

## НАХОЖДЕНИЕ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ В СИСТЕМЕ «GEOGEBRA» И ПОСТРОЕНИЕ ТРЁХГРАННИКА В CALCPLOT3D

*Давид Михаил Андреевич, Березовик Анна Михайловна,  
студенты 2-го курса кафедры «Геодезии и аэрокосмических геотехнологий»  
(Научный руководитель – Хотомцева М.А., старший преподаватель)*

Репер Френе ( $\tau, n, \beta$ ) пространственной кривой в  $\mathbf{R}^3$  — это три единичных вектора: вектор касательной, нормали и бинормали соответственно, задающие направление рёбер сопровождающего трёхгранника (Рис.1).

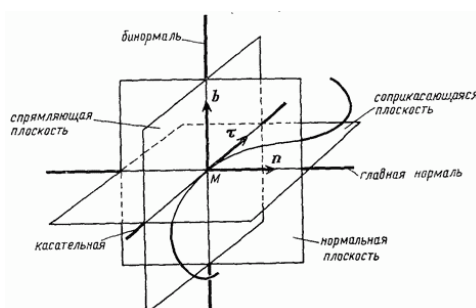


Рисунок 1 – Репер Френе в сопровождающем трёхграннике

Нахождение векторов репера и уравнений плоскостей трёхгранника аналитически представляет собой трудоёмкую задачу.

С использованием систем компьютерной графики процесс построения и исследования кривых путём построения трёхгранника Френе представляется достаточно простым.

Рассмотрим две системы компьютерной алгебры, которые позволяют сделать это, и сравним их возможности (Рис.2).

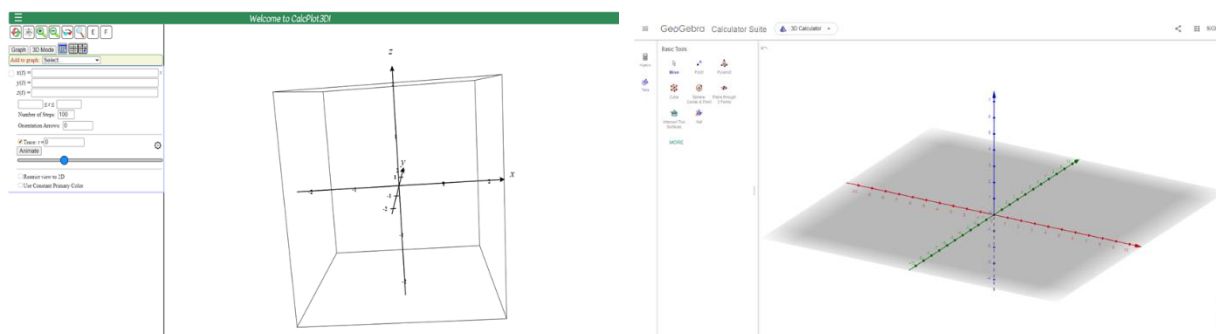


Рисунок 2 – Сравнение интерфейсов программ GeoGebra и CalcPlot3D

CalcPlot3D предназначена для динамической визуализации и исследования среды для многомерного исчисления. В ней предусмотрено построение трёхгранника путём выбора специальной опции. Такая же функция присутствует в программе GeoGebra, но при этом репер Френе должен быть предварительно построен с использованием специальных функций программы. Плоскости трёхгранника также должны быть построены отдельно.

При сравнении этих программ предпочтение отдали CalcPlot3D, т. к. в ней уже встроена функция построения трёхгранника Френе, благодаря чему на это уходит меньше времени.

После открытия программы, в окне «Add to graph» можно выбрать геометрический объект, или ввести самим уравнения объекта. Для построения репера Френе будем работать со «Space Curve», что в переводе значит «Пространственная кривая». Далее появится вкладка, где можно задать уравнения кривой.

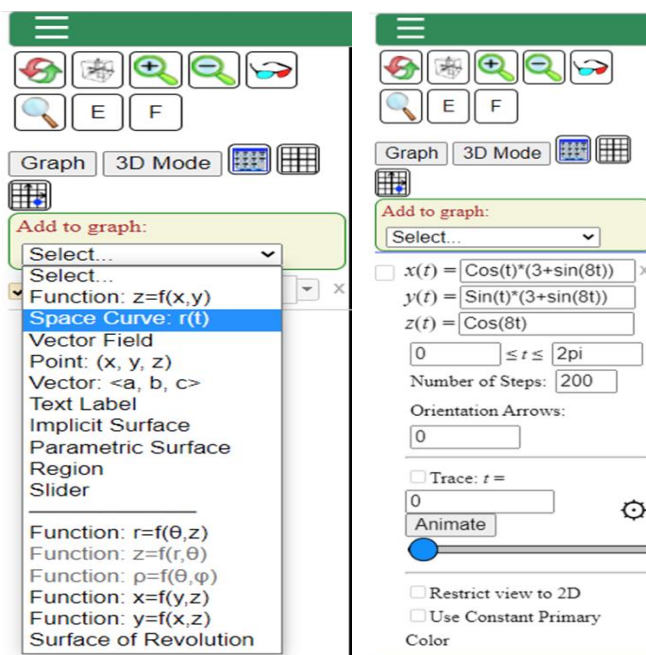


Рисунок 3 – Выбор кривой

Также параметры кривой можно взять из уже готовых примеров программы. Для этого нужно нажать на три палочки в верхнем левом углу, затем нажать на Examples и нажать на Space Curves. В качестве примера возьмем Helix, (спираль).

