этого измеряют угол и шаг резьбы реплики на универсальном микроскопе. Затем разрезают гайку и измеряют те же параметры резьбы.

В результате проведенного таким образом эксперимента получены расхождения значений измеренных параметров, которые не превышали:

- для шага резьбы — порядка 0,015 мм;
- для угла профиля резьбы — порядка 1°.

Проведенные исследования позволяют сопоставить полученные результаты измерений параметров гайки и реплики. Учитывая начальные стадии экспериментов, сходимость можно считать удовлетворительной. На результаты эксперимента оказывали влияние следующие факторы:

- свойства материала, из которого выполнялась реплика;
- отношение полимера к мономеру в приготовленной смеси;
- свойства жидкости, которой пользовались для облегчения отделения реплики от металла;
- способ отделения реплики от резьбы гайки;
- качество поверхности исследуемой резьбы (шероховатость и точность изготовления).

Полученные результаты пока нельзя считать удовлетворительными настолько, чтобы предложенный способ можно было рекомендовать для непосредственного использования на практике. Однако результаты эксперимента можно считать обнадеживающими, и мы считаем, что следует проводить дальнейшие исследования в этом направлении.

Литература

1. **Dąbek Z., Beszczyński W.** Metrologia i kontrola techniczna /ATR. Bydgoszcz, 1985. S. 112.
2. **Sadowski A.** Metrologia długości i kąta /WNT. Warszawa, 1980. S. 287.
3. **Szewczyk K.** Połączenia gwintowe /PWN. Warszawa, 1991. S. 10–15.

НОВЫЙ МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ СИЛ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Джилавдари И.З., Русак А.А.,
Белорусская государственная политехническая академия, г. Минск

Введение. Наиболее чувствительным методом измерения слабых сил и моментов сил трения качения является маятниковый метод [1–2]. Однако этот метод имеет большую методическую погрешность, поскольку приходится предполагать, что сила трения качения не зависит от скорости. В докладе рассматривается другой, весьма простой и точный, метод оценки сил и коэффициентов трения, который позволяет исключить данную погрешность.

Математическая модель метода. Расчетная схема маятника представлена на рис. 1.

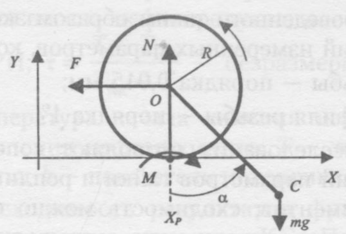

Рис. 1

На нем показан шар радиусом R, находящийся на плоской поверхности — опоре маятника, сила тяжести mg, приложенная к центру масс C маятника, сила реакции опоры N, сила инерции F, которая стремится вызвать скольжение шара, а также момент силы трения качения M. Центр масс маятника находится на расстоянии $l_c = OC$ от центра шара.

Если максимальные углы α отклонения маятника невелики, т.е. $\alpha << 1$, уравнение колебаний маятника принимает вид

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = -\mu \frac{mgR}{I_p} \operatorname{sign}\dot{\alpha}, \tag{1}$$

где

$$\omega^2 = \frac{mgl_c}{I_p}, \tag{2}$$

$$I_p = I_c + m\left(l_c - R\right)^2. \tag{3}$$

Через I_p обозначен момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку контакта шара и опоры, коэффициент μ связывает силу трения качения с силой нормального давления: $F_{тр} \approx \mu mg$. Момент трения качения M вычисляется по формуле $M = RF_{тр}$.

Сила F равна произведению массы маятника на проекцию ускорения его центра масс на горизонтальное направление

$$F \approx -m\alpha_0 \omega^2 \left(l_c - R\right)\cos\omega t + \frac{1}{8} m l_c \alpha_0^3 \omega^2 \left(\cos\omega t + 3\cos 3\omega t\right). \tag{4}$$

