

УДК 669.017.3

## УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИК РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ ПЛАВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МГНОВЕННОГО РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА

Докт. техн. наук, проф. ОЛЬШАНСКИЙ В. М.,  
канд. техн. наук, проф. СВИНОЛОВОВ Н. П.,  
докт. техн. наук, проф. ТИМОШПОЛЬСКИЙ В. И.

*Национальная металлургическая академия Украины,  
Белорусский национальный технический университет*

При плавлении материалов основной инженерной задачей является определение динамики изменения размеров и температуры плавления тела. В общем случае скорость плавления тел зависит от плотности подведенного теплового потока, условий его приложения и месторасположения расплава. При этом возможны случаи, когда расплав либо мгновенно удаляется, либо непрерывно накапливается на поверхности твердого тела. К первому случаю можно отнести условия плавления шихты в плавильных печах непрерывного действия (вагранки, доменные, медеплавильные и другие печи), а ко второму – условия в печах периодического действия (мартеновские, стекловаренные, электродуговые и др.). В данной работе приведены результаты приближенного решения задачи плавления тел простейших форм, основанного на использовании метода мгновенного регулярного режима [1].

**Плавление «тонких» тел при мгновенном удалении расплава.** Рассмотрим плавление равномерно прогретых до температуры плавления  $t_{пл}$  простейших тел без изменения их формы.

Мгновенный тепловой баланс с учетом того, что все простейшие формы тела, равномерно прогретые до температуры плавления, плавятся полойно, можно записать в следующем виде:

$$q d\tau = \rho q_{пл} d\xi, \quad (1)$$

где  $q$  – подведенная плотность теплового потока;  $q_{пл}$  – скрытая теплота фазового перехода;  $\xi$  – текущая толщина расплавленного слоя;  $\tau$  – текущее время плавления.

Левая часть уравнения (1) представляет приход теплоты по условиям теплопередачи, а правая – количество усвоенной теплоты.

Если принять, что коэффициент теплоотдачи и температура греющей среды постоянны, а расплав непрерывно удаляется с поверхности тела, то отсюда следует, что процесс плавления происходит при постоянной плотности теплового потока.

Поэтому из выражения (1) вытекает, что скорость движения фронта плавления будет также постоянной

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{q}{\rho q_{пл}} = \text{const.} \quad (2)$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение (2), получим закон движения межфазной границы

$$\xi = \frac{q}{\rho q_{пл}} \tau, \quad (3)$$

показывающий, что движение межфазной границы во времени подчиняется линейному закону.

Приведя соотношение (3) к безразмерному виду, получим

$$(1 - W)K_0 / 2 = Fo, \quad (4)$$

где  $W = \left(1 - \frac{\xi}{S}\right)$  – доля твердого остатка;  $Fo = \frac{a\tau}{S^2}$  – число Фурье;

$K_0 = \frac{q_{пл}}{c\Delta t} = \frac{q_{пл}}{cqS/2\lambda}$  – число Коссовича, показывающее по своему физическому

смыслу, какая доля подведенной теплоты расходуется на преодоление скрытой теплоты плавления;  $S$  – толщина расплавляемого тела;  $c$  – удельная теплоемкость тела.

Для получения общей продолжительности процесса плавления воспользуемся конечными условиями при  $\tau = \tau_k$ :

$$\xi = S; \quad W = 0,$$

откуда следует, что

$$Fo = K_0 / 2. \quad (5)$$

Анализ полученного выражения показывает, что общая продолжительность плавления будет тем меньше, чем больше подведенная плотность теплового потока, меньше скрытая теплота плавления материала и меньше общая толщина расплавляемого тела. При прочих равных условиях скорость плавления всех простейших форм тела, прогретых до температуры плавления, будет одинаковой.

**Плавление «массивных» тел при мгновенном удалении расплава.** В отличие от предыдущих выкладок ниже рассматривается плавление тел простейшей формы с холодного состояния.

Поставленная в таком виде задача разбивается на две части: нагрев с холодного состояния до достижения температуры плавления на поверхно-

сти тела и догрев твердого остатка при мгновенном удалении расплава с поверхности тела.

