МЕТАЛЛУРГИЯ

The mathematical model of multidimensional regression analysis is presented. Its practical application for rolling production is examined. The algorithm of special characteristics determination is developed.

А. Н. ЧИЧКО, БНТУ, Л. А. ФЕКЛИСТОВА, В. И. ЩЕРБАКОВ, А. В. ВЕДЕНЕЕВ, РУП «БМЗ»

УДК 669.

ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ ТЕХНОЛОГИИ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ (ЧАСТЬ 1)

В первой части рассмотрен многомерный регрессионный анализ, проведенный по статистическим данным действующего технологического процесса прокатки. Во второй части будет проведена в основном проверка полученных данных по методу Стьюдента и Фишера, а также определена погрешность проведенных расчетов с целью определения адекватности полученного метода. Предложенный метод основан на знании конкретного процесса и требует дальнейшей проверки на других марках сталей. Эти исследования будут проведены в 2011 г. и по их результатам определен окончательный алгоритм расчетов и действий.

Известно, что свойства катанки формируются на этапах выплавки стали, получения литой заготовки и заготовки в процессе прокатки. На свойства катанки влияет множество факторов, например, химический состав стали, наличие дефектов после выплавки и в процессе получения литой заготовки, микроструктура перлита катанки после сорбитизации с проката, технология изготовления катанки. Присутствие многоступенчатости технологических переделов приводит к усложнению поиска причин ухудшения качества продукции при массовом производстве. Непрерывность технологического процесса не позволяет останавливать технологические агрегаты и линии для проведения исследований причин и поиска оптимальных технологических режимов. В таких ситуациях, как правило, используют различные методы статистического анализа. Проработка литературных данных показала, что для сложных технологических циклов отсутствуют готовые методы регрессионного анализа. А учитывая тот факт, что в условиях реального производства и в борьбе за рынки сбыта происходит постоянная смена сортамента выпускаемой продукции при прокатке, требуется всегда проводить статистический анализ технологических параметров и характеристик используемых материалов для улучшения качества продукции. В данной работе предлагается собственная схема проведения анализа с использованием специальных характеристик. *Специальные характеристики* – это характеристики продукции и процессов, назначенные потребителем, описывающие безопасность и правительственные нормы и/или назначенные поставщиком благодаря знаниям о продукции и процессе, требующие мониторинга и внесения в планы управления и другие технологические документы.

При определении влияния на зависимую переменную нескольких факторов можно использовать многофакторный дисперсионный анализ, с помощью которого можно определить степень зависимости между характеристиками и в результате последовательного анализа выбрать специальные характеристики. Главное преимущество этого метода в том, что он позволяет исследователю изучать взаимодействие факторов. Взаимодействия (interaction) имеют место, когда эффекты одного фактора на зависимую переменную зависят от уровня других факторов.

Цель проведения многомерного регрессионного анализа – исследование влияния химического состава стали на величину прочности, относительного сужения и относительного удлинения стали 65К, предназначенной для изготовления металлокорда; выбор специальных характеристик катанки, которые могут повлиять на безопасность или соответствие правительственным нормам, установку, функцию, работоспособность или последующую переработку продукции.

Задачей анализа является построение математической модели и выбор одного или нескольких оптимальных параметров из многих выходных параметров, при этом другие служат ограничениями, которые бы минимизировали сумму квадратов отклонений наблюдаемых точек от поверхности (регрессионная поверхность выражает наилучшее предсказанное значение зависимой переменной y для заданных значений независимых переменных x). Всегда полезно исследовать возможность уменьшения выходных параметров, так как невозможно построить математические модели, одновременно оптимизировав несколько функций [1, 2].

Анализ зависимости химического состава стали от величины прочности, относительного сужения и относительного удлинения проволоки из стали 65К, предназначенной для изготовления металлокорда по ЗТУ 840–03

Для многомерного регрессионного анализа воспользуемся моделью черного ящика (рис. 1).

