

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СТАЛЬНЫХ ПОЛОСОВЫХ ПРОВОДНИКАХ

Докт. техн. наук, проф. **ГЕРАСИМОВИЧ А. Н.**, инж. **ГЕРАСИМОВИЧ Д. А.**

*Белорусская государственная политехническая академия*

Инж. **ЯКОВЛЕВ Г. В.**

*ПО «Витебскэнерго»*

Канд. техн. наук **МИШКИНА М. А.**, инж. **ЕЖЕНКОВ Г. Г.**

*НИЛ упрочняющих технологий при БГПА*

**Математическая модель электромагнитных процессов в стальных токоведущих частях.** Для уменьшения расхода дефицитных цветных металлов в качестве проводникового материала токоведущих частей отдельных электрических аппаратов и неотвественных установок умеренных напряжений используется железо (мягкая сталь) как наиболее дешевый и доступный металл, обладающий высокой механической прочностью [1, 2]. Применение железных полосовых проводников требует знания удельных электромагнитных характеристик полос и их зависимости от величин протекающего тока. Последние можно правильно определить лишь при анализе протекающих в них электромагнитных процессов.

Расчет электромагнитных характеристик стальных токоведущих частей рассмотрим на примере прямоугольной шины, обладающей нелинейными магнитными характеристиками. Векторы электромагнитного поля в данном проводнике зависят от пространственных переменных  $y$  и  $z$  (рис. 1). Это в сочетании с нелинейными магнитными свойствами делает задачу аналитического расчета поля практически неразрешимой и даже трудно разрешимой численно. Поэтому для получения аналитического решения стремятся использовать одномерную модель, а нелинейную задачу линеаризовать. Такой подход требует обоснования

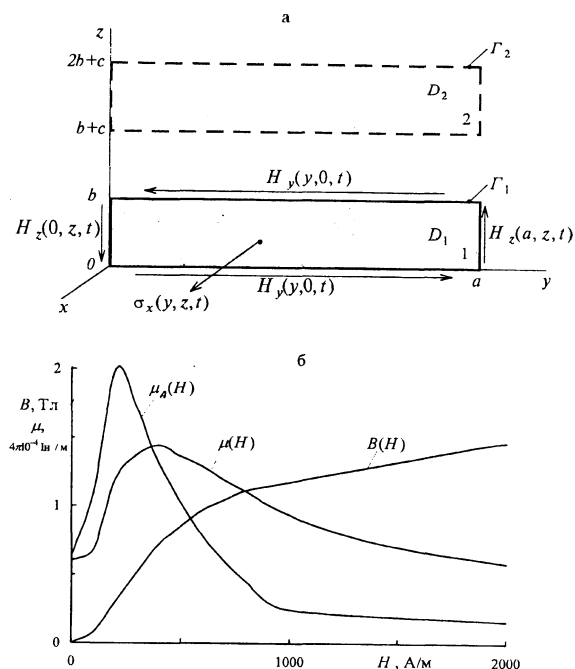


Рис. 1. а — изотропный стальной проводник с током; б — его магнитные характеристики

принимаемых допущений, особенно выбираемого метода линеаризации. Правильный выбор метода линеаризации можно осуществить

лишь на основе сопоставления результатов расчета интегральных и дифференциальных характеристик поля по нелинейной и линеаризованной моделям электромагнитных процессов в самих стальных полосах.

Основы расчета электромагнитного поля приводятся для протяженного в направлении координаты  $x$  изотропного проводника (рис. 1). Электромагнитное состояние проводника при протекании переменного тока  $I_x(t)$  удовлетворяет уравнениям Максвелла [3]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\sigma} \quad (\text{а}); \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{б}); \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{а}); \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{б}); \quad \vec{\sigma} = \gamma \vec{E} \quad (\text{в}); \quad \operatorname{div} \vec{\sigma} = 0 \quad (\text{г}), \quad (2)$$

где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  — векторы напряженности электрического и магнитного полей;

$\vec{\sigma}$  — вектор плотности тока проводимости;

$\vec{B}$  — то же, индукции магнитного поля;

$\gamma$ ,  $\mu$  — электрическая проводимость и магнитная проницаемость проводника соответственно.

Так как рассматриваемый проводник является ферромагнитной средой, обладающей нелинейными гистерезисными магнитными характеристиками, решение уравнений (1), (2) вызывает существенные трудности из-за сложности математической модели явления гистерезиса [4]. Известно ограниченное число работ, где рассматривается расчет поля в проводящих нелинейных гистерезисных средах. При этом решение задач определения электромагнитных характеристик осуществляется лишь для случая плоской линейно поляризованной волны при известных краевых условиях. Для рассматриваемого случая задача становится некорректной из-за неопределенности граничных условий на  $\Gamma_1$  и ее решение предполагается искать итерационным методом, применяемым при исследовании полей в полосовых проводниках с постоянными электромагнитными свойствами [5, 6]. Как показано в [5], расчет поля в проводнике прямоугольного профиля при протекании переменного тока целесообразно проводить по математической модели, в которой система уравнений (1), (2) сводится к уравнению относительно вектора напряженности магнитного поля

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} + \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) преобразуется в систему дифференциальных уравнений относительно проекций  $\vec{H}$ :

$$\frac{\partial^2 H_y(y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 H_z(y, z, t)}{\partial y \partial z} = \gamma \mu_\partial(H) \frac{\partial H_y(y, z, t)}{\partial t} \quad (\text{а}); \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 H_z(y, z, t)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_y(y, z, t)}{\partial y \partial z} = \gamma \mu_\partial(H) \frac{\partial H_z(y, z, t)}{\partial t} \quad (\text{б}),$$

где  $\mu_\partial(H) = \partial B / \partial H$  — дифференциальная (динамическая) магнитная проницаемость;

$$y \in [0, a], \quad z \in [0, b], \quad t \in [0, T].$$

В (4) зависимости индукции и динамической магнитной проницаемости считаются известными. В нашем случае они определяются из статической кривой намагничивания соответствующей марки стали без учета явления гистерезиса из-за сложности решаемой задачи. Решение приведенных дифференциальных уравнений осуществляется численным способом.

