МЕТАЛЛУРГИЯ

In this work for the first time analytical solution of radiation-convectional heating of basic geometry bodies at counter flow heat exchange was developed.

*Ю. С. ПОСТОЛЬНИК, Днепродзержинский государственный технический университет,
В. И. ТИМОШПОЛЬСКИЙ, БГПА, В. В. ФИЛИППОВ, В. А. ТИЩЕНКО, РУП "БМЗ",
И. А. ТРУСОВА, С. М. КОЗЛОВ, П. Э. РАТНИКОВ, БГПА*

УДК 669.046:536.12:518.61

НАГРЕВ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОТОЧНОГО РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Исследованию процессов нагрева различных материалов в условиях противотока посвящено много работ (например, [1—3]). Однако во всех этих работах рассматривается исключительно конвективный теплообмен (ТО). Поэтому имеющиеся решения и разработанные на их основе методики расчета, будучи более-менее приемлемыми для фильтрационных процессов, в большинстве случаев приведут к существенным погрешностям при расчетах противоточного (ПТ) нагрева металла в проходных или методических печах, где ТО является или чисто радиационным, или смешанным радиационно-конвективным. На важность этой проблемы указывалось еще в середине прошедшего столетия [4], тем не менее до сих пор общее аналитическое решение соответствующей краевой задачи ПТТО в условиях радиационно-конвективного печного пространства еще отсутствует.

Длительное время единственной работой, посвященной аналитическому исследованию противоточного радиационного нагрева массивного слитка, была [5]. Однако она имеет ряд недостатков, наиболее существенными из которых являются: форма тела ограничена пластиной; ТО чисто радиационный; теплофизические характеристики (ТФХ) неизменные; решение не может считаться аналитическим, так как было реализовано на гидростатическом интеграторе.

Таким образом, в работах [4, 5] аргументировано показана как актуальность проблемы, так и необходимость общего аналитического решения краевой задачи теплопроводности тел базовой геометрии в условиях лучисто-конвективного ПТТО с учетом нелинейностей I (функциональная зависимость ТФХ материала) и II (наличие радиации) рода.

Ранее было установлено [6], что наиболее существенное влияние оказывает переменность коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$. В таком случае при тепловых расчетах обычно принимают (см. [7, 8]) функцию $\lambda(T)$ линейной, а остальные ТФХ постоянными, т.е.

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \delta_\lambda T, \quad c = c(T') = \text{const}. \tag{1}$$

Рассмотрим следующую задачу симметричного нагрева массивных тел плоской (m=0), цилиндрической (m=1) и сферической (m=2) форм в условиях сложного ПТТО:

$$\frac{\xi^m (1+\varepsilon_\lambda \theta)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}}{\xi^m \partial\xi} = \frac{\partial\theta}{\partial\tau}, \tag{2}$$

$$(1+\varepsilon_\lambda \theta_п(\tau))\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = \mathrm{Sk}\left[\left(\theta_г^4(\tau) - \theta_п^4(\tau)\right) + \zeta\left(\theta_г(\tau) - \theta_п(\tau)\right)\right], \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta_г}{d\tau} = \mathrm{Sk}\left[\left(\theta_г^4(\tau) - \theta_п^4(\tau)\right) + r\left(\theta_г(\tau) - \theta_п(\tau)\right)\right] n_m, \tag{5}$$

$$\theta(\xi,0)=\theta_0=\theta'=\text{const},\quad \theta_\Gamma(0)=\theta_\Gamma''=1, \tag{6}$$

где введены безразмерные величины

$$\theta(\xi,\tau)=\frac{T(\xi,\tau)}{T_\Gamma''},\quad \xi=\frac{r}{R},\quad \tau=\frac{at}{R^2},\quad \varepsilon_\lambda=\frac{\delta_\lambda T_\Gamma''}{\lambda_0},$$

$$\mathrm{Sk}=\frac{\sigma_{\text{в}}T_\Gamma''^3R}{\lambda_0},\quad \mathrm{Bi}=\frac{\alpha R}{\lambda_0},\quad \zeta=\frac{\mathrm{Bi}}{\mathrm{Sk}},\quad n=\frac{Vc}{V_\Gamma c_\Gamma},\quad n_m=(1+m)n. \tag{7}$$