Для первого периода  $\tau_1$ , предшествующего достижению на поверхности тела температуры плавления, решение известно и для области регулярного режима имеет вид

$$t(x, \tau) = \bar{t}_0 + \frac{q_1 S}{2\lambda} \left[ 2k_1 \frac{\alpha \tau}{S^2} + \left( \frac{x}{S} \right)^2 - \frac{1}{k_3} \right], \quad (6)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности тела;  $k_3$  – коэффициент усреднения температур по сечению тела, равный для случая  $q_1 = \text{const}$ : 3 – для пластины; 2 – цилиндра и 1,67 – шара.

Известными также являются: максимальный перепад температур в теле  $\Delta t_1 = q_1 S / (2\lambda)$ ; среднemasсовая температура тела  $\bar{t}_1 = t_{\text{пл}} - \frac{k_3 - 1}{k_3} \Delta t_1$ ; про-

должительность первого периода  $\tau_1 = \frac{\text{Spс}(\bar{t}_1 - \bar{t}_0)}{q_1 k_1}$ .

После достижения на поверхности тела температуры плавления происходит дальнейший процесс плавления с догревом твердого остатка.

Запишем мгновенный тепловой баланс для догрева твердого остатка из условия, что наступает мгновенный регулярный режим:

$$q_2 d\tau = w \rho c d\bar{t}, \quad (7)$$

где  $q_2$  – плотность теплового потока, необходимого для догрева твердого остатка;  $w = (S - \xi)$  – толщина твердого остатка;  $\bar{t}$  – среднemasсовая температура твердого остатка, определяемая по известному соотношению

$$\bar{t} = t_{\text{пл}} - \frac{k_3 - 1}{k_3} \Delta t = t_{\text{пл}} - \frac{(k_3 - 1) q_2 w}{k_2 k_3 \lambda}. \quad (8)$$

Для случая плавления при постоянном тепловом потоке  $k_2 = 2$  для всех форм тела.

Из выражения (8) следует, что

$$d\bar{t} = - \frac{(k_3 - 1) w}{k_2 k_3 \lambda} dq_2, \quad (9)$$

тогда выражение (7) с учетом (9) принимает вид

$$q_2 k_1 d\tau = - \frac{(k_3 - 1) w^2}{k_2 k_3 a} dq_2. \quad (10)$$

Разделив переменные и проинтегрировав левую и правую части в (10), получим закон изменения плотности теплового потока во времени, необходимый для догрева твердого остатка:

$$q_2 = q_1 \exp \left[ -\frac{k_4 a}{(k_3 - 1)w^2} \tau \right], \quad (11)$$

где  $k_4 = k_1 k_2 k_3$ .

Теперь для определения общей продолжительности процесса плавления воспользуемся следующим балансовым уравнением:

$$(q_1 - q_2) d\tau = \rho q_{пл} d\xi. \quad (12)$$

Приняв во внимание, что с увеличением времени параметр  $W$  стремится к нулю, после преобразований и приведения к безразмерному виду имеем

$$Fo = \frac{k_3 - 1}{k_4} + (1 - W) \frac{Ko}{2}. \quad (13)$$

Общая продолжительность плавления определится из условия, что при  $Fo = Fo_{пл}$ ,  $\xi = S$ ;  $W = 0$ :

$$Fo_{пл} = \frac{k_3 - 1}{k_4} + \frac{Ko}{2}. \quad (14)$$

Сопоставив выражения (14) и (5), можно сделать вывод, что общая длительность процесса плавления «массивного» тела складывается из двух слагаемых, одно из которых представляет собой время плавления «тонкого» тела, одинаковое для всех простейших форм, а второе – время запаздывания, разное для тел простейших форм. Результаты решения задачи представлены на рис. 1, 2.

