитный монокристалл (состава Гейслера) с границей раздела аустенит/мартенсит, который находится в жесткой заделке и нагружен силой \vec{F} . Свяжем декартову систему координат XAY с аустенитной частью монокристалла, как это показано на рисунке 1, а систему $X'Y'$ – с мартенситной, повернутой по отношению к аустенитной под углом φ .

Граница раздела аустенит/мартенсит по отношению к поверхности аустенитной части призматического образца ориентирована под углом ψ . Причем, в общем случае, $\psi \neq \varphi$.

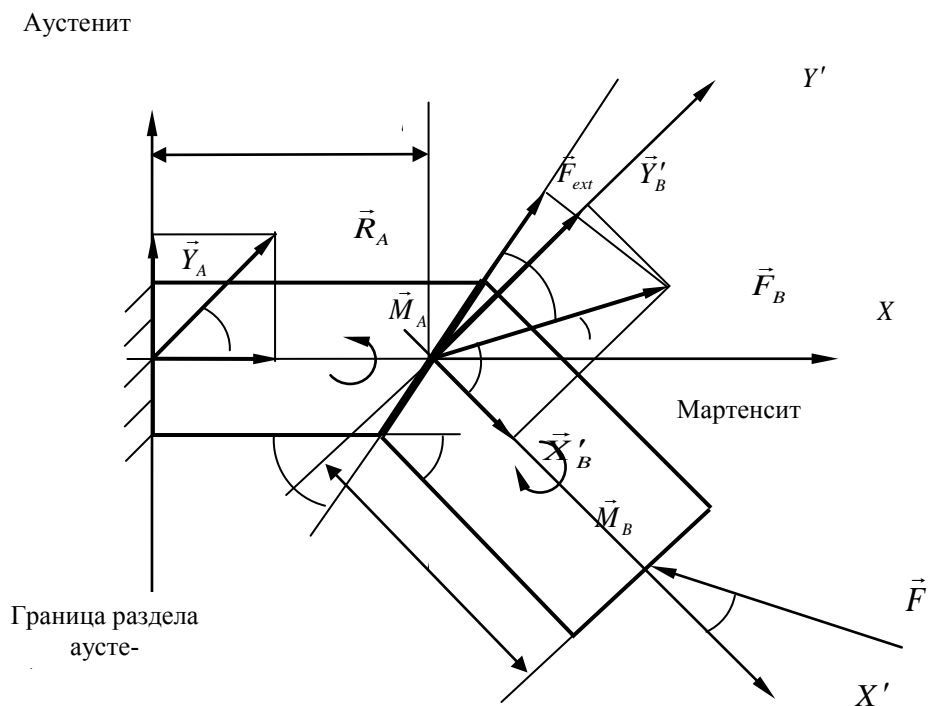


Рис. 1. Схематическое изображение находящегося в жесткой заделке нагруженного призматического монокристаллического образца с границей раздела аустенит/мартенсит

Сила \vec{F} к оси BX' направлена под произвольным углом γ (рисунок 1). Реакцию заделки \vec{R}_A разложим на две составляющие: \vec{X}_A и \vec{Y}_A . Тогда можно записать:

$$\vec{R}_A = X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}; R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \operatorname{tg} \alpha = Y_A / X_A, \quad (1)$$

где \vec{i} и \vec{j} – единичные векторы ортонормированного базиса, направленные вдоль осей AX и AY соответственно; α – угол наклона вектора \vec{R}_A к оси AX .

Силу \vec{F}_B также разложим на две составляющие: \vec{X}'_B и \vec{Y}'_B , что позволяет записать:

$$\vec{F}_B = X'_B \vec{i}' + Y'_B \vec{j}'; F_B = \sqrt{X'^2_B + Y'^2_B}; \operatorname{tg} \beta = Y'_B / X'_B, \quad (2)$$

где \vec{i}' и \vec{j}' – единичные векторы ортонормированного базиса, направленные вдоль осей BX' и BY' соответственно; β – угол наклона вектора \vec{F}_B к оси BX' .