Под моделью будем понимать вид функции отклика. При построении многомерных моделей наглядность представления теряется и приходится выражаться на языке алгебры. Модель должна быть адекватной, т. е. предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического больше чем на некоторую заданную величину. Выбранная линейная модель будет всегда адекватна по причине аналитичности функции отклика и всегда существует окрестность любой точки, в которой линейная модель адекватна. Математическая модель нужна для предсказания направления, в котором величина параметра оптимизации улучшается быстрее, чем в любом другом направлении. В исследуемом случае уже известен допуск на рассматриваемые характеристики и, следовательно, известна область факторного пространства. Эта модель имеет конечное число опытов, позволяющее получить выборочные оценки для коэффициентов уравнения [3–5]. Их точность и надежность зависят от свойств выборки и нуждаются в статистической проверке. Задачей здесь является вычисление значений коэффициентов модели.

В табл. 1 приведены химический состав и механические свойства стали по применяемой на РУП «БМЗ» марке стали для изготовления металлокорда и проволоки в соответствии с заводскими техническими условиями, в табл. 2 – статистические данные по механическим и химическим характеристикам катанки марки стали 65К для производства метизной продукции.

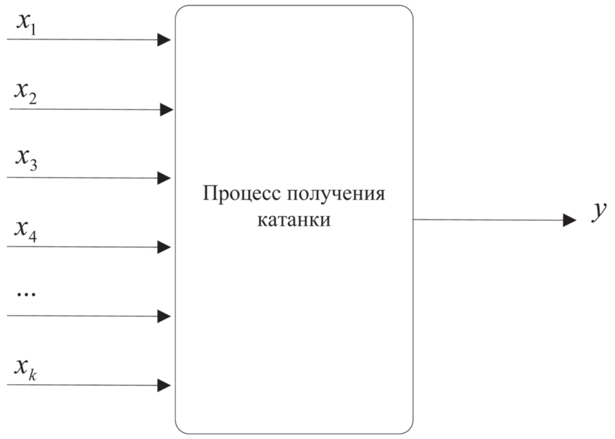

Рис. 1. Модель черного ящика для производства катанки в условиях РУП «БМЗ»

Таким образом, функция является линейной и система N линейных уравнений (алгебраических полиномов первой степени) и уравнение множественной регрессии (число независимых переменных ≥ 2) имеет следующий вид [6]:

$$y_i = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + \ldots + B_kx_k,$$

где $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$ – свободные коэффициенты; $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и y_i – переменные, представляющие собой два массива чисел. Применительно к исследуемым характеристикам переменные $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – это процентное содержание химических элементов в стали, а y_1, y_2, y_3 – соответственно значение временного сопротивления разрыву (σ_b), относительного сужения (ψ) и относительного удлинения (δ). Тогда система линейных уравнений примет вид

$$\begin{cases} y_1 = B_{10} + B_{11}x_{11} + B_{12}x_{12} + \ldots + B_{19}x_{19}, \\ y_2 = B_{20} + B_{21}x_{21} + B_{22}x_{22} + \ldots + B_{29}x_{29}, \\ y_3 = B_{30} + B_{31}x_{31} + B_{32}x_{32} + \ldots + B_{39}x_{39}. \end{cases}$$

На рис. 2 показан алгоритм построения модели множественной регрессии. Используя этот алгоритм, рассмотрим пошагово его практическое применение на примере прокатного производства.

Таблица 1. **Химический состав и механические свойства стали по ЗТУ 840–03- 2006**

Марка стали	Массовая доля элементов, %									
	C	Mn	Si	P	S	Cr	Ni	Cu	Al	N_2
			не более							
65К	0,67–0,71	0,45–0,55	0,30	0,015	0,015	0,06	0,06	0,07	0,004	0,007
Требования по механическим свойствам стали										
$\sigma = 910 - 1090$ Н/мм^2			ψ, не менее 38%				δ, не менее 12%			

