$$A_0 = f_0/[(\omega_0^2 - \omega_в^2)^2 + 4\omega_в{}^2\delta^2]^{0,5} \qquad (15)$$

и аргумент

$$\varphi = \mathrm{arctg}[2\delta\omega_в/(\omega_в^2 - \omega_0^2)] \qquad (16)$$

комплексной величины $\bar{A} = A_0\exp(i\varphi)$; значит, установившиеся вынужденные колебания давления в системе, описываемой уравнением (12), будут иметь вид

$$P_1 = A_0\cos(\omega_в\tau + \varphi). \qquad (17)$$

В зависимостях (13)–(15) величина $f_0 = P_вK_а/M_а$ является параметром перехода от (12) к (13). Вынужденные колебания описываются суммой общего (2) и частного (17) решений, отражающих соответственно переходный и установившийся процессы; при достаточно большом τ решение (2) стремится к нулю и остается только решение (17).

В области резонансных частот $\omega_в \approx \omega_0$ амплитуда колебаний давления в КС зависит от коэффициента затухания $\delta = 0,5Z_а/M_а$, частота соответствует частоте внешнего сигнала, а $\varphi \to \pi/2$. Это означает, что колебания давления в КС будут отставать по фазе на $\pi/2$ от сигнала внешнего давления $P_в$. Знаменатель в формуле (14) можно привести к виду

$$\boldsymbol{K}_а = K_а - M_а\omega_в^2 + i\omega_вZ_а = K_0\exp(i\varphi), \qquad (18)$$

применив замену $\omega^2{}_0 = K_а/M_а$, $\delta = 0,5Z_а/M_а$, тогда решение уравнения (12) будет иметь вид

$$P_1 = P_вK_а/\boldsymbol{K}_а = F_0/\boldsymbol{K}_а, \qquad (19)$$

где комплексная величина $\boldsymbol{K}_а$ является акустической динамической жесткостью колебательной системы (КС), состоящей соответственно из акустической жесткости объема $K_а$, динамической жесткости акустической массы $(-M_а\omega_в^2)$ и динамической жесткости акустического сопротивления $i\omega_вZ_а$; $F_0 = P_вK_а$.

При $\omega_в << \omega_0$ в $\boldsymbol{K}_а$ преобладает слагаемое $K_а$, колебательная система управляется акустической жесткостью $K_а$ и в пренебрежении другими слагаемыми (18) можно записать $P_1 \approx P_в$. При $\omega_в >> \omega_0$ колебательная система управляется акустической массой, так как в $\boldsymbol{K}_а$ преобладает слагаемое $M_а\omega_в^2$, амплитуда колебаний давления в КС определяется зависимостью $P_1 = P_вK_а/(\omega^2{}_вM_а) = P_в(\omega_0/\omega_в)^2$.

Эти выводы необходимо учитывать при конструировании и эксплуатации камер пульсирующего горения, применяемых для очистки поверхностей нагрева котельных агрегатов, интенсификации конвективной теплоотдачи в теплообменниках и т. д. Изменяя размеры КС – длину канала l, его площадь сечения S и объем КС $V_{КС}$, можно получить требуемые результаты для заданной частоты $\omega_в$; рабочая температура в КС не влияет на $K_а$ и уменьшает $M_а$ из-за снижения плотности газов ρ, влияние температуры на $Z_а$ рассмотрено выше.

В настоящем анализе рассмотрены КС с сосредоточенными параметрами – акустической массой $M_а$, акустической жесткостью $K_а$ и акустическим трением $Z_а$. Если КС имеет конструктивные элементы, участвующие в переносе колебательной энергии, то роль этих элементов можно учесть, вводя коэффициенты связи [3].

ВЫВОДЫ

Применение метода сосредоточенных акустических параметров для описания динамических свойств энергетических камер сгорания позволяет определить собственные акустические свойства и развитие вынужденных колебаний в КС. В работе приведены зависимости, позволяющие рассчитать собственную частоту КС при известных конструктивных и режимных характеристиках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торопов Е. В. Динамические особенности камер сгорания теплоэнергетических установок // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1983. – № 11. – С. 66–70.
2. Торопов Е. В., Кравченко В. П. Колебания в камере сгорания доменных воздухонагревателей при возмущениях произвольной формы // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1989. – № 6. – С. 132–136.
3. Торопов Е. В. Динамика систем горения топлива теплоэнергетических установок // Энергетика... (Изв. высш. учеб. заведений). – 1981. – № 12. – С. 83–86.