К оси AX сила \vec{F}_B ориентирована под углом θ , а к границе раздела аустенит/мартенсит – под углом δ (рисунок 1). Тогда искомая сила F_{ext} с силой \vec{F}_B связана соотношением

$$F_{ext} = F_B \cos \delta. \quad (3)$$

Через l_a и l_m обозначим длины аустенитной и мартенситной частей монокристалла, соответственно, а через \vec{M}_A и \vec{M}_B – моменты сил, действующих соответственно в точках A и B (рисунок 1).

Примем допущение, что рассматриваемый призматический ферромагнитный монокристалл невесомый.

Решение статической задачи.

Для мартенситного объема в состоянии равновесия будем иметь

$$\vec{F}_B + \vec{F} = 0. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$\sum_i F_{iX'} = F_B \cos\beta - F \cos\gamma = 0; \quad (5)$$

$$\sum_i F_{iY'} = F_B \sin\beta - F \sin\gamma = 0, \quad (6)$$

где выполнена замена

$$X'_B = F_B \cos\beta, \quad Y'_B = F_B \sin\beta. \quad (7)$$

Система уравнений (5) и (6) может быть дополнена условием равновесия для моментов сил

$$\sum_i M_B(F_i) = Fl_m \sin\gamma - M_B = 0. \quad (8)$$

Из (5), (6) и (8) получаем

$$F_B \cos\beta = F \cos\gamma, \quad F_B \sin\beta = F \sin\gamma, \quad M_B = Fl_m \sin\gamma. \quad (9)$$

Первых два условия в (9) одновременно могут выполняться при $\beta = \gamma$. Тогда

$$F_B = F. \quad (10)$$

Из рисунка 1 видно, что

$$F_{ext} = F \cos\delta. \quad (11)$$

Отсюда при $\delta = 0$, получим

$$F_{ext} = F . \quad (12)$$

Для аустенитного объема получим систему уравнений:

$$\sum_i F_{iX} = X_A + F_B \cos \vartheta = 0 ; \quad (13)$$

$$\sum_i F_{iY} = Y_A + F_B \sin \vartheta = 0 ; \quad (14)$$

$$\sum_i M_A(F_i) = F_B l_a \sin \vartheta + M_A + M_B = 0 . \quad (15)$$

Из (13) и (14) для определяемой из (1) реакции \vec{R}_A заделки получим

$$X_A = -F_B \cos \vartheta ; \quad (16)$$

$$Y_A = -F_B \sin \vartheta . \quad (17)$$

Отметим, что из рисунка 1 видно, что $\vartheta = \beta - \varphi$.

Из (15) с учетом (10) получим

$$M_A = -(F_B l_a \sin \vartheta + F l_m \sin \gamma) = -F(l_a \sin \vartheta + l_m \sin \gamma) . \quad (18)$$

Решение уравнения движения границы раздела аустенит/мартенсит.

Рассмотрим приведенное в [8] уравнение движения границы раздела аустенит/мартенсит:

$$\frac{\rho A_0}{k_0} \left(\frac{dL}{dt} \right)^2 + \frac{m_0 + \rho A_0 (L - L_0)}{k_0} \frac{d^2 L}{dt^2} = F_{ext} , \quad (19)$$

где ρ – объемная массовая плотность материала; A_0 – площадь поперечного сечения призматического образца; k_0 – коэффициент, связывающий скорость движения границы раздела аустенит/мартенсит (V_b) со скоростью плоскопараллельного перемещения мартенситной части монокристалла (V_m), причем $k_0 = V_b/V_m = \cos \psi + \sin \psi / \tan \varphi$ [8]; m_0 – начальная масса мартенситной части образца; L_0 – начальное положение границы раздела аустенит/мартенсит; L – текущее положение границы на оси AX .

