

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ И РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ ПОДВИЖНОСТИ

Локтионов А.В.

In work the methods of account kinematics of parameters of the cutting tool of the executive mechanisms and robots-manipulators with three degrees of mobility are analysed. The analytical dependences for account kinematics of corners of cutters are offered during cutting. The matrix method of account kinematics of parameters multilink of the executive mechanisms is recommended at definition of projections of absolute speed and acceleration of the centre of griper of the robot as on mobile, and motionless axes of coordinates.

В процессе резания расчет задних углов, выражающих реальную величину зазора между поверхностью инструмента и поверхностью резания, непосредственно связан с изучением перемещения инструмента и обрабатываемого объекта. Задний угол движения α_d измеряется между вектором относительной скорости резания и касательной к траектории сложного пространственного движения инструмента в заданной точке [1, 2].

На чертежах резцов указываются геометрические параметры, полученные при заточке. При работе механизма приходится изменять положение режущего лезвия относительно обрабатываемого массива, а в зависимости от положения вершины резца изменяются направления вектора скорости и геометрические параметры резцов в состоянии движения, которыми определяется процесс резания и износ инструментов.

Для использования закономерностей движения резцов при разработке исполнительных механизмов определяются следующие расчетные зависимости: скорость движения инструмента, его ориентация относительно траектории движения и вытекающие из требований кинематики углы заточки (или установки) инструмента.

При обработке массива кинематические углы резцов не должны превышать их геометрические значения. Иначе массив разрушается боковыми и задними гранями резцов, увеличиваются расход режущего инструмента, усилия и мощность резания, что является одной из причин малоэффективной работы машин.

Аналитическому расчету кинематических параметров резцовых исполнительных механизмов посвящены исследования А.С. Архангельского, В.Г. Унгефуга, Л.Б. Глатмана, Е.К. Губенкова, Г.И. Грановского, Н.П. Юдина, Б.Н. Толстых [1-7].

В работе В.Г. Унгефуга получены общие параметрические уравнения движения резца в пространственной системе координат и найдена скорость его движения [5]. Кинематические углы Ψ_1 и Ψ_2 вектора абсолютной скорости движения инструмента определяются как линейные углы, образуемые вектором \vec{V} абсолютной скорости и его проекцией на плоскость вращения инструмента (угол Ψ_1) и на плоскость, нормальную к радиусу вращения инструмента (угол Ψ_2) (рис. 1). В работе даны рекомендации по проектированию режущего инструмента, предложена конструкция резца, углы заточки которого обеспечивают рациональные условия резания с учетом Ψ_1 и Ψ_2 . Аналитические выражения для определения углов ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\sin \psi_1 = -\sin \gamma (\lambda \cos \xi + \cos i \varphi) / \dot{I}^{\frac{1}{2}},$$
$$\sin \psi_2 = \lambda (\sin i \varphi \cdot \cos \xi \cdot \cos \gamma + \cos i \varphi \cdot \sin \xi) / \dot{I}^{\frac{1}{2}},$$

где γ , ξ - углы установки диска в пространстве, характеризующие положение плоскости относительно вращения резцов диска; $\varphi = \omega_d t$ - угол поворота исполнительного механизма

(води́ла); $\lambda = R/r$ - отношение радиусов водила и диска; $i = \omega_d/\omega_r$ - отношение угловых скоростей диска и водила; Π – планетарная функция основных параметров, определяемая в зависимости от основных параметров планетарного диска $\gamma, \xi, \lambda, r, i, \varphi$ из выражения

$$\ddot{I} = \lambda^2 + 2[\cos i\varphi(1 + i \cos \gamma) \cos \xi - \sin i\varphi(i + \cos \gamma)] + (i + \cos \gamma)^2 + \cos^2 i\varphi \sin \gamma.$$

Она подробно исследована А.С. Архангельским в работе [3]. Частные случаи исследования данного уравнения приведены в работе [5]. Для общего случая оно не решается элементарными способами.

В работе Е.К. Губенкова исследование основных закономерностей движения резцового инструмента переносится в область планетарных исполнительных органов с иным расположением осей [4]. Автором выполнен расчет необходимых по условиям кинематики углов заточки инструмента. Для исключения внедрения задней и боковой граней в разрушаемый массив определяются угол движения α_d , угол наклона ξ и угол поворота Ψ инструмента. Угол α_d определяется как угол между плоскостями. Расчетные формулы с помощью аналитической геометрии получить достаточно сложно, так как требуется пространственное изображение расчетной схемы исполнительного органа. Поэтому при выводе уравнений автор не учитывал поступательное перемещение исполнительного органа, которое полагал пренебрежимо малым по сравнению с другими составляющими планетарного движения инструмента.