В данном методе предполагается, что сила трения качения зависит от линейной скорости качения шара по закону

$$F_{тр} = mg\left(b_0 + b_1|v| + b_2 v^2\right). \tag{5}$$

Уравнение (1) решалось асимптотическим методом [3]. В первом приближении этого метода считают, что движение тела описывается уравнением

$$\alpha(t) = \beta(t)\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

в котором $\omega = \text{const}$. Во втором приближении учитывают в решении дополнительные гармоники частоты ω и зависимость частоты этих гармоник от амплитуды колебаний. При этом вид огибающей $\beta(t)$ в обоих приближениях сохраняется. В результате для огибающей получают следующее выражение:

$$\beta(t) = \frac{\beta_0 - \dfrac{k_1\beta_0 + 2k_0}{\sqrt{-D}}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-D}t\right)}{1 + \dfrac{k_1 + 2k_2\beta_0}{\sqrt{-D}}\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{-D}t\right)}, \tag{7}$$

если $D < 0$, или

$$\beta(t) = \frac{\left(\sqrt{D} - k_1\right)\beta_0 - 2k_0 + \left[\left(\sqrt{D} + k_1\right)\beta_0 + 2k_0\right]\exp\left(-\sqrt{D}t\right)}{\sqrt{\mathrm{D}} + k_1 + 2k_2\beta_0 + \left(\sqrt{D} - k_1 - 2k_2\beta_0\right)\exp\left(-\sqrt{D}t\right)}, \tag{8}$$

если $D > 0$,

где $$D = k_1^2 - 4k_0 k_2; \tag{9}$$

k_0, k_1, k_2 — постоянные коэффициенты, связанные коэффициентами b_i соотношениями

$$k_0 = \frac{4R}{l_c T} b_0; \quad k_1 = \frac{2\pi^2 R^2}{l_c T^2} b_1; \quad k_2 = \frac{32\pi^2 R^3}{3 l_c T^3} b_2, \tag{10}$$

где T — период колебаний.

Во втором приближении, в решении для $\alpha(t)$ появляются нечетные гармоники

$$\alpha(t) \approx \beta(t)\cos\psi(t) - \frac{4}{\pi}\frac{R}{l_c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_0\frac{2b_2 v_0^2}{(2n+1)^2 - 4}\right)\frac{\sin(2n+1)\psi(t)}{(2n+1)\left[(2n+1)^2 - 1\right]}, \tag{11}$$

где — $v_0 = \omega R\beta(t)$ амплитудное значение линейной скорости качения шара по плоскости, причем

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega\left\{1 - \frac{1}{\beta(t)^2}\left(\frac{R}{l_C}\right)^2\left[\frac{6b_0^2}{\pi^2} + \frac{3b_0 b_1}{2\pi} v_0 + \left(\frac{b_1^2}{8} + \frac{32 b_0 b_2}{9\pi^2}\right)\times\right.\right.$$

$$\times v_0^2 + \frac{b_1 b_2}{3\pi} v_0^3 + \frac{0{,}164 b_2^2}{\pi^2} v_0^4 \Bigg]\Bigg\}. \qquad (12)$$

Из (12) видно, что период колебаний маятника квадратично зависит от параметров трения b_i. Формулы (11) и (12) позволяют установить методические погрешности решения уравнения (1) в первом приближении. При расчетах наличие гармоник и различие между $d\psi/dt$ и ω не учитывались.

Уравнения (7), (8) и (11), (12) содержат в себе все до сих пор известные решения уравнения (1), полученные в частных случаях [3].

Нетрудно видеть, что при выполнении равенства

$$l_c = R \qquad (13)$$

амплитуда силы F будет минимальна при любых углах β_0. В этом случае

$$F \approx \frac{1}{8} mR\beta_0^3\omega^2(\cos\omega t + 3\cos 3\omega t). \qquad (14)$$

Скольжение маятника будет отсутствовать, если $|F|_{\text{макс}} < k^0 mg$, где k^0 — коэффициент трения покоя. Отсюда следует, что условие отсутствия скольжения имеет вид

$$\frac{2\pi^2 R\beta_0^3}{T^2} < k^0 g. \qquad (15)$$

В опытах, описанных ниже, это условие заведомо выполнялось. Однако процесс качения шара по плоскости представляет собой сложный кинематический и динамический процесс. Это связано с тем, что реально контакт шара с плоскостью происходит не в одной точке, а в пределах пятна конечных размеров. Поэтому качение шара всегда сопровождается деформацией формы и скольжением его поверхности относительно плоскости. В этих условиях можно ожидать, что даже малая сила F может каким-то образом повлиять на движение шара и всего маятника. В связи с этим были проведены измерения силы трения качения в случаях $l_c = R$ и $l_c > R$.