Поступила 16.12.2003

УДК 536.2

О НАХОЖДЕНИИ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧАХ, МОДЕЛИРУЮЩИХ КИНЕТИКУ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

ШЕВЕЛЕВ В. В., ЛОКШИН ДЖ. Л.

Московская государственная академия тонкой химической технологии имени М. В. Ломоносова

К краевым задачам для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях приводят разнообразные задачи физики, химии, технологии, среди которых следует отметить в первую очередь задачи, связанные с моделированием кинетики фазовых превращений [1...3]. В качестве примера можно указать задачи, моделирующие процессы роста и плавления кристаллов, кристаллизации слитков и т. п.

В то же время подобные задачи являются одними из наиболее сложных не только в теории теплопроводности, но и в математической физике, так как решение задачи ищется в области, граница которой движется по закону, который не известен (задачи стефановского типа), а подлежит определению самосогласованным с искомым температурным полем способом из дополнительного физического условия, задаваемого на движущейся межфазной границе (МГ). Поэтому при решении задач стефановского типа в общем случае не применимы классические методы математической физики, так как при этом не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с изменением во времени области теплопереноса.

Указанное обстоятельство обусловило разработку различных специальных аналитических методов решения задач стефановского типа [1...6], позволяющих найти приближенное аналитическое выражение для закона движения МГ и температурного поля. Наиболее существенные результаты, полученные в этой области теории теплопроводности, представлены в [1, 2, 4].

В то же время при решении проблемы устойчивости формы МГ и установлении правил отбора скорости ее движения, структуры и формы основным является вопрос о нахождении не температурного поля, а закона движения МГ.

В связи с этим большой интерес для кинетической теории фазовых превращений и развития методов решения задач стефановского типа представляют аналитические методы их решения, позволяющие находить закон движения МГ, не определяя при этом температурное поле. Среди работ этого направления отметим метод дифференциальных рядов [1, 2], метод интегральных уравнений специального типа [5], метод обобщенного интегрального преобразования [4, 6]. В [7] предложен метод нахождения неизвестного закона движения МГ из интегрального уравнения, получаемого из исходной краевой задачи интегрированием уравнения переноса по всей области процесса. В данной работе метод интегральных уравнений, разработанный в [7] применительно к одномерным задачам стефановского типа, обобщается на многомерный случай, что позволяет, не определяя температурное поле, находить не только закон движения МГ, но и исследовать устойчивость ее формы и устанавливать правила отбора скорости движения МГ.

Суть метода, предложенного в [7], проиллюстрируем на примере краевой задачи, моделирующей процесс кристаллизации из расплава, в котором осуществляется полное конвективное перемешивание, а отвод теплоты из системы – через неподвижную кусочно-гладкую поверхность S_0, ограничивающую изнутри область переноса теплоты $G(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_S(M,t)}{\partial t} = a_S \Delta T_S(M,t), & M \in G(t);\ t>0; \quad (1) \\ T_S(M,0) = \Phi(M), & M \in \overline{G}(0); \quad (2) \\ T_S(M,t) = \Psi(v_n), & M \in S(t);\ t>0; \quad (3) \\ \lambda_S \dfrac{\partial T_S(M,t)}{\partial n} + \alpha T_S(M,t) = q\rho v_n + \alpha T_L(t), & M \in S(t);\ t>0; \quad (4) \\ \beta_1 \dfrac{\partial T_S(M,t)}{\partial n} - \beta_2 T_S(M,t) = -\varphi(M,t), & M \in S_0;\ t>0. \quad (5) \end{cases}$$

Здесь $T_S(M,t)$ – температура в твердой фазе в точке M в момент времени t; $\beta_1^2+\beta_2^2>0$; $S(t)$ – межфазная кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область $G(t)$ в момент времени t; $T_L(t)$ – температура в жидкой фазе в момент времени t; $\Phi(M)$ – начальное распределение температуры в твердой фазе; $\Psi(v_n)$ – заданная функция нормальной скорости движения МГ v_n, определяемая исходя из механизма процесса кристаллизации на МГ; $\varphi(M,t)$ – заданная функция, описывающая условия теплообмена на неподвижной поверхности S_0; α – коэффициент теплообмена между жидкой и твердой фазами. Предполагаем также, что функции, входящие в (1)...(5), удовлетворяют всем условиям, необходимым для существования решения поставленной краевой задачи. Эти условия можно найти, например, в [4]. Заметим, что в (3) и (4) n – внешняя нормаль к S и S_0 соответственно.