Работа Н.П. Юдина включает в себя определение и исследование абсолютной скорости движения резцов и ее частных значений, в которых определена зависимость между скоростью вращения водила и углом установки резцов на рабочих дисках [6]. Б.Н. Толстых предложил для комбайна «Караганда 7/15», предназначенного для проведения подготовительных выработок и разработки угольных и калийных месторождений, расчетные зависимости между скоростью вращения водила и углом установки резцов на рабочих дисках. Автором предложена пространственная расчетная схема, в которой векторы скорости резания \vec{V}_p и относительного перемещения \vec{V}_n заданы направляющими косинусами и определен угол θ между этими векторами. По углу θ и абсолютным значениям скоростей \vec{V}_p и \vec{V}_n определяется угол ψ , образуемый вектором \vec{V}_p и вектором \vec{V} абсолютной скорости движения резца. Предельные значения угла ρ установки резцов определяются в зависимости от угла ψ и бокового λ резца. В.Н. Толстых упростил методику аналитического исследования кинематики резцов и конечные расчетные формулы. Исследования выполнены без учета подачи исполнительного механизма, а расчетные зависимости применимы только для рассматриваемого исполнительного органа [7].

При кинематическом исследовании шнеко-планетарного исполнительного органа В.Б. Санкин определил угол между осью резца и вектором абсолютной скорости и вывел расчетные формулы для определения углов, при которых исключается внедрение задней и боковых граней в разрушаемый массив [8]. Однако полученные зависимости довольно громоздки, основаны на поочередном сложении скоростей, требуют пространственных изображений положения резца и построения косоугольного параллелепипеда. Кроме того, вряд ли целесообразно вычисление косинуса угла между вектором абсолютной скорости и осью резца. Найденные зависимости достаточно сложны и применимы только для шнеко-планетарного исполнительного органа.

Для упрощения расчета α_d движение подачи можно разложить на продольное (вдоль оси исполнительного механизма) и поперечное. При поперечной подаче резец движется по траектории, представляющей собой удлиненную сферическую циклоиду, и происходит основное разрушение массива. С целью упрощения расчетов поперечное перемещение исполнительного механизма принимается соответствующим кинематической схеме резания при

фрезеровании, когда главное вращательное и вспомогательное поступательное движения происходят в одной плоскости, совпадающей с плоскостью вращения. Все точки могут перемещаться при этом при удлиненной циклоиде или трахоиде. Тогда $\alpha_s = \varphi - \beta$, где φ - угол качения; угол β определяется по величине направляющего косинуса. При продольной подаче вдоль оси исполнительного механизма каждая точка режущей кромки резца движется по винтовой линии с шагом, равным осевой подаче S'_o режущей головки за один оборот. В этом случае угол движения α_d равен углу подъема винтовой линии и определяется из равенства $\alpha'_d = \arctg(S'_o / \pi D)$, где D - диаметр головки по резцам [9].

Разработанные на основе аналитической геометрии указанные выше расчетные зависимости и пространственные схемы громоздки и трудоемки для составления применительно к сложному движению разрушающего исполнительного механизма. Его поступательная подача не учитывается, так как математическое описание перемещающихся плоскостей и определение угла между ними значительно усложняют расчетную схему и кинематический расчет в целом. Кинематические углы в процессе резания не соответствуют геометрическим углам режущего инструмента. Для сравнения геометрии резца с его кинематическими углами необходим дополнительный перерасчет полученных зависимостей. Их трактовка у каждого автора различна, отличаются также методы и методика их определения.

Для того, чтобы геометрические углы резцов соответствовали кинематическим углам Ψ_1 и Ψ_2 , необходимо знать углы φ и τ (см. рис. 1): $\operatorname{tg} \Psi_1 = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \tau$, $\operatorname{tg} \Psi_2 = \operatorname{tg} \tau \cdot \cos \varphi$. Подставляя в данные выражения соответствующие значения углов, получаем

$$V_z / V_{xy} = (V_z / V_y) \cdot (V_y / V_{xy}), \quad V_x / V_{yz} = (V_x / V_y) \cdot (V_y / V_{yz}).$$

Следовательно, для обеспечения в процессе разрушения массива необходимых кинематических углов Ψ_1 и Ψ_2 боковые и задний углы резца в статике следует определять из выражений

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \Psi_1 / \cos \tau = V_z / V_y, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg} \Psi_2 / \cos \varphi = V_x / V_y.$$