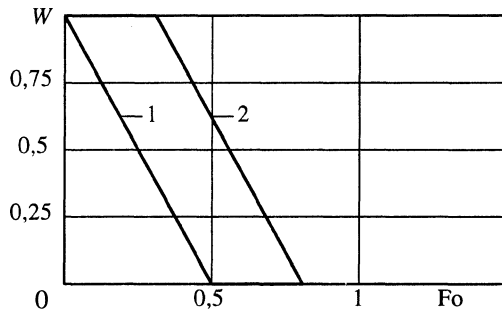


Рис. 1. Динамика плавления «тонких» и «массивных» тел при  $Ko = 1$  и мгновенном удалении расплава: 1 – «тонкое» тело; 2 – «массивное» тело

**Плавление «тонких» тел с сохранением расплава на поверхности.**

Особенностью плавления равномерно нагретых тел до температуры плавления и с сохранением расплава на поверхности является то, что твердая фаза ведет себя как «тонкое» тело, а расплав – как «массивное» тело.

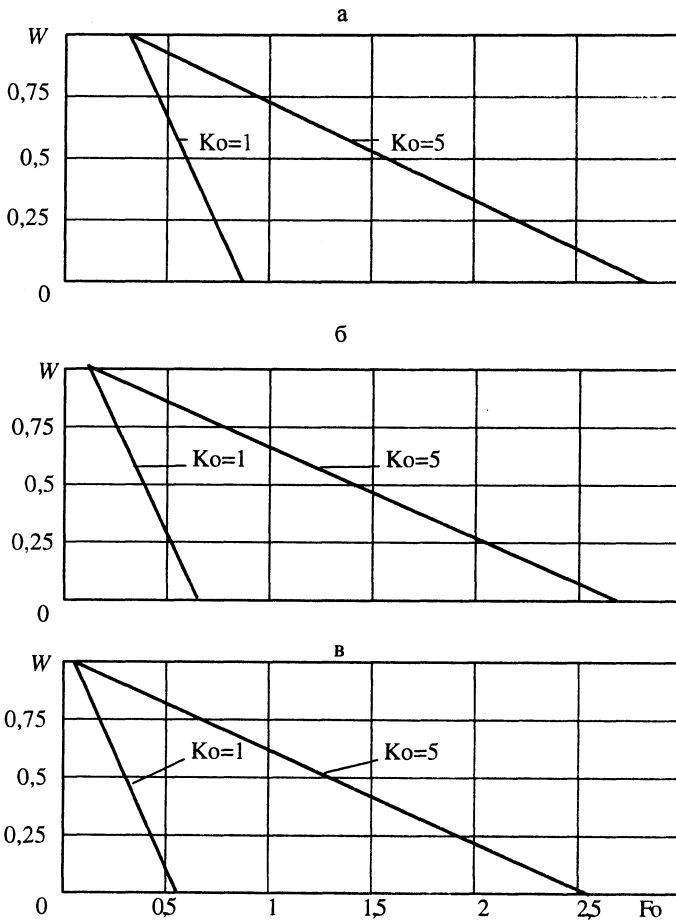


Рис. 2. Динамика плавления «массивных»: а – пластин; б – цилиндров; в – шаров при мгновенном удалении расплава

При решении задачи будем исходить из того, что количество подведенной теплоты расходуется на преодоление скрытой теплоты плавления и на перегрев расплавленного слоя (рис. 3).



Рис. 3. Схема к постановке задачи

Для решения задачи запишем мгновенный тепловой баланс

$$q_1 F_1 d\tau = \rho q_{пл} F_w d\xi + d[M_p c_p (\bar{t}_p - t_{пл})], \quad (15)$$

где  $\xi$  – текущая координата проплавленного слоя;  $F_1$  – исходная или максимальная поверхность расплавляемого тела;  $q_1$  – плотность теплового потока, подведенного к поверхности слоя расплава;  $F_w$  – поверхность твердого остатка, которая во времени остается неизменной (для пластины) либо изменяется (для цилиндра и шара);  $q_2$  – плотность теплового потока, подведенного к поверхности твердого остатка;  $M_p$  и  $c_p$  – масса и удельная теплоемкость расплава соответственно;  $\bar{t}_p$  – среднemasовая температура расплава, определяемая по выражению

$$\bar{t}_p = t_{\text{пл}} + \frac{\Delta t}{k_3^*} = t_{\text{пл}} + \frac{q_1 \xi}{k_2^* k_3^* \lambda}. \quad (16)$$

где  $k_2^*$  и  $k_3^*$  – коэффициенты усреднения теплового потока и температур по толщине расплавленного слоя при нагреве снаружи, являющиеся функциями толщины слоя.