Здесь T, T_Γ — абсолютные температуры тела и газа, К; r — отсчитываемая от центра координата точки тела, м; $2R$ — толщина пластины или диаметр цилиндра, шара, м; t — время, ч; λ_0 — условное значение коэффициента теплопроводности, соответствующее температуре T=0, Вт/(м $\cdot$ К); V=FR/(1+m) — объем тела, м^3; F — тепловоспринимающая поверхность тела, м^2; V_Γ — объем газа, м^3; n — отношение водяных чисел; T', T_Γ' и T'', T_Γ'' — температуры тела и газа соответственно на входе и выходе.

В качестве метода решения поставленной нелинейной задачи (2)—(6) примем известную схему термического слоя [9], а для реализации процесса решения возьмем метод эквивалентных источников (МЭИ), хорошо проявивший себя в решении различных линейных и нелинейных задач теплопроводности [6, 9], в том числе и противоточных [11, 12].

На первом (инерционном) этапе ($0\le\tau\le\tau_0$; $\beta(\tau)\le\xi\le 1$) воспользуемся готовым решением МЭИ [6, 10] задачи (2)—(4):

$$\theta_1(\xi,\tau)=\theta'+\Delta\theta_1(\tau)\frac{(\xi-\beta(\tau))^2}{l^2(\tau)}, \tag{8}$$

где $\Delta\theta_1(\tau)=\theta_{1\text{п}}(\tau)-\theta'$ — температурный перепад по толщине $l(\tau)$=1—$\beta(\tau)$ прогретого (термического) слоя.

Ввиду сравнительной быстротечности протекания инерционного этапа для тел умеренной массивности примем функцию $l(\tau)$, удовлетворяющую известному "закону квадратичного корня" [6]:

$$l(\tau)=\sqrt{6(1+m)(1+\varepsilon_\lambda\theta')\tau}. \tag{9}$$

Тогда температурный перепад $\Delta\theta_1(\tau)$ определим по уравнению аналогично [12]

$$\frac{d(\Delta\theta_1 l(\tau))}{d\tau}=\frac{6(1+m)(1+\varepsilon_\lambda\theta')\Delta\theta_1(\tau)}{l(\tau)}, \tag{10}$$

что с учетом (9) дает решение

$$\Delta\theta_1(\tau)=\frac{\tau}{l(\tau)}=\sqrt{\frac{\tau}{6(1+m)(1+\varepsilon_\lambda\theta')}}. \tag{11}$$

Подставляя производную функцию $\theta_1(\xi,\tau)$ (8) по координате ξ в граничное условие (3), а затем в условие теплового баланса (5), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\theta_{1\Gamma}(\tau)}{d\tau}=\frac{2n_m(1+\varepsilon_\lambda\theta_{1\text{п}}(\tau))\Delta\theta_1(\tau)}{l(\tau)}. \tag{12}$$

Учитывая функции $l(\tau)$ из (9) и $\Delta\theta_1(\tau)$ из (11), получаем решение уравнения (12):

$$\theta\ (\tau)=1+\frac{n\tau}{3}\left[1+\frac{\varepsilon_\lambda l(\tau)}{9(1+m)(1+\varepsilon)}\right]. \tag{13}$$

На втором (упорядоченном) этапе ($\tau_0\le\tau\le\tau_*$, $0\le\xi\le 1$) разрешающее уравнение МЭИ примем в виде

$$\frac{\partial\left[\xi^m(1+\varepsilon_\lambda\theta_2)\dfrac{\partial\theta_2}{\partial\xi}\right]}{\xi^m\partial\xi}=f_2(\tau), \tag{14}$$