**Аппроксимация дифференциальных уравнений модели разностными и их решение.** Численное решение нелинейных уравнений (4) производится методом конечных разностей. Сечение полосы (область  $D_1$ :  $y \in [0, a]$ ,  $z \in [0, b]$ ) с геометрическими размерами  $a$  и  $b$  покрывается семейством параллельных прямых, т. е. соответствующей разностной сеткой (рис. 2). Аналогично разбивается и временной интервал ( $t \in [0, T]$ ). Непрерывные функции в (4) заменяются дискретными величинами:

$$H_y(y_i, z_j, t_k) = H_{yijk}^l; \quad H_z(y_i, z_j, t_k) = H_{zijk}^l; \quad \mu_D(H) = \mu_{Dijk}^l, \quad (5)$$

где верхний индекс  $l$  соответствует  $l$ -й итерации ( $l$ -е приближение исконых функций на  $k$ -м временном интервале).

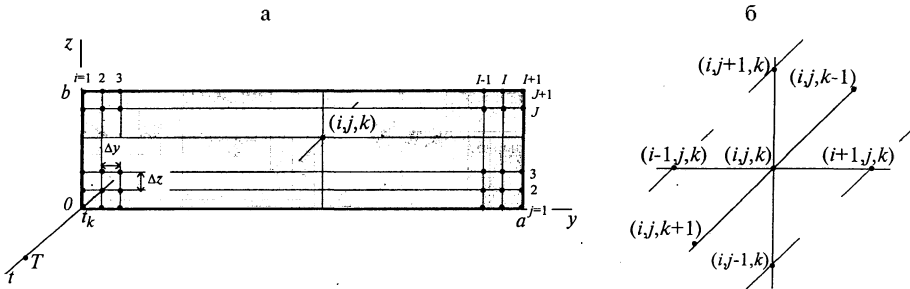


Рис. 2

Для аппроксимации дифференциальной краевой задачи алгебраической производные в (4) заменяются соответствующими разностными отношениями. При этом используется шаблон неявной схемы как наиболее употребительный в исследованиях и позволяющий строить устойчивые уравнения и их решения при произвольном соотношении шагов  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  и  $\Delta t$  [7]. Ниже рассматривается аппроксимация задачи на примере уравнения (4а). Производные по времени во всех внутренних узлах ( $y_i$ ,  $z_j$ ,  $t_k$ ) заменяются разностями через неизвестные значения соответствующих напряженностей:

$$\left. \frac{\partial H_y(y_i, z_j, t)}{\partial t} \right|_{t=t_k} \approx \frac{H_{yijk}^l - H_{yijk-1}^l}{\Delta t}, \quad i = 1, 2, \dots, I+1, \quad j = 2, \dots, J. \quad (6)$$

На внешних узлах граничные условия  $H_y(y, 0, t)$ ,  $H_y(y, b, t)$  для (4а) и  $H_z(0, z, t)$ ,  $H_z(a, z, t)$  для (4б) первоначально принимаются известны-

ми. Величины  $H_{yijk-1}$  в (6) считаются найденными из расчета поля итерационным путем на  $(k-1)$ -м временном интервале  $(t_{k-1})$ , и для них индекс номера итерации опущен.

Вторые производные по пространственным координатам заменяются разностями величин напряженностей в трех смежных узлах расчетной сетки

$$\left. \frac{\partial^2 H_y(y_i, z, t_k)}{\partial z^2} \right|_{z=z_j} \approx \frac{H_{yij+1k}^l - 2H_{yijk}^l + H_{yij-1k}^l}{\Delta z^2}, \quad i=1, 2, \dots, I+1, \quad j=2, \dots, J. \quad (7)$$

Для разделения системы (4) на два отдельных уравнения относительно  $H_y(y, z, t)$  и  $H_z(y, z, t)$  смешанные производные во внутренних узлах сетки ( $i=2, \dots, I, \quad j=2, \dots, J$ ) аппроксимируются для  $(l-1)$ -й итерации по центральной разностной схеме

$$\left. \frac{\partial^2 H_z(y, z, t_k)}{\partial y \partial z} \right|_{\substack{y=y_i \\ z=z_j}} \approx \frac{H_{zi+1j+1k}^{l-1} - H_{zi+1j-1k}^{l-1} - H_{zi-1j+1k}^{l-1} + H_{zi-1j-1k}^{l-1}}{4\Delta y \Delta z}. \quad (8)$$

На внешних узлах сетки ( $i=1, 2, \dots, I+1, \quad j=1, J+1$  и  $i=1, I+1, \quad j=1, 2, \dots, J+1$ ) для аппроксимации производных функции  $H_z$  по координате  $y$  и  $H_y$  по координате  $z$  используются менее точные формулы правой и левой разностных производных, и здесь не приводятся.

При решении краевой задачи (4) итерационным способом приближенные значения смешанных производных считаются известными и найденными на  $(l-1)$ -й итерации. Выражения для их расчета в соответствии с (8) можно записать в виде

$$\left. \frac{\partial^2 H_z(y, z, t_k)}{\partial y \partial z} \right|_{\substack{y=y_i \\ z=z_j}} \approx \frac{F_{zijk}^{l-1}}{\Delta y \Delta z} (a); \quad \left. \frac{\partial^2 H_y(y, z, t_k)}{\partial y \partial z} \right|_{\substack{y=y_i \\ z=z_j}} \approx \frac{F_{yijk}^{l-1}}{\Delta y \Delta z} (b), \quad (9)$$