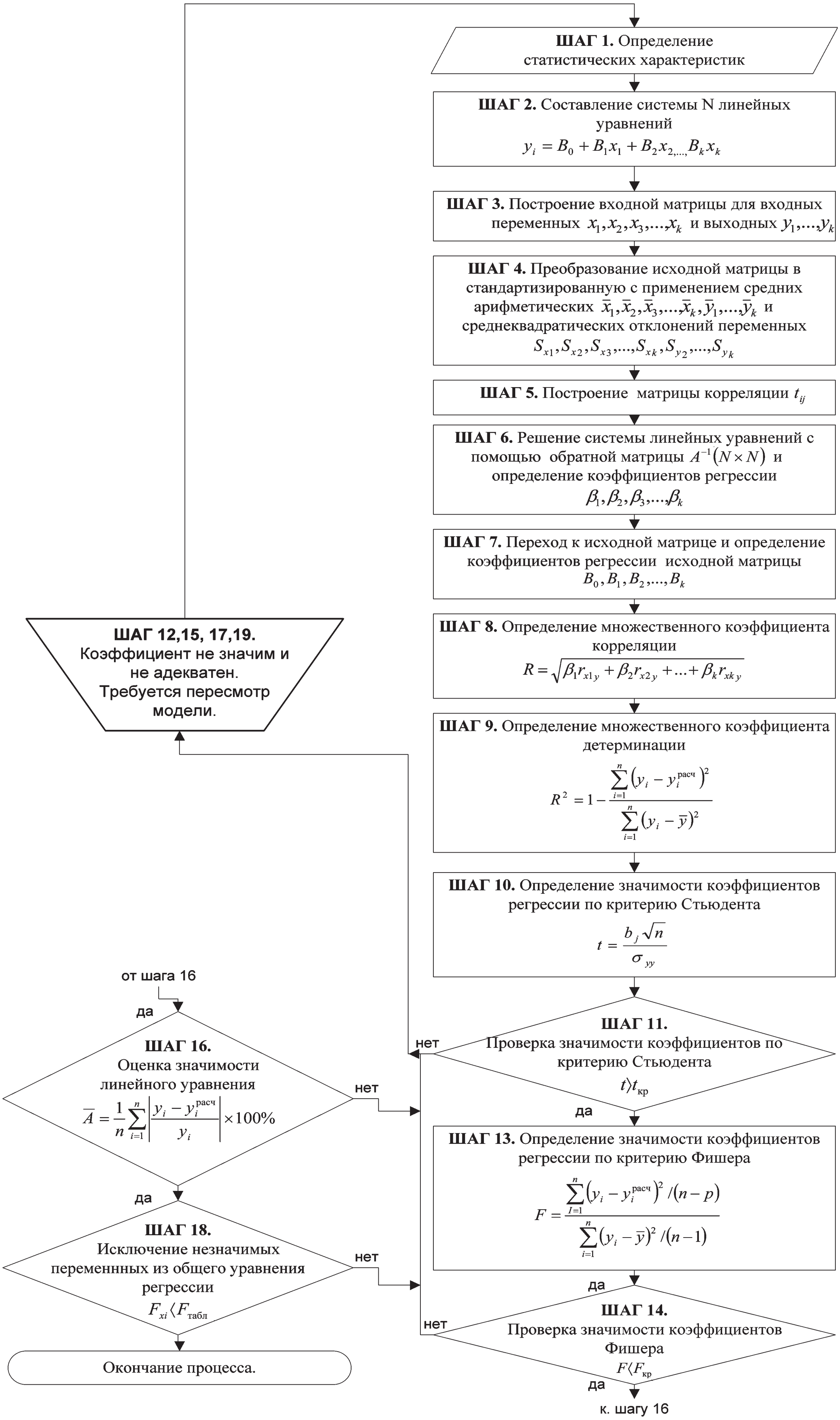

Рис. 2. Алгоритм определения специальных характеристик с помощью математической модели

Шаг 1. Построим входную расширенную матрицу для входных переменных (x_1, x_2, x_3, ..., x_9) и одной выходной (y) для n = 89 наблюдений. Для данного исследования матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & y_9 \end{bmatrix}.$$

По исходным данным табл. 2 проведем вычисления средних значений и дисперсии для всех переменных.

Шаг 2. Преобразуем исходную матрицу к стандартизированному виду, используя средние арифметические $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, ..., \overline{x}_9, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3$ и среднеквадратические отклонения переменных S_{x1}, S_{x2}, S_{x3}, ..., S_{x9}, S_{y1}, S_{y2}, S_{y3} (табл. 3) по следующей формуле [6–8]:

$$t_{11} = \frac{x_{11} - \overline{x}_1}{S_{x1}} \dots t_{91} = \frac{x_{91} - \overline{x}_1}{S_{x1}},$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$t_{19} = \frac{x_{19} - \overline{x}_9}{S_{x9}} \dots t_{99} = \frac{x_{99} - \overline{x}_9}{S_{x9}}.$$

Полученная матрица будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} & t_{17} & t_{18} & t_{19} & t_{20} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} & t_{27} & t_{28} & t_{29} & t_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{91} & t_{92} & t_{93} & t_{94} & t_{95} & t_{96} & t_{97} & t_{98} & t_{99} & t_{100} \end{bmatrix}.$$

В новых переменных уравнение имеет следующий вид:

$$t = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \dots + \beta_k t_k.$$

Здесь в качестве переменной y применяется переменная t, а переменных x_1, x_2, ..., x_k – переменные t_1, t_2, ..., t_k.