Для получения уравнения, позволяющего найти закон движения МГ, умножим в соответствии с идеей метода интегральных уравнений [7] уравнение (1) на некоторую функцию $f(M,t-\eta)$ и проинтегрируем по области $G(\eta)$ и по переменной η от нуля до некоторого значения времени t (переменную t в (1) необходимо заменить на η). Получим

$$\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{G(\eta)} \frac{\partial T_S(M,t)}{\partial \eta} f(M,t-\eta)\mathrm{d}V = a_S \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{G(\eta)} f(M,t-\eta)\Delta T_S(M,t)\mathrm{d}V. \quad (6)$$

Учитывая, что $f\dfrac{\partial T_S}{\partial \eta} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}(fT_S) - T_S\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$, и преобразуя левую часть уравнения (6) с помощью обобщенной теоремы Гаусса, а правую – с помощью второй формулы Грина, получим

$$\int_0^t \mathrm{d}\eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} \int_{G(\eta)} T_S(M,t) f(M,t-\eta)\mathrm{d}V - \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{G(\eta)} T_S \frac{\partial f}{\partial \eta}\mathrm{d}V - \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} v_n f T_S\,\mathrm{d}s =$$

$$= a_S \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{G(\eta)} T_S \Delta f\,\mathrm{d}V + a_S \int_0^t \mathrm{d}\eta \iint_{S_0} \left(f\frac{\partial T_S}{\partial n} - T_S \frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}s + \quad (7)$$

$$+ a_s \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} \left(f\frac{\partial T_S}{\partial n} - T_S \frac{\partial f}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

Потребуем, чтобы функция $f(M,t-\eta)$ удовлетворяла следующим условиям:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f(M,t-\eta)}{\partial \eta} = a_S \Delta f(M,t-\eta), & M \in G(\eta);\ 0<\eta<t; \quad (8) \\ f(M,0) = 0, & M \in G(0); \quad (9) \\ \beta_1 \dfrac{\partial f(M,t-\eta)}{\partial \eta} - \beta_2 f(M,t-\eta) = 0, & M \in S_0;\ 0<\eta<t. \quad (10) \end{cases}$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$a_S \int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} \left\{ -\Psi(v_n(M,\eta)) \left(\frac{\alpha}{\lambda_S} f(M,t-\eta) + \frac{\partial f}{\partial n}\right) + f(M,t-\eta)\Psi(v_n(M,\eta)) v_n(M,\eta) + \right.$$

$$+\frac{1}{\lambda_s} f(M,t-\eta)(q\rho v_n(M,\eta)+\alpha T_L(\eta))\Bigg\}\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{a_S}{\beta_1}\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S_0} f(M,t-\eta)\varphi(M,\eta)\mathrm{d}s - \int_{G(0)} \Phi(M) f(M,t)\mathrm{d}V. \tag{11}$$

Если $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 1$, то слагаемое $\frac{a_s}{\beta_1}\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S_0} f\varphi \mathrm{d}s$ в (11) нужно заменить выражением $-a_S\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S_0} \varphi \frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$.

В интегральное уравнение (11) входит функция $T_L(t)$, которая удовлетворяет, очевидно, уравнению массового баланса

$$\frac{\mathrm{d}T_L}{\mathrm{d}t} + \frac{T_L}{c\rho}\frac{\alpha \int_{S(t)}\mathrm{d}s + c\rho \int_{S(t)} v_n \mathrm{d}s}{V(0)+\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} v_n \mathrm{d}s} = \frac{\alpha}{c\rho}\int_{S(t)}\Psi(v_n)\mathrm{d}s \frac{1}{V(0)+\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} v_n \mathrm{d}s}. \tag{12}$$

Из (12) следует

$$T_L(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t p(\eta)\mathrm{d}\eta}\left\{T_L(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^\eta p(\xi)\mathrm{d}\xi} g(\eta)\mathrm{d}\eta\right\}, \tag{13}$$

где

$$p(t) = \frac{\int_{S(t)}\left(v_n + \frac{\alpha}{c\rho}\right)\mathrm{d}s}{V(0)+\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} v_n \mathrm{d}s} \tag{14}$$

и

$$g(t) = \frac{\int_{S(t)}\Psi(v_n)\mathrm{d}s}{V(0)+\int_0^t \mathrm{d}\eta \int_{S(\eta)} v_n \mathrm{d}s}; \tag{15}$$

$V(0)$ и $T_L(0)$ – соответственно начальный объем твердой фазы и начальная температура в жидкой фазе.

