УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПСОИДА В РЯДАХ ПО ПОЛИНОМАМ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Студент гр. 113019 Крупский А.А.
Кандидат физ.-мат. наук, доцент Нифагин В.А.
Белорусский национальный технический университет

Рассматривается задача Дирихле для эллипсоида вращения $D:\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2}=1$, ($a_2 = a_3$). Данная задача соответствует стационарной задаче теплопроводности. Переходя от декартовых координат $x=(x_1,x_2,x_3)\in D\subset R^3$ к двумерной комплексной переменной $\kappa=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix}$, где $z_1 = x+i\,x_2$, $z_2 = x_3+i\,x_4$, $\overline{z_1}=x_1-ix_2$, $\overline{z_2}=x_3-ix_4$ с вырождением $x_4\to 0:\ {}^0\kappa=\begin{pmatrix} z_1 & {}^0z_2 \\ -{}^0\overline{z_2} & \overline{z_1}\end{pmatrix}$ получаем краевую задачу для шара

$$\Delta_{{}^0\kappa}u\left({}^0\kappa\right)=0,\quad \left|{}^0\kappa\right|<R \qquad (1)$$

$$u\big|_{\Gamma}=f\left({}^0\widetilde{\kappa}\right),\quad \left|{}^0\widetilde{\kappa}\right|=R, \qquad (2)$$

здесь $\Delta_{{}^0\kappa}(\cdot)=9\left((\cdot)_{,z_1\overline{z_1}}+(\cdot)_{,z_2\,{}^0\overline{z_2}}\right)=9(\cdot)_{,{}^0\kappa\,{}^0\overline{\kappa}}$.

Для отыскания решения $u\left({}^0\kappa,{}^0\overline{\kappa}\right)=\varphi\left({}^0\kappa\right)+\overline{\varphi\left({}^0\kappa\right)}$ разложим $\varphi\left({}^0\kappa\right)$ в ряд по однородным аналитическим полиномам $P_n\left({}^0\kappa,{}^0\overline{\kappa}\right)=b_n\sum a_m\,{}^0\kappa^{n-m_0}\,\overline{\kappa}^m$, $\operatorname{Re}a_m=a_m$, $a_m=n-m+1$, тогда

$$u\left({}^0\kappa,{}^0\overline{\kappa}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n\ge 0}c_n\left(P_n\left({}^0\kappa\right)+\overline{P_n\left({}^0\kappa\right)}\right). \qquad (3)$$

Коэффициенты c_n находятся из граничного условия (2), разложением его правой части в степенной ряд $\sum_{n\ge 0}f_n\,x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\,x_3^{\gamma}$, $\alpha+\beta+\gamma=n$. Производя далее конформное отображение посредством линейной функции $\kappa=R\left(2\,w+\overline{w}\right)$ мы преобразуем шар в эллипсоид и, таким образом, получим решение краевой задачи.