Шаг 3. Представим эту систему линейных уравнений в матричном виде. Вычислим частные коэффициенты корреляции между переменными x_i и x_j для новой стандартизированной матрицы t_{ij} (табл. 4).

Составим систему линейных уравнений, введя новые переменные β_1, β_2, β_3, ..., β_9, являющиеся неизвестными.

Применительно к рассматриваемому случаю уравнение имеет следующий вид:

Т а б л и ц а 2. **Исходная матрица для исследуемых характеристик катанки диаметром 5,5 мм из стали марки 65К**

№п/п	Значения переменных											
	x_1(C)	x_2(Si)	x_3(Mn)	x_4(P)	x_5(S)	x_6(Cr)	x_7(Ni)	x_8(Cu)	x_9(N_2)	y_1(σ_b)	y_2(ψ)	y_3(δ)
1	0,682	0,1979	0,495	0,00483	0,0112	0,02673	0,02898	0,04798	0,0053	970	47,0	15,5
2	0,6878	0,2144	0,502	0,00394	0,00996	0,02572	0,0266	0,05044	0,0053	980	49,0	18,0
3	0,6845	0,2123	0,5179	0,00498	0,01103	0,02813	0,02888	0,05188	0,00495	990	47,0	16,0
4	0,6923	0,2046	0,50105	0,00548	0,01253	0,02663	0,0289	0,04448	0,0053	970	44,0	15,5
5	0,677	0,1989	0,5078	0,0061	0,0129	0,0216	0,0241	0,043	0,0053	980	52,0	17,5
6	0,678	0,205	0,5098	0,0064	0,0093	0,0367	0,027	0,0395	0,0053	960	44,0	17,0
7	0,679	0,2033	0,51277	0,00603	0,00983	0,03823	0,03123	0,04547	0,00557	950	46,0	17,5
8	0,687	0,2041	0,5051	0,0067	0,0133	0,0368	0,0287	0,0471	0,0057	980	45,0	16,0
9	0,6730	0,1941	0,4718	0,0040	0,0113	0,0265	0,0326	0,0501	0,0053	960	51,0	18,0
10	0,6900	0,1992	0,4830	0,0038	0,0122	0,0355	0,0349	0,0484	0,0055	990	48,0	18,5
11	0,6820	0,1975	0,4869	0,0038	0,0115	0,0265	0,0319	0,0480	0,0047	960	48,0	19,0
12	0,6820	0,2057	0,4899	0,0035	0,0110	0,0328	0,0297	0,0471	0,0059	980	48,0	18,5
13	0,6720	0,2029	0,4894	0,0035	0,0114	0,0328	0,0299	0,0471	0,0059	950	48,0	17,5
14	0,6960	0,2021	0,4878	0,0037	0,0105	0,0351	0,0313	0,0474	0,0050	980	49,0	18,5
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
86	0,6880	0,2234	0,4949	0,0064	0,0096	0,0328	0,0314	0,0475	0,0047	970	46,0	15,5
87	0,6850	0,1955	0,5347	0,0053	0,0134	0,0328	0,0306	0,0537	0,0059	980	49,0	16,0
88	0,6840	0,1964	0,5378	0,0058	0,0133	0,0305	0,0321	0,0459	0,0059	1010	49,0	16,0
89	0,6700	0,1848	0,5494	0,0064	0,0103	0,0197	0,0281	0,0370	0,0050	940	50,0	15,5
Средние значения ($\overline{x}$)	0,68417	0,20673	0,5027676	0,005407	0,011142	0,027526	0,028561	0,046072	0,005341	991,4606	0,684177	0,20673
Среднеквадратическое отклонение (s)	0,00775	0,01219	0,0198072	0,001339	0,001811	0,005436	0,003209	0,007280	0,000572	26,04849	0,007755	0,01219
Сумма $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$	60,8918	18,3993	44,74632	0,48126	0,99165	2,44984	2,54199	4,10045	0,47539	88240	60,8918	18,3993

