Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, Чебоксары

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Ивлев Д.Д.

На примере плоской задачи определение напряженного и деформированного состояния интерпретируется как установление соответствия деформирования двух плоскостей.

1. Рассмотрим некоторую область S в плоскости xy, (рис. 1, а), точки которой получают перемещения

$$\boldsymbol{s} = u(x, y)\boldsymbol{i} + v(x, y)\boldsymbol{j}\,. \tag{1.1}$$

В результате перемещений область S деформируется и переходит в область S_1 (рис. 1, б). Если ограничиться малыми перемещениями, то деформирование определяется следующими компонентами:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad e_y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{1.2}$$

где e_x, e_y – деформации растяжения (сжатия) вдоль осей x, y; e_{xy} – деформация сдвига, характеризующая искажение углов первоначальной координатной сетки.

Может быть определено также вращение элемента как жесткого целого

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{1.3}$$

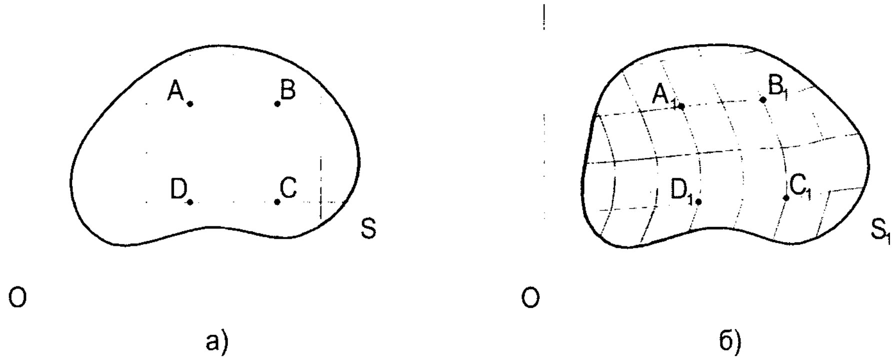

Рис. 1

Три величины e_x, e_y, e_{xy}, характеризующие деформирование элемента тела, выражаются через две компоненты перемещения u, v (1.2). Согласно (1.2), (1.3), имеют место условия совместности

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y} = 0.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует условие совместности деформаций в виде

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\partial y}. \tag{1.5}$$

Поле деформаций e_x, e_y, e_{xy}, не удовлетворяющее условиям совместности (1.4), (1.5), определяет деформирование, нарушающее сплошность среды. В дальнейшем рассматривается сплошная среда, условия (1.4), (1.5) имеют место.

Деформирование сплошной среды происходит за счет действия приложенных усилий, в теле возникает напряженное состояние, которое характеризуется величинами $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, где σ_x, σ_y – нормальные растягивающие (сжимающие) напряжения вдоль осей x, y; τ_{xy} – касательное (сдвигающее) напряжение.

Имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0. \tag{1.6}$$

Уравнения равновесия (1.6) можно рассматривать как условия совместности для поля «перемещения напряжений»

$$\boldsymbol{\tau}=\xi(x,y)\boldsymbol{i}+\eta(x,y)\boldsymbol{j}, \tag{1.7}$$

а напряжения – как «деформации»

$$\sigma_x=\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \tau_{xy}=-\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad \sigma_y=\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{1.8}$$

Из (1.8) следуют уравнения (1.6), а также

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}=0. \tag{1.9}$$

Согласно (1.9), поле перемещений является потенциальным, безвихревым. Уравнение (1.9) можно удовлетворить, полагая

$$\xi=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{1.10}$$

где U – потенциал перемещений.

Из (1.8), (1.10) следуют формулы Эри

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}. \tag{1.11}$$

Согласно (1.6) – (1.9), уравнениям равновесия (1.6) может быть поставлено в соответствие поле перемещений, определяющее безвихревое (1.9) деформирование плоскости.