Введем обозначения:

$$a = \frac{\rho A_0}{k_0}, \quad b = \frac{m_0}{k_0} - aL_0. \quad (20)$$

Тогда (19) можно переписать в виде:

$$(aL + b) \frac{d^2 L}{dt^2} + a \left(\frac{dL}{dt} \right)^2 = F_{ext}. \quad (21)$$

Вводя замену

$$x = aL + b, \quad \frac{dx}{dt} = a \frac{dL}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = a \frac{d^2 L}{dt^2}, \quad (22)$$

получим неоднородное нелинейное уравнение:

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = a F_{ext}. \quad (23)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$x = x_0 + x^*, \quad (24)$$

где x_0 – общее решение однородного уравнения

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0; \quad (25)$$

x^* – некоторое частное решение неоднородного уравнения (23).
Замена [9]

$$\omega(t) = \frac{t}{x} \frac{dx}{dt} \quad (26)$$

сводит уравнение (25) к уравнению

$$t \frac{d\omega}{dt} = \omega - \omega^2. \quad (27)$$

Это уравнение допускает решение разделением переменных [9, 10]. Тогда из (27) получим:

$$-\frac{d\omega}{\omega(\omega-1)} = \frac{dt}{t},$$

и далее

$$-\int \frac{d\omega}{\omega(\omega-1)} = \int \frac{dt}{t}. \quad (28)$$

После интегрирования (28) получаем

$$\ln \left| \frac{\omega}{\omega-1} \right| = \ln |t| + \ln C_1. \quad (29)$$

Экспонируя (29), имеем

$$C_1 |t| = \left| \frac{\omega}{\omega-1} \right| \text{ или } D_1 t = \frac{\omega}{\omega-1}, \quad (30)$$

где

$$D_1 = \pm C_1. \quad (31)$$

После преобразований $\frac{1}{D_1 t} = 1 - \frac{1}{\omega}$; $\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{1}{D_1 t}$ из (30) получаем $\omega = \frac{D_1 t}{D_1 t - 1}$.
Далее, учитывая замену (26), получим

$$D_1 \frac{dt}{D_1 t - 1} = \frac{dx}{x} \quad (32)$$

Отсюда после интегрирования $D_1 \int \frac{dt}{D_1 t - 1} = \int \frac{dx}{x}$ получим

$$\ln |D_1 t - 1| = \ln |x| + \ln C_2. \quad (33)$$

После экспонирования (33) будем иметь:

$$D_1 t - 1 = D_2 x, \quad (34)$$

где

$$D_2 = \pm C_2. \quad (35)$$

Окончательно решение однородного уравнения (25) будет иметь вид:

$$x_0 = \frac{D_1 t - 1}{D_2}. \quad (36)$$

Частное решение неоднородного уравнения (23) будем искать в виде:

$$x^* = At, \quad (37)$$

где A – некоторая константа.

Дифференцируя (37), получим

$$\frac{dx^*}{dt} = A, \quad \frac{d^2 x^*}{dt^2} = 0,$$

и подставляя полученный результат в (23), получим

$$A^2 = aF_{ext} \quad \text{или} \quad A = \pm \sqrt{aF_{ext}}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (37), получим

$$x^* = \pm \sqrt{aF_{ext}} t. \quad (39)$$

С учетом (24), (36) и (39) окончательно получим решение уравнения (23):

$$x(t) = \frac{D_1 t - 1}{D_2} \pm \sqrt{aF_{ext}} t. \quad (40)$$

Учитывая замену (22), из (40) получим

$$L(t) = \frac{1}{a} \left(\frac{D_1 t - 1}{D_2} \pm \sqrt{aF_{ext}} t - b \right). \quad (41)$$

Отсюда скорость границы раздела аустенит/мартенсит находится по формуле:

$$\frac{dL(t)}{dt} = V_b = \frac{1}{a} \left(\frac{D_1}{D_2} \pm \sqrt{aF_{ext}} \right). \quad (42)$$

Для нахождения констант D_1 и D_2 учтем начальное условие:

$$L(0) = L_0. \quad (43)$$

Тогда из (41), (42), с учетом (43), получим

$$L(0) = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{D_2} + b \right) = L_0, \quad \frac{D_1}{D_2} \pm \sqrt{aF_{ext}} = aV_b.$$

Отсюда

$$D_1 = \frac{\pm \sqrt{aF_{ext}} - aV_b}{aL_0 + b}, \quad D_2 = -\frac{1}{aL_0 + b}. \quad (44)$$

С учетом (20) из (44) для D_1 и D_2 получим

$$D_1 = \frac{\sqrt{\rho A_0 k_0}}{m_0} \left(\pm \sqrt{F_{ext}} - \sqrt{\frac{\rho A_0}{m_0}} V_b \right), \quad D_2 = -\frac{k_0}{m_0}. \quad (45)$$

Заключение.