Т а б л и ц а 3. **Стандартизированная матрица** t_{ij}

№ п.п	Значения переменных											
	t_i(C)	t_i (Si)	t_i (Mn)	t_i (P)	t_i (S)	t_i (Cr)	t_i (Ni)	t_i (Cu)	t_i (N_2)	t_j (σ_b)	t_j(ψ)	t_j(δ)
1	–0,2807718	–0,7245985	–0,3921613	–0,4309911	0,0319405	–0,1464777	0,1303363	0,2620227	–0,0723918	–0,8238739	–0,4540516	–0,7774914
2	0,4670838	0,6288395	–0,0387555	–1,0952995	–0,6525165	–0,3322668	–0,6112119	0,5999343	–0,0723918	–0,4399746	0,2806864	0,8700499
3	0,0415797	0,4565837	0,7639805	–0,3190290	–0,0618963	0,1110519	0,0991788	0,7977363	–0,6835045	–0,0560752	–0,4540516	–0,4479831
4	1,0473166	–0,1750207	–0,0867177	0,0541779	0,7660758	–0,1648726	0,1054103	–0,2187458	–0,0723918	–0,8238739	–1,5561588	–0,7774914
5	–0,9254750	–0,6425720	0,2540664	0,5169545	0,9703089	–1,0901395	–1,3901491	–0,4220423	–0,0723918	–0,4399746	1,3827936	0,5405416
6	–0,7965343	–0,1422101	0,3550395	0,7408787	–1,0168242	1,6875005	–0,4865820	–0,9028108	–0,0723918	–1,2077733	–1,5561588	0,2110333
7	–0,6675937	–0,2816552	0,5049845	0,4647056	–0,7242741	1,9689435	0,8313798	–0,0827570	0,3990379	–1,5916726	–0,8214206	0,5405416
8	0,3639313	–0,2160340	0,1177528	0,9648029	1,1911015	1,7058955	0,0430954	0,1411438	0,6260226	–0,4399746	–1,1887897	–0,4479831
9	–1,4412375	–1,0362994	–1,5634491	–1,0505147	0,0871386	–0,1887861	1,2582374	0,5532311	–0,0723918	–1,2077733	1,0154245	0,8700499
10	0,7507532	–0,6179640	–0,9979998	–1,1997975	0,5839219	1,4667609	1,9748597	0,3197149	0,2768154	–0,0560752	–0,0866825	1,1995582
11	–0,2807718	–0,7574091	–0,8011023	–1,1997975	0,1975349	–0,1887861	1,0401350	0,2647700	–1,1200135	–1,2077733	–0,0866825	1,5290665
12	–0,2807718	–0,0847915	–0,6496427	–1,4237216	–0,0784558	0,9700968	0,3546702	0,1411438	0,9752298	–0,4399746	–0,0866825	1,1995582
13	–1,5701781	–0,3144658	–0,6748859	–1,4237216	0,1423368	0,9700968	0,4169852	0,1411438	0,9752298	–1,5916726	–0,0866825	0,5405416
14	1,5243969	–0,3800870	–0,7556644	–1,2744389	–0,3544465	1,3931810	0,8531901	0,1823525	–0,5962027	–0,4399746	0,2806864	1,1995582
15	–0,5386531	–1,6268905	–1,1090702	0,3676718	–0,1336539	–0,8326099	–0,7046844	–0,5868772	1,3244371	1,8634216	–3,0256350	–0,4479831
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
83	1,1375750	–0,1914260	–1,1545081	2,4576307	–0,3544465	–1,0901395	–0,2996370	–1,1225907	0,6260226	0,3278242	–1,1887897	–1,1069997
84	–0,5386531	0,0792616	–0,3012855	1,2633684	–1,0168242	–1,5132237	–0,6112119	–0,2984161	–0,0723918	2,2473210	0,2806864	–0,7774914
85	–1,0544156	1,0061616	–0,0892421	1,5619340	–0,9616261	–1,4948287	–0,3307945	–0,9028108	0,2768154	0,7117235	–1,1887897	–1,1069997
86	0,4928719	1,3670784	–0,3972100	0,7408787	–0,8512298	0,9700968	0,8843476	0,1960887	–1,1200135	–0,8238739	–0,8214206	–0,7774914
87	0,1060500	–0,9214622	1,6121544	–0,0801766	1,2462997	0,9700968	0,6350877	1,0477359	0,9752298	–0,4399746	0,2806864	–0,4479831
88	–0,0228906	–0,8476383	1,7686627	0,2930304	1,1911015	0,5470126	1,1024500	–0,0236912	0,9752298	0,7117235	0,2806864	–0,4479831
89	–1,8280593	–1,7991463	2,3543066	0,7408787	–0,4648428	–1,4396438	–0,1438496	–1,2462169	–0,5962027	–1,9755720	0,6480555	–0,7774914