Разделив левую и правую части уравнения (15) на  $F_1$ , получим

$$q_1 d\tau = \left( \frac{S - \xi}{S} \right)^{k_1 - 1} \rho q_{\text{пл}} d\xi + d \left[ \frac{q_1 \rho c}{k_4^* \lambda} \xi^2 \right], \quad (17)$$

где учтено, что

$$\frac{F_w}{F_1} = \left( \frac{S - \xi}{S} \right)^{k_1 - 1}; \quad \frac{M_p}{F_1} = \frac{\xi \rho}{k_1^*}; \quad \bar{t}_p - t_{\text{пл}} = \frac{q_1 \xi}{k_2^* k_3^* \lambda}; \quad k_4^* = k_1^* k_2^* k_3^*.$$

Проинтегрировав левую и правую части уравнения (17)

$$\int_0^\tau q_1 d\tau = \int_0^\xi \left( \frac{S - \xi}{S} \right)^{k_1 - 1} \rho q_{\text{пл}} d\xi + \int_0^\xi d \left[ \frac{q_1 \rho c}{k_4^* \lambda} \xi^2 \right] \quad (18)$$

и приведя его к безразмерному виду, получим

$$\text{Fo} = \frac{X^2}{k_4^*} - \frac{\text{Ko}}{2k_1} (1 - X)^{k_1} + \frac{\text{Ko}}{2k_1}, \quad (19)$$

где  $X = \frac{\xi}{S}$  – относительная координата слоя расплава;  $\text{Ko} = \frac{q_{\text{пл}}}{c q_1 S / 2\lambda}$  – число Коссовича.

Из (19) можно получить закон изменения расплавленного или твердого остатка во времени.

Так, для пластины

$$X = -\frac{k_4^*}{4} \text{Ko} + \sqrt{\left(\frac{k_4^*}{4} \text{Ko}\right)^2 + k_4^* \text{Fo}} \quad (20)$$

или

$$W = 1 + \frac{k_4^*}{4} \text{Ko} - \sqrt{\left(\frac{k_4^*}{4} \text{Ko}\right)^2 + k_4^* \text{Fo}} ; \quad (21)$$

для цилиндра

$$X = -\frac{k_4^* \text{Ko}}{4 - k_4^* \text{Ko}} + \sqrt{\left(\frac{k_4^* \text{Ko}}{4 - k_4^* \text{Ko}}\right)^2 + \frac{k_4^* \text{Fo}}{4 - k_4^* \text{Ko}}} \quad (22)$$

или

$$W = 1 + \frac{k_4^* \text{Ko}}{4 - k_4^* \text{Ko}} - \sqrt{\left(\frac{k_4^* \text{Ko}}{4 - k_4^* \text{Ko}}\right)^2 + \frac{k_4^* \text{Fo}}{4 - k_4^* \text{Ko}}} ; \quad (23)$$

для шара

$$X^3 + \frac{3(2 - \text{Ko})}{k_4^* \text{Ko}} X^2 + 3X - \frac{6\text{Fo}}{\text{Ko}} = 0 . \quad (24)$$

Общая продолжительность плавления:

$$\text{пластины} \quad \text{Fo}_{\text{пл}} = \frac{1}{6} + \frac{\text{Ko}}{2} ; \quad (25)$$

$$\text{цилиндра} \quad \text{Fo}_{\text{пл}} = \frac{1}{8} + \frac{\text{Ko}}{4} ; \quad (26)$$

$$\text{шара} \quad \text{Fo}_{\text{пл}} = \frac{1}{10} + \frac{\text{Ko}}{6} . \quad (27)$$

Анализ приведенных выше соотношений показывает, что при прочих равных условиях наименьшее время плавления соответствует шару, а наибольшее – пластине.