где

$$F_{zijk}^{l-1} = \begin{cases} (H_{zi+1j+1k}^{l-1} - H_{zi+1j-1k}^{l-1} - H_{zi-1j+1k}^{l-1} + H_{zi-1j-1k}^{l-1})/4, & i=2, \dots, I, \quad j=2, \dots, J; \\ (H_{zi+1j+1k}^{l-1} - H_{zi+1j-1k}^{l-1} - H_{zij+1k}^{l-1} + H_{zij-1k}^{l-1})/2, & i=1, \quad j=2, \dots, J; \\ (H_{zij+1k}^{l-1} - H_{zij-1k}^{l-1} - H_{zi-1j+1k}^{l-1} + H_{zi-1j-1k}^{l-1})/2, & i=I+1, \quad j=2, \dots, J; \end{cases}$$

$$F_{yijk}^{l-1} = \begin{cases} (H_{yi+1j+1k}^{l-1} - H_{yi+1j-1k}^{l-1} - H_{yi-1j+1k}^{l-1} + H_{yi-1j-1k}^{l-1})/4, & i=2, \dots, I, \quad j=2, \dots, J; \\ (H_{yi+1j+1k}^{l-1} - H_{yi+1jk}^{l-1} - H_{yi-1j+1k}^{l-1} + H_{yi-1jk}^{l-1})/2, & i=2, \dots, I, \quad j=1; \\ (H_{yi+1jk}^{l-1} - H_{zi+1j-1k}^{l-1} - H_{yi-1jk}^{l-1} + H_{yi-1j-1k}^{l-1})/2, & i=2, \dots, I, \quad j=J+1. \end{cases}$$

Подставляя разностные отношения в (4), получим их разностный аналог (системы алгебраических уравнений). Они дополняются краевыми и начальными условиями и относительно неизвестных  $H_y$  и  $H_z$  для внутренних узлов представляются в матричном виде:

$$\mathbf{A}_{y\,ijk}^{l-1} \mathbf{H}_{y\,ijk}^l = \mathbf{Q}_{y\,ijk}^{l-1} \quad (\text{а}); \quad \mathbf{A}_{z\,ijk}^{l-1} \mathbf{H}_{z\,ijk}^l = \mathbf{Q}_{z\,ijk}^{l-1} \quad (\text{б}), \quad (10)$$

где  $\mathbf{A}_{y\,ijk}^{l-1}$  и  $\mathbf{A}_{z\,ijk}^{l-1}$  — матрицы коэффициентов:

$$\mathbf{A}_{y\,ijk}^{l-1} = \begin{pmatrix} a_{r,yi2k}^{l-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{yi3k}^{l-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{yiJ-1k}^{l-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{yiJk}^{l-1} \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, I;$$

$$\mathbf{A}_{z\,ijk}^{l-1} = \begin{pmatrix} a_{z2jk}^{l-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{z3jk}^{l-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{zI-1jk}^{l-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{zIjk}^{l-1} \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, J;$$

$\mathbf{Q}_{y\,ijk}^{l-1}$  и  $\mathbf{Q}_{z\,ijk}^{l-1}$  — столбцы свободных членов:

$$\mathbf{Q}_{y\,ijk}^{l-1} = \begin{pmatrix} q_{yi2k}^{l-1} - H_{yi1k}^l \\ q_{yi3k}^{l-1} \\ \dots \\ q_{yiJ-1k}^{l-1} \\ q_{yiJk}^{l-1} - H_{yiJ+1k}^l \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, I; \quad \mathbf{Q}_{z\,ijk}^{l-1} = \begin{pmatrix} q_{z2jk}^{l-1} - H_{z1jk}^l \\ q_{z3jk}^{l-1} \\ \dots \\ q_{zI-1jk}^{l-1} \\ q_{zIjk}^{l-1} - H_{zI+1jk}^l \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, J;$$

$\mathbf{H}_{y\,ijk}^l$  и  $\mathbf{H}_{z\,ijk}^l$  — столбцы неизвестных:

$$\mathbf{H}_{y\,ijk}^l = \begin{pmatrix} H_{yi2k}^l \\ H_{yi3k}^l \\ \dots \\ H_{yiJk}^l \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, I; \quad \mathbf{H}_{z\,ijk}^l = \begin{pmatrix} H_{z2jk}^l \\ H_{z3jk}^l \\ \dots \\ H_{zIjk}^l \end{pmatrix}, \quad j = 2, \dots, J;$$

$$a_{yijk}^{l-1} = -(2 + \gamma \mu_{\partialijk}^{l-1} \Delta z^2 / \Delta t); \quad q_{yijk}^{l-1} = -(H_{yijk-1} \gamma \mu_{\partialijk}^{l-1} \Delta z^2 / \Delta t - F_{zijk}^{l-1} \Delta z / \Delta y);$$

$$a_{zijk}^{l-1} = -(2 + \gamma \mu_{\partialijk}^{l-1} \Delta y^2 / \Delta t); \quad q_{zijk}^{l-1} = -(H_{zijk-1} \gamma \mu_{\partialijk}^{l-1} \Delta y^2 / \Delta t - F_{yijk}^{l-1} \Delta y / \Delta z).$$

Преобразование дифференциальных уравнений в алгебраические осуществляется с некоторой погрешностью, обусловленной погрешностью аппроксимации производных. Производные по времени аппроксимируются с погрешностью, пропорциональной  $\Delta t$ , а вторые производные —  $\Delta y^2$ ,  $\Delta z^2$ . Системы уравнений (10) хорошо обусловлены, так как условие устойчивости в данном случае выполняется автоматически.

Системы уравнений (10) связаны между собой через  $F_{zijk}^{l-1}$  и  $F_{yijk}^{l-1}$ , взятые на  $(l-1)$  итерации. Применение на каждом временном интервале метода итераций позволяет осуществить их раздельное решение, которое в силу особенности матриц  $\mathbf{A}_{yijk}^{l-1}$  и  $\mathbf{A}_{zijk}^{l-1}$  на каждой итерации осуществляется модифицированным методом исключения Гаусса — методом прогонки [7].

Определение параметров электромагнитного поля в стальной полосе (или полосах) рассматривается для случая, когда в ней (них) протекает заданный ток, изменяющийся по гармоническому закону  $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ . При этом раздельное решение (10а) и (10б) разбивается на два этапа. На первом (прямая прогонка) производится вычисление прогоночных коэффициентов в порядке возрастания номеров с учетом зависимости динамической магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля, а на втором — по ним вычисляются напряженности магнитного поля в узлах в порядке убывания номеров (обратная прогонка).