Т а б л и ц а 4. **Матрица корреляции для стандартизированной матрицы t_{ij}**

r	Значения коэффициентов корреляции											
	r_{xixj}(C)	r_{xixj} (Si)	r_{xixj} (Mn)	r_{xixj} (P)	r_{xixj} (S)	r_{xixj} (Cr)	r_{xixj} (Ni)	r_{xixj} (Cu)	r_{xixj} (N_2)	r_{xixj} (σ_b)	r_{xixj} (ψ)	r_{xixj} (δ)
x_1	1	0,21808823	0,08849629	–0,0905135	0,07637028	–0,0870567	0,00526168	–0,1207405	–0,0637799	–0,0529359	–0,1848610	–0,0657490
x_2	0,21808823	1	–0,0701401	0,04526514	0,29436751	–0,2487202	–0,1216076	0,04946099	0,07434263	0,18971320	0,03273380	–0,2095558
x_3	0,08849629	–0,0701401	1	–0,1275236	0,01915328	0,23394851	–0,0309083	0,03718370	0,02872161	–0,2974568	–0,0998303	–0,1416919
x_4	–0,0905135	0,04526514	–0,1275236	1	0,20316276	0,03591094	0,22139016	–0,0817133	0,04920917	0,26578481	–0,0233879	–0,0183268
x_5	0,07637028	0,29436751	0,01915328	0,20316276	1	–0,1164692	0,13321099	0,06792275	0,14658344	0,12307906	0,01766306	0,02666579
x_6	–0,0870567	–0,2487202	0,23394851	0,03591094	–0,1164692	1	0,44012821	0,16307263	0,11316065	–0,1136324	–0,0735458	0,15334291
x_7	0,00526168	–0,1216076	–0,0309083	0,22139016	0,13321099	0,44012821	1	0,52318285	0,03690367	–0,0672579	–0,02317276	0,05103699
x_8	–0,1207405	0,04946099	0,03718370	–0,0817133	0,06792275	0,16307263	0,52318285	1	0,01203145	–0,0629696	–0,0653732	–0,2547838
x_9	–0,0637799	0,07434263	0,02872161	0,04920917	0,14658344	0,11316065	0,03690367	0,01203145	1	0,02880022	–0,0771234	0,06860365

Т а б л и ц а 5. **Обратная матрица A^{-1}(9×9)**

Значения оцениваемых характеристик (k)									Коэффициенты регрессии стандартизированной системы линейных уравнений			Коэффициенты регрессии исходной системы линейных уравнений			
x_1(C)	x_2(Si)	x_3(Mn)	x_4(P)	x_5(S)	x_6(Cr)	x_7(Ni)	x_8(Cu)	x_9(N_2)	β_σ	β_ψ	β_δ	B_σ	B_ψ	B_δ	B_0
1,15238	–0,29396	–0,15302	0,18708	–0,01369	0,13098	–0,31267	0,31678	0,08545	–0,0346	–0,2417	–0,0670	–116,06	–84,8257	–13,108	–
–0,2939	1,26457	0,09394	–0,09503	–0,32248	0,15587	0,29653	–0,26688	–0,08888	0,1392	0,0889	–0,1649	297,342	19,8386	–20,525	–
–0,1530	0,09394	1,13579	0,09374	–0,12820	–0,37458	0,27846	–0,13357	–0,00147	–0,2706	–0,0565	–0,1850	–355,84	–7,7700	–14,171	–
0,18708	–0,09503	0,09374	1,20395	–0,18832	0,05189	–0,46796	0,37144	–0,00841	0,2429	–0,0951	–0,1439	4723,52	–193,3106	–162,97	–
–0,0136	–0,32248	–0,12820	–0,18832	1,22189	0,23235	–0,27571	0,02896	–0,15953	0,0637	0,0305	0,1259	916,471	45,7825	105,461	–
0,13098	0,15587	–0,37458	0,05189	0,23235	1,49734	–0,78104	0,17701	–0,17183	0,0427	–0,0692	0,1499	204,781	–34,6350	41,8410	–
–0,3126	0,29653	0,27846	–0,46796	–0,27571	–0,78104	2,07311	–1,03999	0,03785	–0,1524	0,1203	0,1738	–1237,1	101,9911	82,1674	–
0,31678	–0,26688	–0,13357	0,37144	0,02896	0,17701	–1,03999	1,59979	0,02046	0,0243	–0,1572	–0,3841	86,9553	–58,7854	–80,068	–
0,08545	–0,08888	–0,00147	–0,00841	–0,15953	–0,17183	0,03785	0,02046	1,05370	0,0032	–0,0920	0,0518	146,489	–437,3666	137,169	–
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1177,46	–	–	$B_{0(\sigma)}$
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	109,6971	–	$B_{0(\psi)}$
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	36,1809	$B_{0(\delta)}$