Предлагаемый подход допускает обобщение на случай фазового превращения с переносом теплоты в старой и новой фазах. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_i}{\partial t} = a_i \Delta T_i(M,t), & M \in G_i(t);\ t>0;\ i=S,L; \quad (16) \\ T_i(M,0) = \Phi_i(M), & M \in G_i(0);\ i=S,L; \quad (17) \\ \beta_{1i}\frac{\partial T_i(M,t)}{\partial n} - \beta_{2i}T_i(M,t) = -\varphi_i(M,t), & \beta_{1i}^2+\beta_{2i}^2 \neq 0;\ i=S,L;\ t\geq 0, \\ & M\in S_0;\ i=S;\ M\in S_1;\ i=L. \quad (18) \end{cases}$$

Здесь индекс S означает твердую фазу, L – жидкую фазу; S_0 и S_1 – поверхности, ограничивающие области, занятые твердой и жидкой фазами соответственно. На $S(t)$ выполняются условия:

• теплового баланса

$$q\rho v_n = \lambda_S \frac{\partial T_S(M,\ t)}{\partial n} - \lambda_L \frac{\partial T_L(M,\ t)}{\partial n},\quad M \in S(t);\quad t \ge 0; \tag{19}$$

• равенства температур

$$T_S(M,\ t) = T_L(M,\ t),\ M \in S(t);\ t \ge 0; \tag{20}$$

• кинетическое условие, определяющее скорость движения МГ v_n в зависимости от переохлаждения $\Delta T = T_к - T(M,t)$; $M \in S(t)$ на МГ:

$$v_n = f(\Delta T). \tag{21}$$

Здесь $T_к$ – температура кристаллизации.

Для получения интегрального уравнения, определяющего закон движения МГ, умножим уравнения переноса (16) на функцию $\lambda_i f_i(M,t-\eta)$, $i = S,L$ и проинтегрируем по η от нуля до некоторого значения t (заменив t на η в уравнениях (16)) по области $G_i(\eta)$. Получим

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda_i}{a_i}\int_0^t d\eta \frac{d}{d\eta}\int_{G_i(\eta)} T_i(M,\eta) f_i(M,t-\eta) dv - \frac{\lambda_i}{a_i}\int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} T_i(M,\eta)\frac{\partial f_i(M,t-\eta)}{\partial \eta} dv -\\ &-\frac{\lambda_i}{a_i}\int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} \operatorname{div}\left(\bar{v} f_i(M,t-\eta) T_i(M,\eta)\right) dv = \lambda_i \int_0^t d\eta \int_{G_i(\eta)} T_i(M,\eta)\Delta f_i(M,\eta) dv + \\ &+\lambda_i \int_0^t d\eta \int_{S(\eta)\cup S_k}\left(f_i(M,\eta)\frac{\partial T_i(M,\eta)}{\partial n} - T_i(M,\eta)\frac{\partial f_i(M,\eta)}{\partial n}\right) ds.\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $i = L,S$; $k = 0$ при $i = S$ и $k = 1$ при $i = L$. В (21) уже использованы обобщенная теорема Гаусса и вторая формула Грина.

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f_i}{\partial t} = a_i \Delta f_i(M,t), & M \in G_i(t);\ t > 0;\ i = S,L; \quad (23)\\ f_i(M,0) = 0, & M \in G_i(0);\ i = S,L; \quad (24)\\ \beta_{1i}\dfrac{\partial f_i(M,t)}{\partial n} - \beta_{2i} f_i(M,t) = 0, & M \in S_0;\ i = S; M \in S_1;\ i = L;\ 0 < \eta < t; \quad (25)\\ f_S(M,t-\eta) = f_L(M,t-\eta), & M \in S(\eta);\ 0 < \eta < t. \quad (26)\end{cases}$$