Начальные условия ( $k = 1$ ) принимаются нулевыми, т. е.  $H_{yij1} = 0$  и  $H_{zji1} = 0$ , а напряженности магнитного поля на границе исследуемой области при  $k = 2$  первоначально ( $l = 0$ ) рассчитываются, исходя из предположения о равномерном распределении плотности тока  $\sigma_x = I_m \sin(\omega \Delta t) / ab$  по известным выражениям, приведенным в [8]. Определенные в результате решения систем (10) напряженности магнитного поля в сечении полосы позволяют уточнить распределение плотности тока на первой итерации, которая равна [3]:

$$\sigma_x(y, z, t) = \frac{\partial H_z(y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(y, z, t)}{\partial z}. \quad (11)$$

Заменяя производные разностными отношениями, получим их аналог для расчета плотности тока на внутренних и внешних узлах сетки:

$$\sigma_{xijk}^l = \frac{H_{zi+1jk}^l - H_{zi-1jk}^l}{2\Delta y} - \frac{H_{yij+1k}^l - H_{yij-1k}^l}{2\Delta z}, \quad i = 2, \dots, I, \quad j = 2, \dots, J \quad (a);$$

$$\sigma_{xijk}^l = \frac{H_{zi+1jk}^l - H_{zijk}^l}{\Delta y} - \frac{H_{yij+1k}^l - H_{yij-1k}^l}{2\Delta z}, \quad i = 1, I + 1, \quad j = 2, \dots, J \quad (б); \quad (12)$$

$$\sigma_{xijk}^l = \frac{H_{zi+1jk}^l - H_{zi-1jk}^l}{2\Delta y} - \frac{H_{yij+1k}^l - H_{yijk}^l}{\Delta z}, \quad i = 2, \dots, I, \quad j = 1, J + 1 \quad (в).$$

Для угловых узлов  $(1,1)$ ,  $(1, J+1)$ ,  $(I+1, 1)$  и  $(I+1, J+1)$  принято

$$\sigma_{xijk}^l = \frac{H_{zi+1jk}^l - H_{zijk}^l}{\Delta y} - \frac{H_{yij+1k}^l - H_{yijk}^l}{\Delta z}. \quad (12\Gamma)$$

При более точном расчете граничных условий, величин потерь в проводнике и других характеристик поля целесообразно осуществлять определение плотности тока также на вспомогательных узлах сетки (узлы в центрах элементарных площадок)

$$\sigma_{xi+1/2j+1/2k}^l = (\sigma_{xijk}^l + \sigma_{xi+1jk}^l + \sigma_{xij+1k}^l + \sigma_{xi+1j+1k}^l) / 4, \quad (12\Delta)$$

$$i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J.$$

Вычислением плотностей токов по (12) заканчивается первый итерационный цикл. По величинам напряженности первой итерации определяются значения динамической магнитной проницаемости. Рассчитанные по (12д) плотности тока во вспомогательных узлах сетки служат основой для уточненного определения граничных условий на следующей итерации. После этого снова производится уточнение распределения напряженности магнитного поля и плотности тока. Полученные значения плотности тока в узлах на двух смежных итерациях  $l$  и  $l-1$  сопоставляются между собой и определяется их максимальная невязка (отклонение)  $\epsilon_{\text{рас}}$ . Величина невязки  $\epsilon_{\text{рас}}$  сравнивается с заданной  $\epsilon_{\text{зад}}$ . Если  $\epsilon_{\text{рас}} > \epsilon_{\text{зад}}$ , то итерационные циклы повторяются до выполнения условия  $\epsilon_{\text{рас}} \leq \epsilon_{\text{зад}}$ . При его достижении расчет поля в полосе для  $t_2 = \Delta t$  считается законченным, а значения параметров в этот момент становятся начальными для следующего. На интервале  $t_k = t_{k-1} + \Delta t$  вычисляются мгновенное значение тока в проводнике и его приращение  $\Delta I_k = I_m(\sin(\omega k \Delta t) - \sin(\omega(k-1)\Delta t))$ . По величине приращения тока определяется первое приближенное приращение граничных условий, которое принимается равномерно распределенным по периметру полосы. После определения граничных условий снова осуществляется итерационный процесс решения задачи расчета распределения параметров поля в исследуемой области на данном временном интервале аналогично предыдущему. Подобным образом производится решение задачи для других моментов времени вплоть до  $T$ .

При решении задачи расчета поля для двухполосного проводника используется локальная система координат, а полосы задаются областями  $D_1$ ,  $D_2$  и граничными контурами  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  (рис. 1). Для каждой полосы справедливы уравнения математической модели (4). Их решение осуществляется рассмотренным выше способом с учетом симметрии распределения поля в полосах, что дает возможность проводить расчет параметров только в одной из них. Плотность тока в сечении полос обладает четной симметрией, что позволяет записать равенство

$$\sigma_x^1(y, z, t) = \sigma_x^2(y, 2b + c - z, t), \quad (13)$$

где верхние индексы 1, 2 указывают номер полосы.

В силу (13) расчет напряженностей магнитного поля на границе любой из полос осуществляется через собственные плотности тока. Так, для полосы 1 (рис. 1) выражения для расчета граничных значений напряженности приведены в [8]. Таким образом, задача исследования распределения характеристик электромагнитного поля в двухполосных проводниках подобна задаче расчета поля в уединенной полосе и для ее решения справедливы рассмотренные выше вычислительные процедуры.

**Исследование распределения характеристик поля в полосовых проводниках.** Рассмотренный алгоритм исследования поля в стальных полосах реализован программно на ЭВМ, и проведены соответствующие расчеты. В исходных данных статическая кривая намагничивания стали задавалась таблично, а в самой программе интерполировалась рациональным сплайном, что позволило исключить разрывность функциональной зависимости динамической магнитной проницаемости от напряженности поля и получить с требуемой точностью приближение функцией реальной кривой намагничивания.