$$\begin{cases} r_{x1y} = r_{x1x1}\beta_1 + r_{x1x2}\beta_2 + r_{x1x3}\beta_3 + ... + r_{x1x9}\beta_9, \\ r_{x2y} = r_{x2x1}\beta_1 + r_{x2x2}\beta_2 + r_{x2x3}\beta_3 + ... + r_{x2x9}\beta_9, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{x9y} = r_{x9x1}\beta_1 + r_{x9x2}\beta_2 + r_{x9x3}\beta_3 + ... + r_{x9x9}\beta_9. \end{cases}$$

В качестве основной формулы для расчета коэффициента корреляции r_{xy} для двух переменных x и y используют формулу [1]:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}},$$

где $\overline{x}, \overline{y}$ – средние значения переменных x_i и y_i соответственно.

Линейный коэффициент корреляции находится в пределах $-1 \le r_{xy} \le 1$. Система уравнений формируется из матрицы корреляции (табл. 5):

$$\begin{bmatrix} r_{x1x1} & r_{x1x2} & r_{x1x3} & ...r_{x1x9} & r_{x1y} \\ r_{x2x1} & r_{x2x2} & r_{x2x3} & ...r_{x2x9} & r_{x2y} \\ ... & ... & ... & ...\ ... & ... \\ r_{x9x1} & r_{x9x2} & r_{x9x3} & ...r_{x9x9} & r_{x9y} \end{bmatrix}.$$

Шаг 4. Решим систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы [9,10].

В результате получены значения коэффициентов стандартизированного уравнения $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_9$ (табл. 5) путем перемножения массивов обратной матрицы и коэффициентов корреляции.

Шаг 5. Далее решая систему, определяем регрессионные коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3, ..., \beta_9$, по которым осуществляется переход к исходным коэффициентам модели $B_0, B_1, B_2, ..., B_9$ (табл. 5). При этом используются формулы [6]:

$$B_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x1}}, ..., B_9 = \beta_9 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x9}},\ B_0 = \overline{y} - \sum_{j=1}^{9} B_9\overline{x}_9.$$

Шаг 6. Определение множественного коэффициента корреляции.

Множественный коэффициент корреляции определяется как:

$$R = \sqrt{\beta_1 r_{x1y} + \beta_2 r_{x2y} + ... + \beta_9 r_{x9y}}.$$

Полученные в результате исследований множественные коэффициенты корреляции приведены в табл. 6. Множественный коэффициент корреляции считается значительным, т. е. имеет место статистическая зависимость между y и остальными факторами $x_1, x_2, ..., x_k$, если $F_{\text{набл}} \rangle F_{\text{кр}}(\alpha, k-1, n-k)$, где $F_{\text{кр}}$ определяется по таблице F-распределения. Сила связи между химическим составом и пределом прочности, относительным удлинением является умеренной, а с относительным сужением – слабой.

Шаг 7. Определение множественного коэффициента детерминации.