где "эквивалентный источник" $f_2(\tau)$ будем определять интегральным условием:

$$f_2(\tau)=\frac{(1+m)d\left[\int\limits_0^1\theta_2(\xi,\tau)\xi^m d\xi\right]}{d\tau}. \tag{15}$$

Интегрируя уравнение (14) дважды по ξ и используя граничные условия (3), (4), имеем

$$f_2(\tau)=(1+m)\mathrm{Sk}\{[\theta_{2г}^4(\tau)-\theta_{2п}^4(\tau)]+\zeta[\theta_{2г}(\tau)-\theta_{2п}(\tau)]\}, \tag{16}$$

$$\theta_2(\xi,\tau)=\frac{1}{\varepsilon_\lambda}\left\{\sqrt{[1+\varepsilon_\lambda\theta_{2п}(\tau)]^2-\varepsilon_\lambda \mathrm{Sk}\left\{\left[\theta_{2г}^4(\tau)-\theta_{2п}^4(\tau)\right]+\zeta\left[\theta_{2г}(\tau)-\theta_{2п}(\tau)\right]\right\}\left(1-\xi^2\right)}-1\right\}. \tag{17}$$

Для использования интегрального условия (15) заменим радикал в (17) двумя членами его степенного ряда. Последующее интегрирование несколько снизит погрешность от этого упрощения

$$\theta_2(\xi,\tau)=\theta_{2п}(\tau)-\Delta\theta_2(\tau)\left(1-\xi^2\right), \tag{18}$$

где

$$\Delta\theta_2(\tau)=\theta_{2п}(\tau)-\theta_{2ц}(\tau)=\mathrm{Sk}\frac{[\theta_{2г}^4(\tau)-\theta_{2п}^4(\tau)]+\zeta[\theta_{2г}(\tau)-\theta_{2п}(\tau)]}{2[1+\varepsilon_\lambda\theta_{2п}(\tau)]}. \tag{19}$$

С другой стороны, сопоставляя выражения (16) и (5), видим, что $f_2(\tau)=\dot\theta_{2г}(\tau)/n$, тогда условие (15) превращается в дифференциальное уравнение

$$d\theta_{2г}/d\tau=\dot\theta_г(\tau)=n_m d\left\{\int_0^1\left[\theta_{2п}(\tau)-\Delta\theta_2(\tau)\left(1-\xi^2\right)\right]\xi^m d\xi\right\}, \tag{20}$$

интегрирование которого устанавливает связь между температурами газа и тела

$$\theta_{2г}(\tau)=\left[\frac{\theta_{2п}(\tau)-2\Delta\theta_2(\tau)}{3+m}-D\right]n. \tag{21}$$

Используя в качестве начальных условий решения (11), (13) задачи на первом этапе при $\tau=\tau_0$ и $l(\tau_0)=1$, находим

$$D=\theta'-\frac{1}{n}+\frac{2\left[\frac{m}{3+m}+2\varepsilon_\lambda\Delta\theta_{10}^2\right]\Delta\theta_{10}}{3}. \tag{22}$$

Следует заметить, что среднемассовая температура тела при $\theta_2(\xi,\ \tau)$ (18) равна

$$\bar\theta_2=(1+m)\int_0^1\xi^m\theta_2(\xi,\tau)d\xi=\theta_{2п}(\tau)-\frac{2}{3+m}\Delta\theta_2(\tau). \tag{23}$$

Тогда выражение (21) принимает вид

$$\theta_{2г}(\tau)=[\bar\theta_2(\tau)-D]n. \tag{24}$$

Из условия (5) имеем

$$\theta_{2п}(\tau)=\theta_{2г}(\tau)\sqrt{1-\frac{\dot\theta_{2г}(\tau)/\theta_{2г}^4(\tau)}{n_m\mathrm{Sk}\left[1+\zeta\frac{\theta_{2г}(\tau)-\theta_{2п}(\tau)}{\theta_{2г}^4(\tau)-\theta_{2п}^4(\tau)}\right]}}. \tag{25}$$