Погрешность и скорость сходимости численного решения зависит от величин принимаемых шагов по пространственным координатам и времени. Поэтому при их выборе использовались результаты аналитических решений краевой задачи для среды с  $\mu = \text{const}$  и результаты численного исследования. Их анализ позволил установить необходимые величины шагов для рассматриваемых стальных полос, обеспечивающих незначительное отличие результатов аналитических и численных расчетов. Так, для стальной полосы размерами  $50 \times 4 \text{ мм}^2$  принимались  $\Delta z = 0,25 \text{ мм}$ ;  $\Delta u = 1 \text{ мм}$  и  $\Delta t = 0,00025 \text{ с}$ , а для полосы  $100 \times 8 \text{ мм}^2$  —  $\Delta z = 0,5 \text{ мм}$ ;  $\Delta u = 2 \text{ мм}$  и  $\Delta t = 0,00025 \text{ с}$ .

Полученные результаты численного решения справедливы как для переходного, так и установившегося режимов. Наступление установившегося режима контролировалось сравнением модулей амплитуд параметров поля на каждом полупериоде возмущающей величины (тока полосы).

В работе исследовалось распределение поля в сечении полос из сталей Ст.1 и Ст.3, отличающихся своими магнитными характеристиками, при протекании по ним тока различной величины. В первом случае величина тока принималась равной допустимой для каждой полосы, что соответствовало режиму насыщения магнитной индукции в данной стали. В другом случае она составляла 0,25 допустимого, т. е. процесс перемагничивания полосы происходил практически на линейном участке кривой намагничивания. Характерные результаты этих исследований приведены на рис. 3. Из их анализа следует, что для одинаковых размеров полос распределение относительной амплитуды напряженности магнитного поля по их периметру практически одинаково и слабо зависит от величины протекающего тока (отличия наблюдаются только в угловых областях). Существенное отличие выявлено в величинах амплитуд плотности тока. Так как кривая намагничивания стали Ст.1 расположена выше кривой стали Ст.3, амплитуды плотности тока на поверхности оказались большими. Рассматриваемым полосам присуща одна общая закономерность. Практически на протяжении 80 % ширины полосы диффузию электромагнитного поля в ее тело можно рассматривать как процесс проникновения плоской линейно поляризованной волны в проводящую среду. В этой области, как показали расчеты, амплитуды



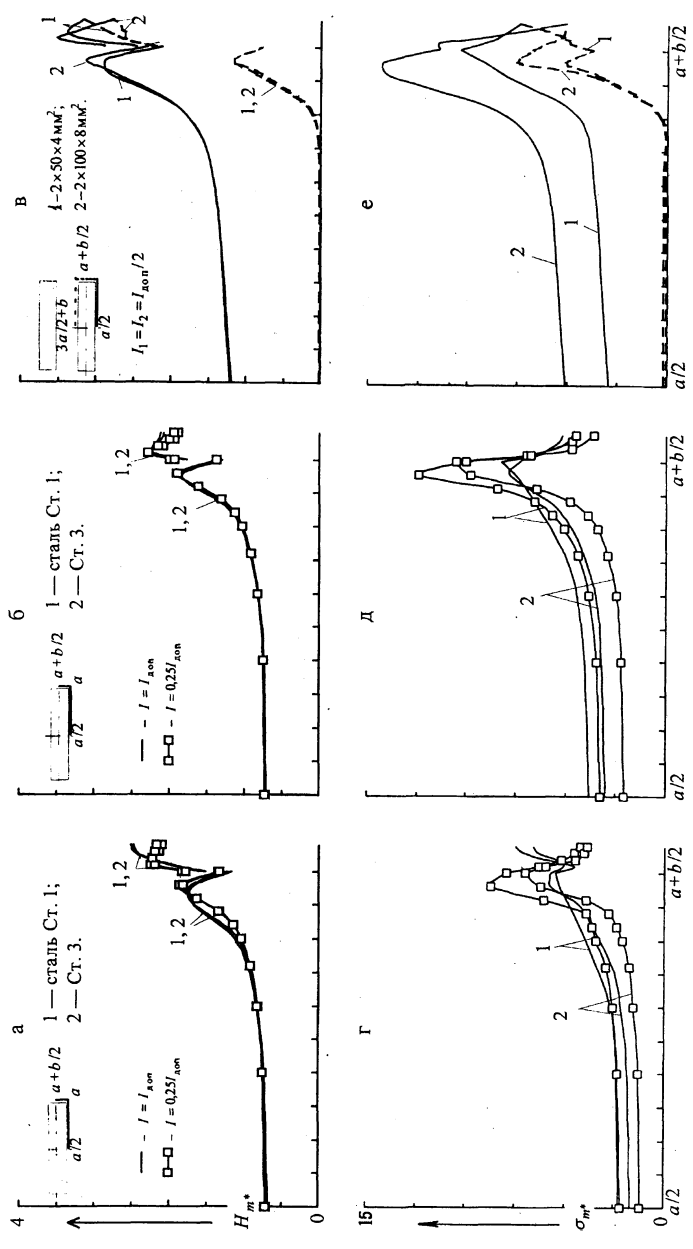


Рис. 3. Распределение на поверхности полос: а, б, в — относительных амплитуд напряженности магнитного поля; г, д, е — плотности тока; а, г — удлинённая полоса размерами  $a \times b = 50 \times 4 \text{ мм}^2$ ; б, д — то же,  $100 \times 8 \text{ мм}^2$ ; в, е — двухполосный проводник ( $c = b$ ) размерами  $50 \times 4 \text{ мм}^2$  и  $100 \times 8 \text{ мм}^2$  из стали Ст. 3

напряженности магнитного поля и плотности тока на поверхности остаются практически неизменными, а закон их изменения близок к гармоническому. Амплитуды напряженности магнитного поля составляют 68...70 % от амплитуды средней напряженности магнитного поля ( $I_m / 2(a + b)$ ), а на указанную часть сечения полосы приходится только 54...56 % от общего тока. Остальная часть токовой нагрузки приходится на угловые области сечения полос. Амплитуды плотности тока в них для различных сталей в зависимости от токовой нагрузки в 2...5 раз превышают плотности тока центральной области, а закон их изменения во времени значительно отличается от гармонического, что следует учитывать при линеаризации задачи.