Множественный коэффициент детерминации при линейной зависимости определяется как [1]:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^{\text{расч}})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y - \overline{y})^2},$$

Т а б л и ц а 6. **Данные для вычислений критериев Стьюдента и Фишера**

Значения коэффициентов Стьюдента t											
t_1(C)	t_2(Si)	t_3(Mn)	t_4(P)	t_5(S)	t_6(Cr)	t_7(Ni)	t_8(Cu)	t_9(N_2)	$t_{0,05;88} = 2,06$		
–0,0651	0,2548	–0,553	7,6532	1,471	–0,2162	–1,4632	0,3267	4,2146	$t_{\text{кр}}(\sigma_b)$	–	–
0,1110	0,1675	–0,3079	–2,9940	1,1343	–0,29	1,1628	–0,59	–8,2492	–	$t_{\text{кр}}(\psi)$	–
–0,0970	–0,6658	–0,2921	–3,8370	2,5132	0,064	3,3498	–2,06	6,4932	–	–	$t_{\text{кр}}(\delta)$
Значения коэффициентов множественной корреляции R_i						Значения коэффициентов Фишера $F_{\text{кр}}$ = 1,43					
$R(\sigma_b)$		$R(\psi)$		$R(\delta)$		$F_{\text{набл}}(\sigma_b)$		$F_{\text{набл}}(\psi)$		$F_{\text{набл}}(\delta)$	
$R_1 = 0,43$		$R_2 = 0,28$		$R_3 = 0,33$		$F_1 = 0,9$		$F_2 = 1,08$		$F_3 = 0,89$	
Значения коэффициентов множественной детерминации R_i^2						–		–		–	
$R^2(\sigma_b)$		$R^2(\psi)$		$R^2(\delta)$		–		–		–	
$R_1^2 = 0,18$		$R_2^2 = 0,08$		$R_3^2 = 0,11$		–		–		–	

где $\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^{\text{расч}})^2$ – остаточная сумма квадратов отклонений; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$ – общая сумма квадратов отклонений. Коэффициент детерминации R^2 является суммарной мерой общего качества уравнения регрессии (его соответствия статистическим данным).

Таким образом, по результатам проведенного регрессионного анализа можно судить о значимости тех или иных компонентов в общей совокупности рассматриваемой модели. Разработанная и проверенная математическая модель, в основу которой положен метод Гаусса (наиболее удобный способ решения систем линейных уравнений), позволяет решить задачу выбора специальных характеристик продукции и параметров процесса, влияющих на качество конечного продукта. Преимуществом модели является ее научная основа и универсальность, а также возможность проведения проверки адекватности модели, что снижает степень ошибочности принятия решения. Кроме того, модель множественного линейного регрессионного анализа подразумевает поиск показателей (обозначаемых x), определяющих значение отдельной количественной переменной, обозначаемой y. Систематизация проведения подобного рода анализа позволяет максимально точно устанавливать зависимости между наблюдаемыми характеристиками и регулировать их с помощью рассчитанной математической модели. В случае автоматизации алгоритма проведения многомерного регрессионного анализа затраты времени на поиск решения задачи сокращаются в несколько раз. При этом не потребуется специальное обучение персонала.

Литература

1. К у м э Х. Статистические методы повышения качества / Пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1990.
2. Ш и ш к и н И. В., С т а н я к и н В. М. Квалиметрия и управление качеством. М.: Изд–во ВЗПИ, 1992.
3. А д л е р Ю. П., М а р к о в а Е. В., Г р а н о в с к и й Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. Изд. 2–е. М.: Наука, 1976.
4. Д р е й п е р Н., С м и т Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2–х кн. Кн. 2 / Пер. с англ. 2–е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 1987.
5. Н е у й м и н Я. Г. Модели в науке и технике. История, теория, практика. Л.: Наука, 1984.
6. Ч и ч к о А. Н., С о б о л е в В. Ф., Ч и ч к о О. И. Статистические методы регулирования качества продукции в литейном производстве. Мн.: БНТУ, 2006.
7. Рекомендации. Прикладная статистика. Методы обработки данных. Основные требования и характеристики. М.: ВНИИС, 1987.
8. Теория статистики / Под ред. Р. А. Шмойловой. М.: Финансы и статистика, 1998.
9. И в а ш о в А. Линейная алгебра. Матрицы: Учеб. пособ. М.: ВНИИС, 2004.
10. О р л о в А. И. Эконометрика: Учеб. пособ. М.: Экзамен, 2002.