

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОСРЕДСТВОМ ПАКЕТА MATLAB SIMULINK

Васильков В.С., Борздыко М.А., Березневич И.В.

Научный руководитель - к.т.н., доцент Несенчук А.А.

Автоматизация имеет важное значение в современном мире. Различные автоматические устройства, работающие на основе систем автоматического управления (САУ), позволяют увеличить количество и повысить качество выпускаемой продукции. Данный вопрос рассматривает дисциплина теория автоматического управления (ТАУ) [1], в рамках которой широко используется метод корневого годографа [1, 2].

Корневой годограф (КГ) алгебраического уравнения (характеристического уравнения замкнутой динамической системы) - это траектории описываемые на комплексной плоскости s собственных частот системы корнями этого уравнения при непрерывном изменении одного из его параметров определенным образом [1, 2].

Рассмотрим простейшую систему с передаточной функцией (ПФ) вида

$$W(s) = X/Y = W_o W_p / (1 + K W_o W_p), \quad (1)$$

где $W(s)$ - ПФ замкнутой системы; $s = \sigma + i\omega$; X - выходная (регулируемая) величина; Y - входная величина (задающее воздействие); W_o - ПФ объекта управления; W_p - ПФ регулятора [2].

Произведем замену $W_o W_p$ на $G(s)$:

$$G(s) = W_o W_p = \Psi(s) / \Phi(s), \quad (2)$$

где $G(s)$ - ПФ разомкнутой системы (это дробно-рациональная функция); $\Psi(s)$ - полином числителя ПФ разомкнутой системы; $\Phi(s)$ - полином знаменателя ПФ разомкнутой системы [2].

Выполнив некоторые преобразования над формулами (1) и (2), получим следующее выражение:

$$1 + KG(s) = \Phi(s) + K\Psi(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (3)$$

Выражение (3), представляет собой характеристическое уравнение (характеристический полином) замкнутой системы. Именно траектории его корней, т.е. КГ, рассматриваются для того, чтобы выполнять анализ поведения (динамических свойств), а также синтез систем с требуемыми свойствами.

Для построения КГ полинома (3) меняют один из коэффициентов, обычно это K или a_j .

На основании формулы (3) отображения запишем функцию отображения, которая представляет собой уравнение КГ (УКГ) общего вида [2]:

$$a_j = u(\sigma, \omega) + iv(\sigma, \omega) = -1/G(s) = -\Phi(s)/\Psi(s), \quad (4)$$

где a_j - параметр годографа.

Для примера возьмем ПФ вида

$$G(s) = 1/((s+1)(s+2)(s+3)(s+4)). \quad (5)$$

Для определения полюсов КГ определяются корни знаменателя ПФ (5): $s_1 = -1; s_2 = -2; s_3 = -3; s_4 = -4$.

Число ветвей КГ равно порядку системы, $n=4$. Ветви начинаются при $K=0$. Точка пересечения асимптот ветвей годографа с действительной осью находится по формуле [1, 2]:

$$\sigma_a = \left(\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{j=1}^m N_{ji} \right) / (n - m),$$

угол наклона асимптот по формуле [1, 2]:

$$\theta = \pi(2i + 1)/(n - m),$$

где P_i - полюса ПФ (2); N_i – нули ПФ (2); m - степень числителя ПФ (2); n - степень знаменателя ПФ (2).

В результате исследований метода КГ построены некоторые уравнения корневого годографа Теодорчика-Эванса (УКГТЭ) [2] ручным способом при $-\infty < a_j < +\infty$ (рисунок 1).