Описание метода. Проведенный анализ и полученные выше формулы позволяют построить новый метод измерений слабых сил трения, в частности трения качения. В соответствии с предлагаемым способом необходимо провести следующие операции:

1. Предварительно весь интервал значений амплитуд колебаний маятника от начальной β_0 до конечной β_n разбить на ряд последовательных интервалов, например с помощью меток на шкале. Без учета β_0 и β_n таких меток должно быть не менее трех.
2. Отклонить маятник на начальный угол β_0, отпустить его и измерить время последовательного прохождения маятником выбран-

ных меток или отсчитать число колебаний, совершенных маятником по мере прохождения этих меток.

3. Определить период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Можно в качестве T взять средний период, разделив полное время колебаний на полное число колебаний.
4. Решить задачу нелинейной аппроксимации полученного выше экспериментального закона затухания амплитуды колебаний маятника аналитической зависимостью (7) или (8) и определить коэффициенты k_0, k_1, k_2.
5. По формулам (10) вычислить коэффициенты b_0, b_1 и b_2.

Результаты измерений и вычислений. Описанным методом были измерены коэффициенты b_0, b_1 и b_2 в следующих парах трения: стальные подшипниковые шарики диаметром 12,3 мм — плитки Иогансона (табл. 1) и эти же шарики — полированное оптическое стекло К8 (табл. 2). В качестве смазки использовались приборное масло *ÖG-L7* (более жидкое) и автомобильное масло М−6$_3$/10Г$_1$ (более густое). В таблицах приведены значения работы, совершаемой каждой из трех составляющих силы трения качения, деленные на массу маятника. Все размерные значения представлены в СИ.

Таблица 1

Масса маятника, кг	Характер смазки	Баланс	b_0, 10^{-6}	b_1, 10^{-1}	b_2, 10^{-1}	A_0/m, 10^{-5}	A_1/m, 10^{-4}	A_2/m, 10^{-4}	A/m, 10^{-3}	ε, %	k_c, 10^{-4}	$k_{ср}$, 10^{-4}	$k_{гост}$, 10^{-4}	$t_{колеб}$
1	жидкая	$l = r$	3,60	1,1	714	3,2	7,55	5,36	1,32	0,03	1,49	2,23	3,08	3720
	без см.	$l = r$	8,04	0,8	723	8.13	6,1	6,3	1,32	0,62	1,31	1,93	2,80	3540
1,3	густая	$l = r$	2,36	1,2	341	1,91	9,41	3,64	1,32	0,35	1,63	2,31	3,32	3180
		$l = 5,3r$	5,8	1,3	570	10,4	35,1	33,9	7,00	0,4	3.91	6,29	9,14	4560
	жидкая	$l = r$	1,93	0,9	342	2,01	8,46	4,57	1,32	0,43	1,27	1,87	2,64	4020
		$l = 5,3r$	5,11	0.8	655	11,3	25	44	6,99	0,17	3,11	5,72	8,81	6000
	без см.	$l = 5,3r$	23,5	1,2	453	42,2	35,9	30,0	7,01	0,11	4,02	5,61	8,08	3120
		$l = r$	3,84	0.8	382	4,01	7,61	5,13	1,31	0,33	1,27	1,87	2,62	3420

Погрешность измерений силы трения определялась по формуле $\varepsilon = \dfrac{|W - A|}{W}$, где W — начальная потенциальная энергия маятника; A — полная работа силы трения до полной остановки маятника. В идеале должно быть, очевидно, $W = A$. Во всех опытах начальный угол колебаний $\beta_0 = 12^0$, конечный угол $\beta_n = 0$.