Согласно (1.8), перемещениям ξ, η соответствуют деформации

$$\bar{e}_x=\sigma_y=\frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \bar{e}_y=\sigma_x=\frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \bar{e}_{xy}=-\tau_{xy}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \tag{1.12}$$

Закон Гука для случая плоской задачи можно записать в виде

$$e_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y), \quad e_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x), \quad e_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad E, G, \nu-const. \tag{1.13}$$

Выражения (1.13), согласно (1.12), можно записать в виде

$$e_x=\frac{1}{E}(\bar{e}_y-\nu\bar{e}_x), \quad e_y=\frac{1}{E}(\bar{e}_x-\nu\bar{e}_y), \quad e_{xy}=-\frac{1}{G}\bar{e}_{xy}. \tag{1.14}$$

Соотношения (1.14), согласно (1.2), (1.12), примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}-\nu\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}-\nu\frac{\partial \eta}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \tag{1.15}$$

Итак, согласно (1.14), (1.15), деформирование некоторой области S может быть осуществлено за счет перемещений $\bar{s}$ и $\bar{\tau}$

$$s = ui + vj, \quad \tau = \xi i + \eta j. \tag{1.16}$$

Закон Гука (1.14), (1.15) устанавливает соответствие между двумя деформированиями области S, согласно (1.16), (1.2), (1.12).

Отметим, что любому безвихревому полю перемещений

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.17}$$

путем преобразования

$$u = -v, \quad v = u \tag{1.18}$$

можно поставить в соответствие несжимаемое деформирование

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1.19}$$

Введем преобразование аналогично (1.18)

$$\tau_1 = pi + qj, \quad p = \eta, \quad q = -\xi. \tag{1.20}$$

Согласно (1.8), (1.20), можно ввести несжимаемое поле «перемещений напряжений»

$$\sigma_x = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{1.21}$$

Из (1.21) следует условие несжимаемости

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \tag{1.22}$$

Согласно (1.21), «деформации» в плоскости напряжений будут иметь вид

$$\begin{gathered} \bar{\bar{e}}_x = -\bar{\bar{e}}_y = -\tau_{xy}, \quad \bar{\bar{e}}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y), \\ \bar{\bar{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \end{gathered} \tag{1.23}$$

Закон Гука (1.13) можно записать в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{E}{1-\nu}(e_x + e_y), \quad \sigma_x - \sigma_y = \frac{E}{1+\nu}(e_x - e_y), \quad \tau_{xy} = Ge_{xy}. \tag{1.24}$$

Согласно (1.23), выражения (1.24) примут вид

$$\bar{\bar{w}} = \frac{E}{2(1-\nu)}(e_x + e_y), \quad \bar{\bar{e}}_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}(e_x - e_y), \quad \bar{\bar{e}}_x = -\bar{\bar{e}}_y = -Ge_{xy}. \tag{1.25}$$

Выражения (1.25), согласно (1.2), (1.23), можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{E}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{G}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{gathered} \tag{1.26}$$

где u, v, p, q – компоненты перемещений.

Аналогично (1.14), (1.15) соотношения (1.25), (1.26) устанавливают соответствие между двумя деформированиями области S, согласно (1.20), (1.2), (1.23).

Для определения решений должны быть сформулированы краевые условия. Обычно формулируются задачи в перемещениях, когда на контуре L области S заданы компоненты перемещения

$$u = u_0, \quad v = v_0 \text{ на } L, \tag{1.27}$$

где u_0, v_0 – заданные функции, в напряжениях, когда на L заданы нормальные и касательные усилия, и смешанная, когда на части контура L заданы перемещения, а на другой – напряжения.

Свойства среды могут быть самыми разнообразными, они определяются формой связи $e_{ij}-\sigma_{ij}$ или $e_{ij}-\bar{e}_{ij}$. Соотношения связи $e_{ij}-\sigma_{ij}$ устанавливают лишь форму соответствия деформирования областей.

2. Рассмотрим аналитическую функцию

$$Z(z) = u + iv, \quad z = x + iy. \tag{2.1}$$

Условие Коши-Римана можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2.2}$$

Согласно (1.2), уравнения (2.2) примут вид

$$e_x - e_y = 0, \quad e_{xy} = 0. \tag{2.3}$$

Соотношения (2.3) определяют бессдвиговое (без искажения углов) деформирование. Отсюда термин – «конформное преобразование».