Следуя работам [6, 10], положим

$$k_1=1+\zeta\frac{\theta_{2г}(\tau)-\theta_{2п}(\tau)}{\theta_{2г}^4(\tau)-\theta_{2п}^4(\tau)}\approx1+\zeta\frac{0{,}275+0{,}058m}{\mathrm{Sk}}. \tag{26}$$

Такое упрощение после замены радикала (25) двумя членами разложения в ряд дает

$$\theta_{2п}(\tau)=\frac{\theta_{2г}(\tau)-\dot\theta_{2г}(\tau)}{4n_m\mathrm{Sk}\,k_1\,\theta_{2г}^3(\tau)}. \tag{27}$$

Формулы (19) и (21) с учетом (26) позволили исключить из выражения (27) все функции температуры поверхности и получить дифференциальное уравнение относительно температуры газа

$$\frac{(3+m)[1+\varepsilon_\lambda\theta_{2г}(\tau)]+4k_1\,\mathrm{Sk}\,\theta_{2г}^3(\tau)}{[1+\varepsilon_\lambda\theta_{2г}(\tau)][1-k_2\theta_{2г}(\tau)]}d\theta_{2г}=4(1+m)(3+m)\,k_1\,\theta_с\,\mathrm{Sk}\,d\tau, \tag{28}$$

где $k_2=(1-n)/\theta_с$; $\theta_с=-nD$.

Интегрируя уравнение (28) методом разложения левой части на простые дроби, получаем трансцендентное выражение

$$\Phi_{\text{г}}(\tau)-\Phi_{\text{г}}^{0}=4(1+m)\frac{\theta_{\text{c}}k_1}{k_2^2}\mathrm{Sk}(\tau-\tau_0), \tag{29}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{\text{г}}(\tau)=\ln\theta_{2\text{г}}(\tau)-p\ln[1-k_2\theta_{2\text{г}}(\tau)]+(p-1)\ln[1+\varepsilon_\lambda\theta_{2\text{г}}(\tau)]-\frac{1+2k_2\theta_{2\text{г}}(\tau)}{2k_2^2\theta_{2\text{г}}^2(\tau)};\\
&p=1+\frac{4k_1\,\mathrm{Sk}}{(3+m)(k_2+\varepsilon_\lambda)k_2^2},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

по которому и определим температуру $\theta_{2\text{г}}(\tau)$ газа.

Зная температуру газа, температуру поверхности находим из решения алгебраического уравнения

$$\theta_{2\text{п}}^4(\tau)+a_{2\text{п}}\theta_{2\text{п}}^2(\tau)+a_{1\text{п}}(\tau)\theta_{2\text{п}}(\tau)=a_{0\text{п}}(\tau), \tag{31}$$

которое получается из выражения (21) с учетом (19). При этом

$$\begin{gathered}
a_{2\text{п}}=\varepsilon_\lambda(h+\zeta),\quad a_{1\text{п}}(\tau)=(h+\zeta)\left[1+\frac{\varepsilon_\lambda(\theta_{\text{c}}-\theta_{2\text{г}}(\tau))}{n}\right],\quad h=\frac{3+m}{\mathrm{Sk}},\\
a_{0\text{п}}(\tau)=\theta_{2\text{г}}^4(\tau)+h\left[\frac{1+n\zeta}{h}\theta_{2\text{г}}(\tau)-\theta_{\text{c}}\right].
\end{gathered} \tag{32}$$

Зная $\theta_{2\text{г}}(\tau)$ и $\theta_{2\text{п}}(\tau)$, по решению (17) при $\xi = 0$ вычисляем температуру $\theta_{2\text{ц}}(\tau)$ центра, по выражению (19) — температурный перепад $\Delta\theta(\tau)$, по выражению (23) — среднюю температуру $\overline{\theta}_2(\tau)$.

Время τ_* окончания нагрева определяется по решению (29), (30) в предположении, что $\theta_{2\text{п}}(\tau_*)=\theta_{2\text{п}}^*=\eta\theta_{2\text{г}}^*$, где η — наперед задаваемый показатель степени завершенности процесса нагрева.