**Плавление «массивных» тел с сохранением расплава на поверхности.** Рассматриваемая задача является сочетанием двух предыдущих задач и заключается в том, что до момента достижения поверхностью тела температуры плавления режим нагрева остается таким же, как и в задаче плавления «массивных» тел с мгновенным удалением расплава, а после достижения температуры плавления – плотность теплового потока, расходуемая на догрев твердого остатка, остается такой же, как и в предыдущей задаче плавления «массивных» тел.

Отличием этой задачи от предыдущей является то, что разность между подведенным тепловым потоком и потоком, идущим на догрев твердого

остатка, затрачивается на покрытие скрытой теплоты плавления и на нагрев расплава.

Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для определения продолжительности процесса плавления «массивных» тел

$$Fo_{пл} = \left( \frac{1}{k_4} + \frac{Ko}{2k_1} \right) + \frac{(k_3 - 1)}{k_4}.$$

Сопоставляя полученный результат с плавлением «тонкого» тела, можно заключить, что длительность плавления «массивного» тела складывается из двух слагаемых, одно из которых (заключенное в скобках) представляет плавление «тонкого» тела, а второе – время запаздывания. Результаты решения задачи представлены на рис. 4, 5.

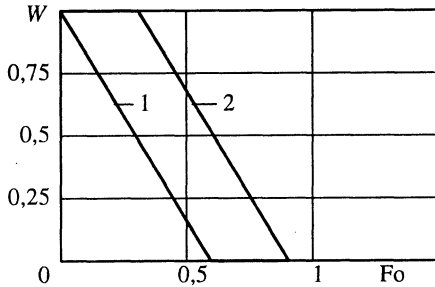


Рис. 4. Динамика плавления «тонкой» и «массивной» пластины с сохранением расплава на поверхности при  $Ko = 1$ : 1 – «тонкое»; 2 – «массивное» тела

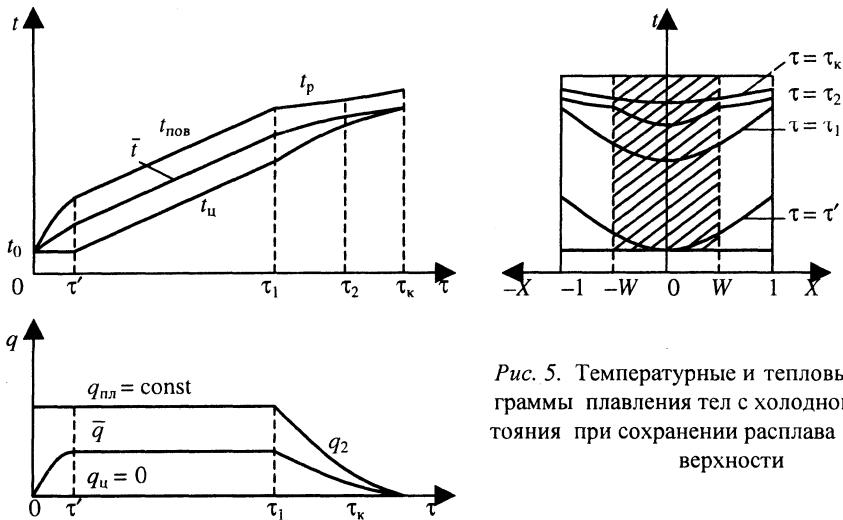


Рис. 5. Температурные и тепловые диаграммы плавления тел с холодного состояния при сохранении расплава на поверхности

### ВЫВОД

Приведено приближенное решение задачи плавления тел простейшей формы, базирующееся на использовании метода мгновенного регулярного режима. При этом рассмотрены наиболее типичные случаи плавления «термически тонких» и «термически массивных» тел при мгновенном удалении расплава и его сохранении на поверхности тела.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д ф а р б Э. М. Теплотехника металлургических процессов. – М.: Металлургия, 1967. – 439 с.