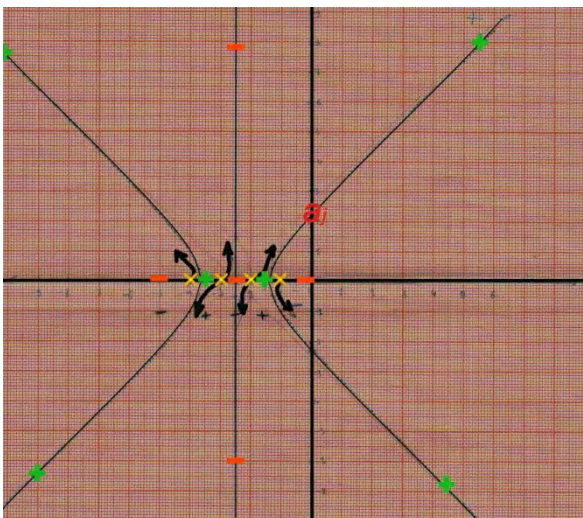


Рисунок 1. Результат ручного построения КГТЭ.

Следует отметить, что были изучены средства MatlabSimulink (основной синтаксис, утилита SISOTool), предназначенные для анализа и расчета САУ. Построен корневой годограф в среде Matlab (рисунок 2), аналогичный изображенному на рисунке 1.

Данная утилита позволяет: создавать ПФ, получать импульсную, переходную характеристику звена, строить структурные схемы САУ с последующим их исследованием, определять корни, полюса систем.

Для построения КГ необходимо набрать следующий код в командной

строке Matlab:

1. Ввести коэффициенты полинома числителя ПФ (2):

$$\text{num} = [b_0, b_1, \dots, b_n].$$

2. Ввести коэффициенты полинома знаменателя ПФ (2):

$$\text{den} = [c_0, c_1, \dots, c_n].$$

3. Создать модель ПФ используя функцию `tf()`, которая принимает на вход полиномы числителя и знаменателя и сохраняет результат в переменную

`sys = tf(num, den).`

4. На этом этапе можно определить корни и полюса ПФ без построения графика, используя функции `zero()`, `pole()`, которые принимают на вход переменную, хранящую ПФ.
5. Для отображения КГ используется функция `locus`, которая принимает

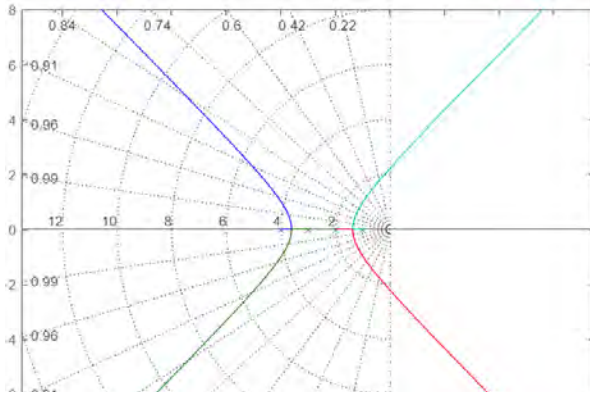


Рисунок 2. Результат построения КГТЭ

в среде Matlab.

ПФ в качестве параметра (рисунок 2).

Сравнив результаты (рисунок 1 и рисунок 2), можно заметить, что графики идентичны. Однако Matlab не отображает асимптоты, направление ветвей отображается не стрелками, а различным цветом.

В результате исследований с использованием формулы (4), выявлено, что система устойчива при $a_j \in [0, 138]$. При $a_j \geq 138$ (см. точку a_j на рисунке 1) положительные правые ветви годографа пересекают мнимую ось и далее переходят в правую

полуплоскость корней. В итоге система теряет стабильность (рисунки 1, 2).

Для дополнительной оценки, определения запасов устойчивости системы необходимо использовать утилиту `SISOTool`, приложение пакета `ControlSystem` пакета `MATLAB` для моделирования, имитирования и анализа систем управления с контуром обратной связи.

В ходе выполнения научно-исследовательской работы изучен метод корневого годографа для анализа и синтеза САУ. Построены и исследованы корневые годографы различных динамических систем. Основными достоинствами данного метода является возможность и удобство выполнения синтеза, аналитического исследования систем различных классов и порядков. Рассмотрен и изучен пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений Matlab и среда `Simulink` графического программирования для моделирования динамических систем управления с использованием корневых траекторий.

Литература

1. Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
2. Несенчук, А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода / А.А. Несенчук. - Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2005.