С учетом этих условий после сложения уравнений (22) при $i = S$ и $i = L$ получим следующее уравнение для определения закона движения МГ при $\beta_{1i} \ne 0$; $i = S,\ L$:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_S}{a_S}\int\limits_{G_S(0)} T_S(M,0) f_S(M,t)\mathrm{d}v - \frac{\lambda_L}{a_L}\int\limits_{G_L(0)} T_L(M,0) f_L(M,t)\mathrm{d}v = \\
&= \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S(\eta)} f_S(M,t-\eta) v_n(M,\eta) q\rho \mathrm{d}s + \\
&+ \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S(\eta)} T_L(M,\eta)\left(\lambda_L \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n} - \lambda_S \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n}\right)\mathrm{d}s - \\
&-\frac{\lambda_S}{\beta_{1S}}\int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S_0} f_S(M,t-\eta)\varphi_S(M,\eta)\mathrm{d}s - \frac{\lambda_L}{\beta_{1L}}\int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S_1} f_L(M,t-\eta)\varphi_L(M,\eta)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

В случае $\beta_{1i} = 0$ вместо (27) получим

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\lambda_S}{a_S}\int\limits_{G_S(0)} T_S(M,0) f_S(M,t)\mathrm{d}v - \frac{\lambda_L}{a_L}\int\limits_{G_L(0)} T_L(M,0) f_L(M,t)\mathrm{d}v = \\
&= \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S(\eta)} f_S(M,t-\eta) v_n(M,\eta) q\rho \mathrm{d}s + \\
&+ \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S(\eta)} T_L(M,\eta)\left(\lambda_L \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n} - \lambda_S \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n}\right)\mathrm{d}s - \\
&-\lambda_S \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S_0} \frac{\partial f_S(M,t-\eta)}{\partial n}\varphi_S(M,\eta)\mathrm{d}s - \lambda_L \int\limits_0^t \mathrm{d}\eta \int\limits_{S_1} \frac{\partial f_L(M,t-\eta)}{\partial n}\varphi_L(M,\eta)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Таким образом, задача нахождения закона движения МГ сведена к решению более простых, но достаточно сложных задач (23)…(26) и последующему решению нелинейного уравнения (27) или (28).

В качестве иллюстрации предложенного подхода рассмотрим аналогичную (1)…(5) краевую задачу, описывающую одномерный процесс кристаллизации расплава, лимитируемый отводом теплоты через стенку (подложку) [2]. Она имеет вид:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial T_S}{\partial t} = a_S \dfrac{\partial^2 T_S}{\partial x^2}, & 0 < x < y(t),\ t > 0; & (29) \\
T_S(0,t) = T_\text{п}, & t > 0; & (30) \\
T_S[y(t),t] = T_\text{к}, & t > 0; & (31) \\
\lambda_S \dfrac{\partial T_S}{\partial x}\bigg|_{x=y(t)} = q\rho \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, & t > 0; & (32) \\
y(0) = 0. & & (33)
\end{cases}
$$

Здесь $y(t)$ – положение межфазной границы.

Согласно (8)…(10) функция $f(M,t-\eta)$ должна удовлетворять условиям:

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial f(x,t-\eta)}{\partial \eta}=a_S\dfrac{\partial^2 f(x,t-\eta)}{\partial x^2}, & 0<x<y(\eta);\ \ 0<\eta<t; \qquad (34)\\
f(x,0)=0, & 0<x<y(t); \qquad (35)\\
f(0,t-\eta)=0, & 0<\eta<t. \qquad (36)
\end{cases}
$$

Функцию $f(M,t-\eta)$, удовлетворяющую условиям (34)...(36), можно представить в виде

$$
f(x,t-\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_S(t-\eta)}}\left[\exp\left(-\frac{(x-y(t))^2}{4a_S(t-\eta)}\right)-\exp\left(-\frac{(x+y(t))^2}{4a_S(t-\eta)}\right)\right]. \qquad (37)
$$

Соответствующее интегральное уравнение, согласно (11), имеет вид

$$
\begin{gathered}
\lambda_S T_\text{к}\int_0^t f(y(\eta),t-\eta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta+a_S\int_0^t f(y(\eta),t-\eta)q\rho\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{d}\eta-\\
-\lambda_S a_S T_\text{к}\int_0^t\frac{\partial f(y(\eta),t-\eta)}{\partial x}\mathrm{d}\eta+\lambda_S a_S T_\text{к}\int_0^t\frac{\partial f(y(\eta),t-\eta)}{\partial x}\mathrm{d}\eta=0.
\end{gathered} \qquad (38)
$$

Ищем закон движения МГ в виде [2, 4]

$$
y(t)=2\beta\sqrt{a_S t}\,, \qquad (39)
$$

где β – неизвестная константа.