Как говорилось ранее, в программе встроена функция построения трёхгранника Френе. Для её включения нужно проделать несколько действий. Для этого переходим в настройки нашего графика и включаем отображение трёхгранника Френе и для наглядности увеличиваем ширину нашей кривой.

Также можно включить подсчёт кривизны кривой в любой точке области определения. Результат представлен на том же рисунке 4.

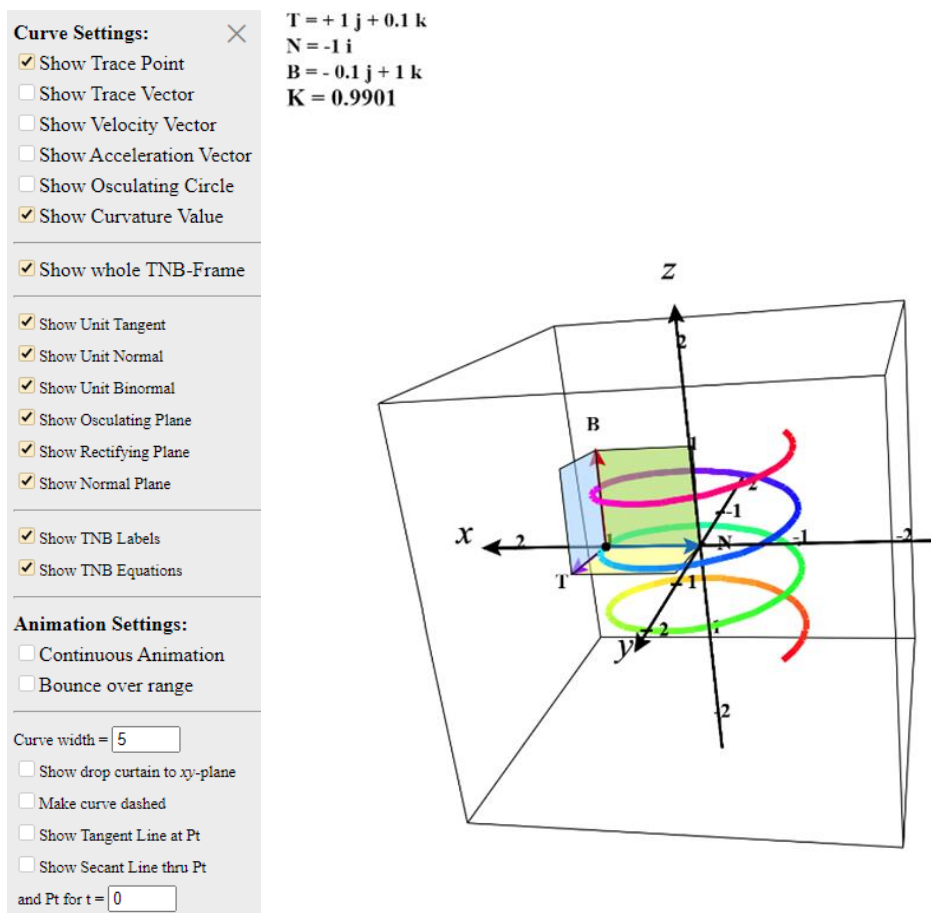


Рисунок 4 – Трёхгранник Френе, построенный для спирали

Если же мы используем возможности анимации, то получим очень увлекательное зрелище скольжения трёхгранника по пространственной кривой.

Использование систем компьютерной алгебры облегчает понимание и усвоение сложного материала по дифференциальной геометрии.

## ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ

*Наварич Дмитрий Леонидович, студент 2-го курса  
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»  
(Научный руководитель – Хотомцева М.А., старший преподаватель)*

Мы привыкли к тому, что у каждой поверхности – например, у листа бумаги, у футбольной или велосипедной камеры – две стороны. Ясно, что перейти с одной стороны на другую можно, только если каким-то образом перейти через край либо пройти сквозь поверхность.



Рисунок 1 – Лист бумаги

Если свернуть полоску бумаги в кольцо и склеить концы, то она, как была двусторонней, так и останется. А вот если, прежде чем склеивать, перекрутить один из концов, получится «лист Мебиуса», иначе называемый «лентой Мебиуса». Его свойства независимо друг от друга открыли два немецких математика – Август Фердинанд Мебиус и Иоганн Бенедикт Листинг, описавшие его в 1862–65 годах.

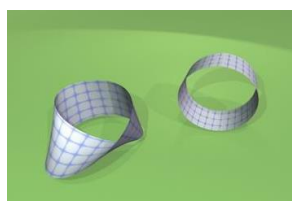


Рисунок 2 – Лист Мёбиуса

Во-первых, если путешествуешь по листу Мёбиуса, то, даже если нигде не пересечешь край, все равно можно побывать с обеих сторон полоски! Поэтому и говорят, что лист Мёбиуса имеет не две, а только одну сторону: это **односторонняя поверхность**. Разумеется, если начать красить одну из сторон, то выкрашенным окажется весь лист, даже если мы и не перейдем через его край. Поэтому, собственно и говорят, что у листа Мебиуса не две, а только одна сторона – это односторонняя поверхность.