Таблица 2

Масса маятника, кг	Характер смазки	Баланс	b_0, 10^{-6}	b_1, 10^{-1}	b_2, 10^{1}	A_0/m, 10^{-5}	A_1/m, 10^{-4}	A_2/m, 10^{-4}	A/m, 10^{-3}	ε, %	k_c, 10^{-4}	k_{cp}, 10^{-4}	$k_{гост}$, 10^{-4}	$t_{колеб}$
1	густая	l = г	5,55	1,8	490	3,77	9,71	3,06	1,31	0,13	1,84	2,63	3,59	2640
	жидкая	l = г	7,96	1,4	449	6,31	9,62	3,23	1,31	0,30	1,67	2,23	3,13	2820
	без см.	l = г	8,11	1,2	504	7,26	8,33	4,17	1,32	0,45	1,46	2,01	2,80	3050
1,3	густая	l =5,3 г	4,78	1,5	532	8,18	38,7	29,8	6,93	0,44	3,98	6,48	8,84	4440
	жидкая	l =5,3 г	3,13	1,2	528	6,6	34,4	70,2	7,02	0,32	3,40	5,65	8,23	6000
	без см.	l =5,3 г	4,36	1,1	503	9,19	34,7	34,5	7,02	0,09	3,34	5,48	7,89	5400

Чтобы иметь возможность сравнивать полученные результаты с результатами, полученными другими методами, проводился расчет *коэффициента сопротивления качению*, который определялся как отношение работы силы трения A к произведению веса маятника на полный путь S качения шара до его остановки: $k_c = \dfrac{A}{mgS}$ (среднее значение коэффициента трения по полному пути качения); *среднего коэффициента трения* как среднего по скорости от коэффициента трения $k_{cp} = \dfrac{1}{v_{макс}} \int\limits_{(v)} \mu(v)dv$, а также безразмерного коэффициента трения качения, вычисленного в соответствии с процедурой, рекомендуемой существующим ГОСТом [2].

Значения коэффициентов b_i, k_c, k_{cp} и $k_{ГОСТ}$, приведенные в таблицах, вдвое больше реальных, поскольку они получены для опоры, содержащей два шарика.

Из таблиц, в частности, следует, что значения коэффициентов трения находятся между собой в соотношении $k_c < k_{cp} < k_{ГОСТ}$. Необходимо отметить, что ГОСТ допускает погрешность измерений не более 10%. Легко видеть, что стандартная процедура не соответствует этому требованию.

Видно также, что при $R < l_c$ значения коэффициентов трения возрастают. Следовательно, в этих опытах качение шаров сопровождалось дополнительным скольжением, хотя условие (15) отсутствия скольжения заведомо выполнялось.

Решение задачи аппроксимации контролировалось численным решением дифференциального уравнения (1) с полученными данным методом значениями коэффициентов b_i. На рис. 2 представлены экспериментальные точки, огибающая (пунктирная кривая) и решение дифференциального уравнения для пары трения сталь–фторопласт для случая $l_c = R$ и m =1,5 кг ($b_0 = 6{,}18 \cdot 10^{-4}$, $b_1 = 6{,}72$, $b_2 = -3406$; $k_{cp} = 3{,}08 \cdot 10^{-3}$, $k_c = 3{,}22 \cdot 10^{-3}$). На рис. 3 представлена зависимость коэффициента μ от скорости и значение коэффициента k_c во всем диапазоне изменения линейной скорости качения в данном опыте.

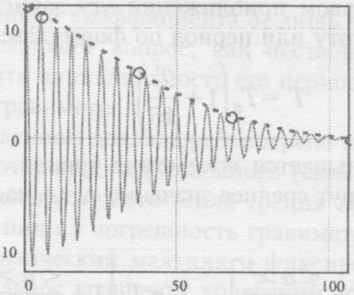

Рис. 2

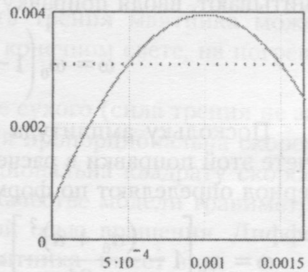

Рис. 3

Данный метод может стать основой для нового ГОСТа измерения трения качения, а также явиться новым, весьма чувствительным и точным инструментом для исследования особенностей взаимодействия поверхностей тел при их относительном движении.

Литература

1. **Ахматов А.С.** Молекулярная физика граничного трения. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. **ГОСТ 27640-88.**
3. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ МАЯТНИКОВОГО ГРАВИМЕТРА

Джилавдари И.З.,

Белорусская государственная политехническая академия, г. Минск

Основным элементом маятникового гравиметра является физический маятник. Точность измерения ускорения свободного падения g гравиметром определяется, главным образом, стабильностью частоты ω_0 или периода T_0 свободных колебаний маятника. Соответствующие погрешности связаны между собой соотношением