Подставляя в уравнения (31), (32) $\theta_{2\text{п}}^*=\eta\theta_{2\text{г}}^*$, приходим к такому же алгебраическому уравнению как (31), но уже относительно $\theta_{2\text{г}}^*$. При этом новые коэффициенты имеют вид

$$a_{2\text{г}}=\varepsilon_\lambda\eta h_*,\quad a_{1\text{г}}=h_*\left(1+\frac{\zeta}{h_*}\frac{1-\eta}{1-\eta^*}-\frac{\varepsilon_\lambda\eta\theta_{\text{c}}}{1-m\eta}\right),\quad a_{0\text{г}}=\frac{h_*\theta_{\text{c}}}{1-m\eta}, \tag{33}$$

где $h_*=\dfrac{h(1-m\eta)}{n(1-\eta^4)}$.

После этого, зная $\theta_{2\text{г}}^*$, из выражения (29) определяем продолжительность нагрева:

$$\tau_*=\tau_0+\frac{k_2^2(\Phi_{\text{г}}^*-\Phi_{\text{г}}^0)}{4(1+m)k_1\,\mathrm{Sk}\,\theta_{\text{c}}}. \tag{34}$$

Поставленная задача полностью решена. Полагая $\varepsilon_\lambda=0$, получаем решение без учета термической чувствительности материала. Если положить $\zeta = 0$, придем к решению чисто радиационного нагрева.

Нами [12] был просчитан заимствованный из работы [5] числовой пример: $m = 0$, $\zeta = 0$, $\varepsilon_\lambda = 0$, $\mathrm{Sk} = 0{,}5$, $n = 0{,}5$, $\theta' = 0{,}5$, $\eta = 0{,}99$. Расчеты показали практически полное совпадение с данными [5] гидростатического интегратора.

Таким образом, получено обобщенное (для всех трех форм тел базовой геометрии) аналитическое решение нелинейной задачи противоточного лучисто-конвективного нагрева с учетом зависимости теплофизических свойств материала от температуры. При практическом использовании предлагаемое решение довольно просто программируется для машинного счета.

Литература

1. Гольдфарб Э. М. Теплотехника металлургических процессов. М.: Металлургия, 1967.
2. Бабушкин Н. М., Братчиков С. Г., Намятов Г. Н. и др. Охлаждение агломерата и окатышей. М.: Металлургия, 1975.
3. Китаев Б. И., Ярошенко Ю. Г., Суханов Е. Л. и др. Теплотехника доменного процесса. М.: Металлургия, 1978.
4. Кавадеров А. В. Тепловая работа пламенных печей. Свердловск: Металлургиздат, 1956.
5. Кавадеров А. В., Калугин В. Н. Закономерности нагрева массивного тела излучением в противотоке // Нагрев металла и работа нагревательных печей: Сб. науч. тр. ВНИИМТ. Свердловск: Металлургиздат, 1960, № 6. С.59—70.
6. Постольник Ю. С. Приближенные методы исследований в термомеханике. Киев—Донецк: Вища шк., 1984.
7. Бонилла Ч. Вопросы теплопередачи в ядерной технике. М.: Госатомиздат, 1961.
8. Лоренцини Э. Теплопроводность с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры // ИФЖ, 1973. Вып. 19. № 6. С. 1070—1078.
9. Лыков А. В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109—150.
10. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. Киев: НМЦ ВО МОНУ, 2000.
11. Постольник Ю. С. К расчету температур и времени нагрева массивных тел при противоточном теплообмене // Изв. вузов. Черная металлургия. 1990. № 6. С. 84—86.
12. Постольник Ю. С., Огурцов А. П., Тимошпольский В. И., Трусова И. А. Математическая модель радиационного нагрева массивных тел в теоретическом противотоке // Математичне моделювання. 2000. № 2(5). С. 87—91.