Введем аналитическую функцию

$$Z_0(z) = u_0 - iv_0, \quad z = x + iy. \tag{2.4}$$

Условия Коши-Римана для функции (2.4) записываются в виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \tag{2.5}$$

или

$$e_x^0 + e_y^0 = 0, \quad w^0 = 0, \tag{2.6}$$

где $e_x^0 = \dfrac{\partial u_0}{\partial x}$, $e_y^0 = \dfrac{\partial v_0}{\partial y}$, $w = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u^0}{\partial y} - \dfrac{\partial v^0}{\partial x}\right)$.

Соотношения (2.5) определяют безвихревое (потенциальное) деформирование несжимаемой среды. Уравнения (2.5) широко использовались Н.Е. Жуковским и его последователями.

Покажем, что имеет место

$$Z(z) Z_0(z) = C, \quad C - const. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует

$$Z = \frac{C}{Z_0} = \frac{C\bar{Z}}{|Z_0|^2}, \quad Z_0 = \frac{C}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2}, \tag{2.8}$$

где черта наверху определяет сопряженную функцию.

Из (2.8) следует

$$u = \frac{Cu_0}{u_0^2 + v_0^2}, \quad v = \frac{Cv_0}{u_0^2 + v_0^2} \tag{2.9}$$

или

$$u_0 = \frac{Cu}{u^2 + v^2}, \quad v_0 = \frac{Cv}{u^2 + v^2}. \tag{2.10}$$

В справедливости формул (2.4), (2.10) можно убедиться непосредственной проверкой, подставив соотношения (2.9) в выражения (2.2) и воспользовавшись (2.5) и, наоборот, использовав выражения (2.10), (2.5), (2.2).

Для механической интерпретации результатов удобно воспользоваться гидродинамической аналогией и трактовать u, v; u_0, v_0 как компоненты скорости $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}_0$:

$$\boldsymbol{V} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{V}_0 = u_0\boldsymbol{i} + v_0\boldsymbol{j}. \tag{2.11}$$

Из (2.9), (2.10) следует коллинеарность векторов V, V_0. Согласно (2.9), (2.10),

$$|V||V_0| = C. \tag{2.12}$$

Соотношения (2.9), (2.10) соответствуют обтеканию одних и тех же тел, так как линии тока в обоих случаях совпадают.

Обтекание цилиндра потоком идеальной несжимаемой жидкости (2.5) определяется функцией

$$Z_0 = 1 - \frac{1}{Z^2}, \quad C = 1. \tag{2.13}$$

Обтекание того же цилиндра бессдвиговой средой будет определяться, согласно (2.7),

$$Z = \frac{1}{Z_0} = \frac{Z^2}{Z^2 - 1}. \tag{2.14}$$

Рассмотрим изменение плотности для среды (2.2). Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \tag{2.15}$$

Уравнение (2.15), согласно (2.2), преобразуются к виду

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(u^2 + v^2\right)\right] + V\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(u^2 + v^2\right)\right] = 0. \tag{2.16}$$

Из (2.16) следует

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{d\left[\rho\left(u^2 + v^2\right)\right]}{0}. \tag{2.17}$$

Из (2.17) получим

$$f(x, y) = 0, \quad \rho V^2 = const, \quad V^2 = u^2 + v^2, \tag{2.18}$$

где $f(x, y)$ – функция тока.

Соотношение $pV^2 = const$ имеет место вдоль линии тока. Приписывая индексы 1, 2 двум точкам вдоль одной линии тока, из (2.18) получим

$$\rho_1 V_1^2 = \rho_2 V_2^2, \quad \rho_2 = \rho_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что плотность среды уменьшается с увеличением скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивлев Д.Д. К теории дифференциальных соотношений в механике сплошной среды // Изв. ИТА ЧР. – 1996. – №2 (3).

2. Ивлев Д.Д. О плоских течениях идеально сжимаемых сред // Изв. РАН МТТ. – 1992. – №3.

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Гостехиздат, 1959.