Явление концентрации электромагнитного поля в угловых областях присуще не только железным проводникам, но и проводникам из немагнитных материалов [6]. Однако вытеснение поля в них значительно меньше из-за слабого проявления поверхностного эффекта.

Совпадение относительных амплитуд напряженности магнитного поля в центральной части сечения, как показали расчеты, присуще и для полос различных размеров (с постоянным отношением  $b/a$ ) при различных величинах токов. Таким образом, расчетами установлено, что на поверхности в центральной части сечения исследуемых стальных полос независимо от марки стали, токовой нагрузки и размеров сечения можно принимать одинаковой величину относительной амплитуды напряженности магнитного поля (70 % по отношению к средней амплитуде при  $b/a$  порядка 0,08...0,1).

Электромагнитные процессы в двухполосном проводнике для отдельных случаев характеризует рис. 3в, е, на котором представлено распределение тех же параметров поля на границах полос при половинной токовой нагрузке. В данном случае на внутренних гранях практически отсутствуют магнитное и электрическое поля, т. е. поле к внутренним граням затухает полностью. Для наружных граней присущи те же закономерности, что и для уединенных полос, а амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности центральной части сечения составляет порядка 120 % от амплитуды средней напряженности магнитного поля уединенной полосы.

Распределение поля по толщине стальных полос подчиняется общим законам затухания электромагнитного поля, что иллюстрирует рис. 4. Для части сечения, которой присуща диффузия плоской электромагнитной волны, распределение поля (плотности тока) по толщине для различных сечений остается практически одинаковым. Отличие проявляется только в близко расположенных к узким граням сечениях, что обусловлено появлением составляющей напряженности магнитного поля  $H_z$ , большими величинами полной напряженности магнитного поля и, как следствие, меньшими динамическими магнитными проницаемостями, т. е. более слабым проявлением затухания электромагнитной волны.

Влияние нелинейности магнитных свойств на характер изменений мгновенных значений параметров поля для центральной части сечения представлено на рис. 5. Так, при протекании по проводнику синусоидального тока напряженности магнитного поля на поверхности изменяются практически по синусоидальному закону. В глубь сечения напряженности магнитного поля по фазе отстают от напряженности на

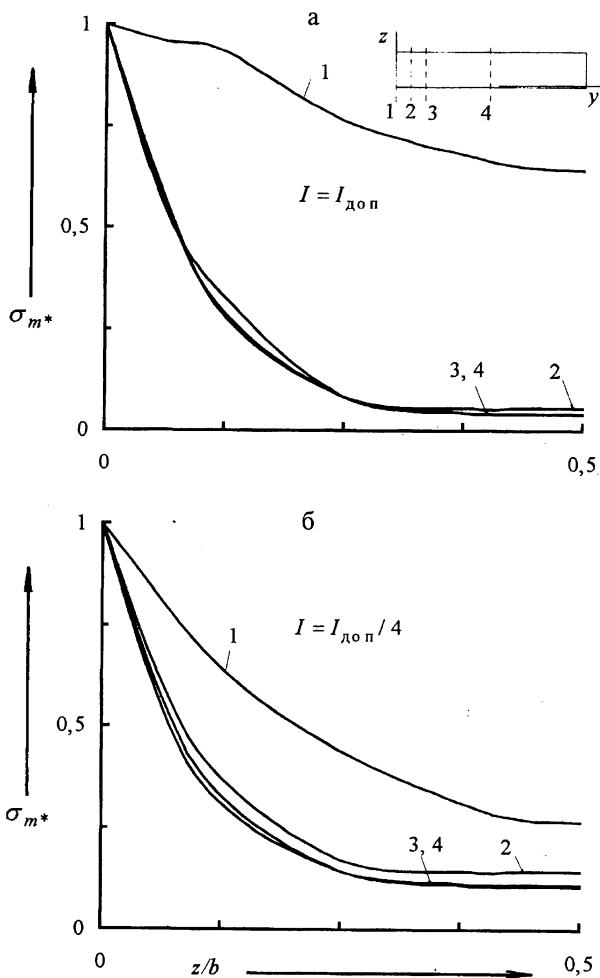


Рис. 4. Распределение амплитуды плотности тока по толщине полосы из стали Ст. 3 в различных сечениях полосы ( $100 \times 8 \text{ мм}^2$ :  
1 —  $y = 0$ ; 2 —  $a/20$ ; 3 —  $a/10$ ; 4 —  $a/2$ )

поверхности, а их закон изменения несколько отличен от синусоидального. Более значительно влияние нелинейности проявляется на характеристиках электрического поля. Представленные на рис. 5 временные зависимости плотностей тока отличаются от синусоидальных, и чем глубже проникает электромагнитное поле, тем больше их искажение.

**Линеаризация задачи расчета электромагнитного поля в стальных полосах.** Реализация математической модели электромагнитного поля в нелинейной среде численным методом показала значительные сложности и объемность вычислительных операций. В связи с этим в инженерных расчетах стремятся использовать различные способы линеаризации задачи, обеспечивающие удовлетворение соответствующих практических требований.

Проведенные выше расчеты и анализ полученных на их основе результатов показали возможность линеаризации задачи в данном случае, и ниже рассматривается линеаризованный алгоритм ее решения. Фактические распределения напряженности магнитного поля и плотности тока по периметру заменяются равномерным распределением на двух