Таким образом, решена статическая задача по нахождению силы, действующей в плоскости границы раздела мартенсит/аустенит, для находящегося в жесткой заделке нагруженного призматического ферромагнитного монокристалла с эффектом памяти формы. Показана возможность использования полученного результата в решении динамической задачи для границы раздела мартенсит/аустенит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory alloys: a new class of actuator materials / K. Ullakko // J. Mater. Eng. Perform. – 1996. – V. 5. – P. 405–409.
2. Ullakko, K. Large magnetic-field-induced strains in Ni₂MnGa single crystals / K. Ullakko, J.K. Huang, C. Kantner, R.C. O’Handley, V.V. Kokorin // Appl. Phys. Lett. – 1996. – V. 69. – P. 1966–1968.
3. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory effect in Ni₂MnGa intermetallics / K. Ullakko, J.K. Huang, V.V. Kokorin, R.C. O’Handley // Scripta Metall. – 1997. – V. 36. – P. 1133–1138.
4. James, R.D. Large field-induced strains in ferromagnetic shape memory materials / R.D. James, R. Tickle, M. Wuttig // Mater. Sci. Eng. – 1999. – V. A273–275. – P. 320–325.

5. Tickle, R. Ferromagnetic shape memory in the NiMnGa system / R. Tickle, R.D. James, T. Shield, M. Wuttig, V.V. Kokorin // IEEE Trans.Magn. – 1999. – V. 35. – P. 4301–4310.
6. O’Handley, R.C. Phenomenology of giant magnetic-field induced strain in ferromagnetic shape-memory materials / R.C. O’Handley, S.J. Murrey, M. Marioni, H. Nembach, S.M. Allen // J. Appl. Phys. 2000. – V. 87. – P. 4712–4717.
7. Murrey, S.J. 6 % magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga / S.J. Murrey, M. Marioni, S.M. Allen, R.C. O’Handley // Appl. Phys. Lett. – 2000. – V. 77. – P. 886–888.
8. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2017. – V. 139. – P. 126–129.
9. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
10. Воднев, В. Т. Основные математические формулы: Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 269 с.

Поступила 09.04.2020

УДК 539.21

Остриков О.М.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВОЙНИКОВАНИЯ

УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого»

Гомель, Беларусь

На основании аналогий развития процессов двойникования и разрушения для энергетических критериев двойникования предложено использование критериев разрушения. При этом использовался математический аппарат теории Гриффитса и Ирвина. Вывод энергетических критериев двойникования осуществлен на основании закона сохранения энергии с учетом скорости изменения энергии приложенных внешних сил и внутренних источников напряжений. В постановке задачи упругое деформирование твердого тела рассматривалось с уже существующим в нем двойником. Принималось допущение однородной и изотропной среды, в которой рассматривалось развитие двойника. Полная энергия системы «деформируемое твердое тело – двойник» рассматривалась как разница между скоростью изменения энергии приложенных внешних и внутренних сил. В результате решения задачи критерии двойникования были выражены через коэффициенты интенсивности напряжений. Это дает возможность рассмотрения развития двойникования при различных схемах деформирования твердого тела. За критерий двойникования бралась величина скорости высвобождения энергии. Получены условия устойчивого и неустойчивого роста двойника. При этом учитывалась энергия образования поверхности раздела двойник – материнский кристалл. Для расчетов коэффициентов интенсивности напряжений получались соотношения для определения плотностей двойникоующих дислокаций в случае тонкого и нетонкого двойника. Данные соотношения получались из связи плотности двойникоующих дислокаций с внутренними напряжениями. Учитывались напряжения, действующие на границах двойника со стороны внешних сил. Расчеты показали, что коэффициенты интенсивности напряжений для тонкого и нетонкого двойника отличаются в два раза. Результаты представляют практический интерес для их использования в технологии производства технических систем на основе двойникоующихся материалов, материалов с памятью формы.