Подставляя (37) и (39) в (38) и выполняя интегрирование по частям, получим уравнение

$$
\begin{gathered}
-2\lambda_S T_\text{к}\mathrm{erfc}\beta+\frac{2\beta a_S q\rho}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\exp\left(-\beta^2\frac{1-x}{1+x}\right)-\exp\left(-\beta^2\frac{1+x}{1-x}\right)\right]dx+\\
+2\lambda_S T_\text{п}\mathrm{erfc}\beta=0.
\end{gathered} \qquad (40)
$$

Здесь $\mathrm{erfc}\, z=1-\mathrm{erf}\, z$, $\mathrm{erf}\, z=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-x^2}dx$.

Интегралы в (40) вычисляются соответственно с помощью подстановок $\xi=\dfrac{1-x}{1+x}$ и $\eta=\dfrac{1+x}{1-x}$. В результате получаем:

$$
\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\exp\left(-\beta^2\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\exp(\beta^2)\left[1-\mathrm{erf}^2(\beta)\right]; \qquad (41)
$$

$$
\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\exp\left(-\beta^2\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\exp(\beta^2)\mathrm{erfc}^2(\beta). \qquad (42)
$$

Подставляя (41) и (42) в (40), придем к следующему уравнению для определения параметра β в законе движения МГ (39)

$$
2\lambda_S(T_\text{к}-T_\text{п})\mathrm{erfc}(\beta)=2\sqrt{\pi}\beta a_S q\rho\,\mathrm{e}^{\beta^2}\mathrm{erfc}(\beta)\mathrm{erf}(\beta), \qquad (43)
$$

откуда окончательно получаем искомое трансцендентное уравнение для определения неизвестной константы β

$$\beta e^{\beta^2} \operatorname{erf}(\beta) = \frac{\lambda_S (T_\text{к} - T_\text{п})}{\sqrt{\pi} a_S q \rho}, \tag{44}$$

которое совпадает с полученными ранее результатами [2].

ВЫВОДЫ

Развитый в данной работе подход к нахождению неизвестной нормальной скорости v_n движения МГ позволяет свести указанную проблему к решению соответствующего интегрального уравнения, не прибегая к предварительному нахождению температурного поля. Для получения этого интегрального уравнения достаточно выбрать функцию $f(M, t-\eta)$, удовлетворяющую условиям (8), (9), т. е. взять решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее нулевым начальным условиям и нулевым граничным условиям на неподвижной границе области теплопереноса, что существенно упрощает процедуру нахождения закона движения МГ. Показано, что предложенный метод является достаточно эффективным в случае, когда теплоперенос происходит в одной фазе.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

a – коэффициент температуропроводности м^2/с; c – удельная теплоемкость, Дж/кг·К; q – удельная теплота кристаллизации, Дж/кг; t – время, с; T – температура, К; V – объем, м^3; α – коэффициент теплоотдачи от жидкой фазы к твердой, Вт/м^2·К; λ_S, λ_L – коэффициент теплопроводности соответственно в твердой и жидкой фазах, Вт/м·К; ρ – плотность твердой фазы, кг/м^3.

Индексы:

0 – неподвижная граница; S – параметры твердой фазы; L – параметры жидкой фазы; N – нормальная составляющая; к – характеристика точки кристаллизации; п – характеристика подложки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Любов Б. Я. Кинетическая теория фазовых превращений. – М.: Металлургия, 1969. – 264 с.

2. Любов Б. Я. Теория кристаллизации в больших объемах. – М.: Наука, 1975. – 256 с.

3. Стальной слиток / Ю. А. Самойлович, В. И. Тимошпольский, И. А. Трусова, В. В. Филиппов – Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Под ред. В. И. Тимошпольского, Ю. А. Самойлова. – Мн.: Беларуская навука, 2000. – 637 с.

4. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

5. Гринберг Г. А., Чекмарева О. М. О движении поверхности раздела в задачах стефановского типа // ЖТФ. – 1970. – № 10. – Т. 40. – С. 2025–2031.

6. Карташов Э. М. Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущейся границей // ИФЖ. – 1987. – № 3. – Т. 52. – С. 494–505.

7. Шевелев В. В. Аналитический расчет времени лимитируемого диффузией растворения сферических частиц второй фазы // Металлы. – 1988. – № 6. – С. 57–60.

Поступила 1.07.2002