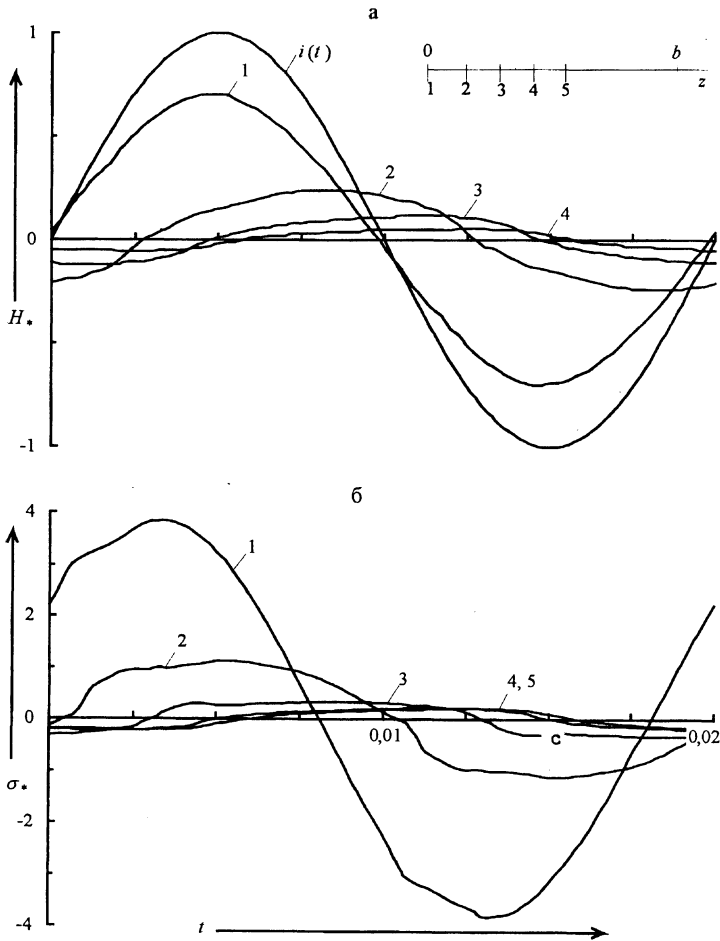


Рис. 5. Изменение мгновенных значений: а — напряженности магнитного поля; б — плотности тока в центральной части полосы на различной глубине проникновения (сталь Ст. 3,  $100 \times 8 \text{ мм}^2$ : 1 —  $z = 0$ ; 2 —  $b/8$ ; 3 —  $b/4$ ; 4 —  $3b/8$ ; 5 —  $b/2$ )

участках (рис. 6). На участках I и II ширины полосы принимаются неизменными параметры поля на границе сечения. При этом на участках II плотности тока  $\sigma_{mx}$  в 2...5 раз больше, чем на участке I (в зависимости от стали, токовой нагрузки и размеров полос). Таким образом, задача сводится к исследованию проникновения плоской волны в проводящую пластину. Предполагается решение уравнений поля такое же, как для линейной среды, и последующий учет нелинейной магнитной проницаемости. При принятых допущениях решение (1), (2) известно и относительно комплексных амплитуд  $\dot{H}_m$  и  $\dot{\sigma}_m$  имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{my}(z) &= \dot{H}_{my}(0) \frac{\text{sh}(\alpha(b-z))}{\text{sh}(\alpha b)} + \dot{H}_{my}(b) \frac{\text{sh}(\alpha z)}{\text{sh}(\alpha b)} \quad (\text{a}); \\ \dot{\sigma}_{mx}(z) &= -\dot{H}_{my}(0) \frac{\alpha \text{ch}(\alpha(b-z))}{\text{sh}(\alpha b)} + \dot{H}_{my}(b) \frac{\alpha \text{ch}(\alpha z)}{\text{sh}(\alpha b)} \quad (\text{б}), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha^2 = j\omega\gamma\mu$ ;

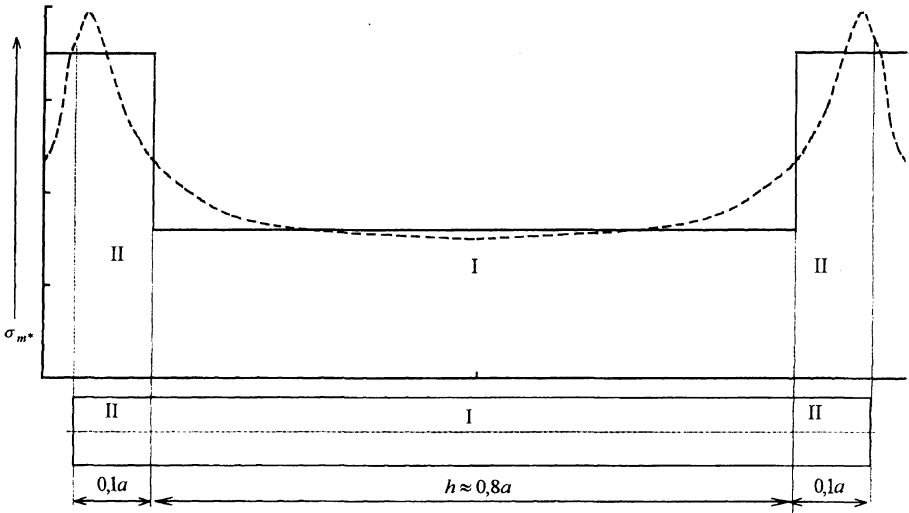


Рис. 6. Замена фактического распределения плотности тока на поверхности полос равномерным на участках I и II

$\mu$  — статическая проницаемость, принимаемая в зависимости от способа линеаризации или неизменной в каждой точке сечения и определяемая по амплитуде напряженности магнитного поля на поверхности, или зависящей от  $\dot{H}_m$  в каждой точке сечения;

$\dot{H}_{my}(0), \dot{H}_{my}(b)$  — комплексные амплитуды напряженности магнитного поля на внутренней и внешней гранях полосы ( $\dot{H}_{my}(0) = -\dot{H}_{my}(b)$  — для уединенной полосы,  $\dot{H}_{my}(b) = 0$  — для двух полос).

Для участка I, как уже отмечалось, амплитуда напряженности магнитного поля на поверхности ( $\dot{H}_{my}(0)$ ) составляет около 70 % для уединенной полосы и около 120 % для двух полос от средней напряженности одной полосы. По фазе она практически совпадает с полным током. Отмеченное позволяет по  $\dot{H}_{my}(0)$  и кривой намагничивания определить величину статической проницаемости на поверхности полосы и, считая ее неизменной по толщине, рассчитать по (14) распределения напряженности магнитного поля и плотности тока по сечению. По величине  $\dot{H}_{my}(z)$  можно определить значение магнитной проницаемости в каждой точке и в дальнейшем пересчитать плотности тока с учетом зависимости магнитной проницаемости по толщине полосы. Рассчитанные таким образом (с учетом и без учета зависимости магнитной проницаемости по толщине полосы) распределения амплитуды плотности тока сравнивались с распределениями, рассчитанными численным методом с учетом нелинейности магнитных характеристик. Сопоставление распределений плотностей токов, полученных по нелинейной и линеаризованным моделям, показало достаточно хорошее соответствие в их численных значениях для обоих способов линеаризации. При этом наибольшие различия в амплитудах плотности тока наблюдаются на поверхности, и в единичных случаях они достигают 25 %. В преобладающем большинстве исследуемых случаев их отличие не превышает 10 %. В глубь сечения различия численных значений еще меньше и не превышают 5 %. Ли-

неаризация, не учитывающая изменение магнитной проницаемости по толщине полосы, более предпочтительна, поскольку более проста и обеспечивает достаточное согласие с результатами, полученными по нелинейной модели. Распределение плотности тока по толщине на участке II приближенно может быть найдено на основе линеаризации для участка I. При этом следует исходить из того, что на участки I и II приходится соответственно порядка 55 и 45 % полного тока, т. е. амплитуды плотности тока на участке II (с учетом того, что он занимает около 20 % сечения) должны быть увеличены примерно в  $45 \times 80 / (55 \times 20) = 3,3$  раза. Более точное распределение поля на участках I и II можно получить, учитывая характер распределения плотности тока по поверхности для данного участка, на основе результатов, полученных при решении уравнений нелинейной модели численным методом в каждом конкретном случае.

Таким образом, изучение полученных результатов показало возможность использования свойств плоской волны при анализе процессов в стальных полосовых проводниках, что существенно упрощает расчет их электрических характеристик.

## ВЫВОДЫ

1. Разработан итерационный численный метод решения некорректной краевой задачи расчета распределения электромагнитного поля в одно- и двухполосном стальных проводниках, позволяющий определять параметры поля в переходном и установившемся режимах с учетом нелинейности магнитных характеристик стали.

2. Расчетами установлено, что практически независимо от размеров стальных полос (при малом отношении их толщины к ширине) процесс проникновения в них электромагнитного поля для центральной части сечения проводника (порядка 80 % сечения) можно рассматривать как диффузию плоской электромагнитной волны в проводящий лист. При этом вблизи узких граней характерна наибольшая концентрация плотности тока (на 20 % сечения приходится порядка 45 % токовой нагрузки).

3. Сопоставление численных результатов распределения параметров поля по сечению полос из различных марок сталей, полученных по нелинейной и линеаризованным математическим моделям, показало возможность использования линейной модели и свойств плоской волны при анализе поля в стальных полосовых проводниках, что существенно упрощает анализ и расчет их характеристик.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Руцкий А. И. Железные шины распределительных устройств. —Мн., 1947.
2. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справ. / Под ред. Б. Е. Неймарка. —М.; Л.: Энергия, 1967.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. —М.: Наука, 1976.
4. Герасимович А. Н. Исследование электромагнитных процессов в гистерезисных средах // Электричество. —1993. —№ 7. —С. 48–56.
5. Герасимович А. Н., Герасимович Д. А. Решение краевой задачи токораспределения в шинопроводе прямоугольного профиля итерационным методом // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). —1996. —№ 3–4. —С. 3–8.

6. Герасимович А. Н., Герасимович Д. А. Электромагнитное поле токопровода прямоугольного профиля // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). —1996. —№ 5–6. —С. 18–23.
7. Самарский А. А. Теория разностных схем. —М.: Наука, 1977.
8. Герасимович А. Н., Герасимович Д. А. Расчет токораспределения в многополосных шинпроводах // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ). —1997. —№ 1–2. —С. 25–32.

Представлена кафедрой  
электрических станций

Поступила 6.12.2000

УДК 621.3.066.6

## ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛОСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНТАКТНЫХ СОЕДИНЕНИЯХ

Докт. техн. наук, проф. ГЕРАСИМОВИЧ А. Н., инж. ГЕРАСИМОВИЧ Д. А.

*Белорусская государственная политехническая академия*

Инж. ЯКОВЛЕВ Г. В.

*ПО «Витебскэнерго»*

**Многослойная структура плоских контактных соединений.** Контактные поверхности проводников электрических аппаратов и установок для защиты от окисления и коррозии покрывают стойкими антикоррозийными металлами и сплавами [1], что превращает контакт в многослойную структуру и усложняет анализ протекающих в нем электромагнитных процессов. Любое плоское контактное соединение, образованное проводниками прямоугольного профиля, может быть представлено многослойной моделью, приведенной на рис. 1а. Модель включает три области (1, 2, 3), разделенные границами 1–1' и 2–2'. Области 1 и 3 представляют собой многослойные проводники шириной  $h$  с соответствующими электрическими проводимостями  $\gamma_{i1}$ ,  $\gamma_{i3}$  и магнитными проницаемостями  $\mu_{i1}$ ,  $\mu_{i3}$  слоев ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Область 2 является собственно контактным узлом длиной  $l$ , образованным проводниками соседних областей. По этой многослойной структуре протекает ток, который в областях 1 и 3 имеет только составляющую  $I_x$ , а в 2, где происходит переход тока от одного проводника к другому, — как составляющую  $I_x$ , так и  $I_z$ . Слои модели могут обладать анизотропными электрическими и нелинейными магнитными характеристиками. Векторы электромагнитного поля в данной структуре зависят от всех пространственных переменных, и для упрощения решения задачи рассматриваемая модель сводится к двумерной с использованием свойств плоской волны. Полагается, что в областях 1 и 3 присутствуют только напряженности электрического поля  $\dot{E}_{1imx}(z)$  и  $\dot{E}_{3imx}(z)$ , зависящие от координаты  $z$ , а в 2 — составляющие  $\dot{E}_{2imx}(x, z)$  и  $\dot{E}_{2imz}(x, z)$ , зависящие от  $x$  и  $z$ . Магнитное поле во всей модели имеет только одну составляющую