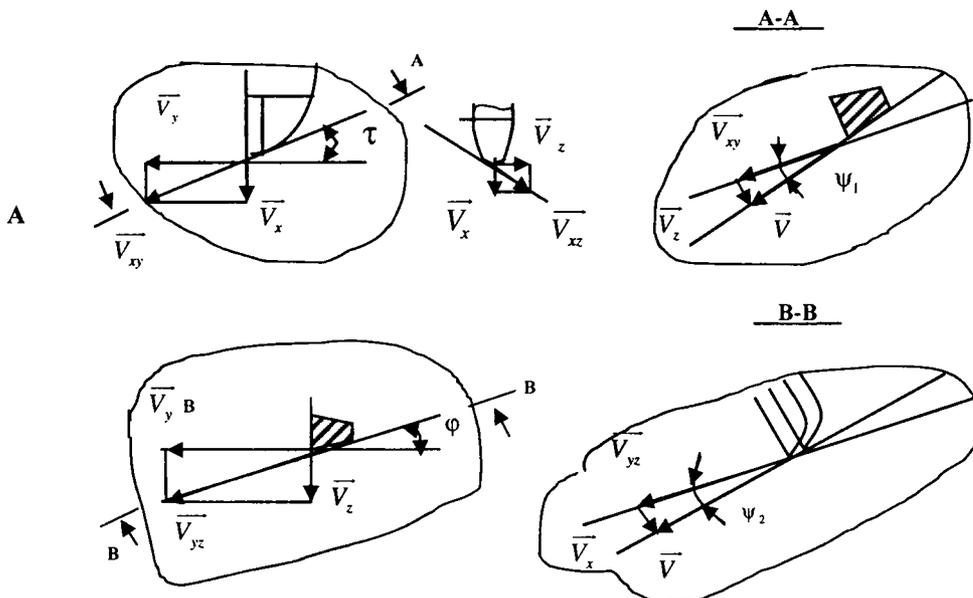


Рис. 1. Кинематические углы (ψ_2, ψ_1) вектора абсолютной скорости движения резца для боковой и задней поверхности инструмента

Углы φ и τ являются кинематическими углами резца в процессе резания. Чтобы оценить эффективность резцов, а, следовательно, и исполнительного механизма достаточно знать отдельные составляющие вектора абсолютной скорости, которые устанавливаются необходимыми углами их заточки. Для определения угла φ необходимо знать V_z и V_y , а для определения угла τ - V_x и V_y . Кинематический угол ξ для передней грани находится по формуле $\operatorname{tg} \xi/2 = V_z/V_x$. Ось X направлена вдоль оси резца, ось Y - перпендикулярно оси X в плоскости симметрии резца, ось Z - перпендикулярно плоскости симметрии резца.

Существующие методики и расчетные зависимости применимы только для одной конструкции исполнительного механизма, их нельзя использовать для совокупности органов. Исходные данные при расчетах различны и представлены в виде соотношений, не выделены основные конструктивные и кинематические параметры. Отсутствуют и расчетные формулы для общего случая движения исполнительных механизмов. При постановке задач следует использовать теорию кинематики точки и твердого тела [9]. Пространственные расчетные схемы должны быть компактны, достаточно просты и при сложном движении режущего инструмента.

Большая компактность записи достигается при решении задач матричным методом [10]. Разработка матричных уравнений расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов представляет определенный научный и практический интерес. Составными частями методологии их вывода должны являться разработка методик и матричных уравнений, сравнительная оценка различных методов и практические рекомендации по их использованию, расчет кинематических параметров на ЭВМ и рекомендации по оптимальной установке режущего инструмента. При решении проблемы необходим системный подход, каждый отдельный метод по методике изложения и по исходным параметрам должен отвечать требованиям системы в целом.

Исходные конструктивные параметры должны быть едины для исполнительных механизмов любой конфигурации: выполненных в виде конуса, сферы, цилиндра, овального корпуса, диска. Для всех конструкций исходными расчетными конструктивными параметрами будут расстояние от оси поворота исполнительного механизма до плоскости вращения или до центра диска (R) и текущий радиус (r) вращения резца [9-14]. Угловые скорости вращения и перемещение режущей головки должны соответствовать сумме элементарных движений резца в процессе резания [9, 14]. Методика расчета кинематических параметров режущего инструмента исполнительных механизмов матричным методом в общем случае подробно рассмотрена и проанализирована в работах [9-14]. При определении скорости и ускорения центра схвата роботов-манипуляторов также следует использовать матричный метод. Оценка целесообразности применения данного метода должна первоначально осуществляться на примере простейших схем исполнительных механизмов, как, например, в работе [15].

Существуют различные методы расчетов геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Анализом установлено, что наиболее простые методы расчета следует использовать для роботов, работающих в плоских системах координат. Векторный метод расчета следует применять для роботов-манипуляторов, звенья которых расположены в одной плоскости [16, 17]. В работах [18, 19] скорость \vec{v} и ускорение \vec{a} в сферической системе координат определяются как частный случай их расчета в ортогональных криволинейных координатах. Для расчета скорости определяются частные производные от декартовых координат x , y , z по соответствующим криволинейным скоростям q_1 , q_2 , q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1 , H_2 , H_3 . Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2$. Для расчета ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщенным криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей част-

ных производных по \dot{q} и q . Такая методика расчета кинематических параметров достаточно трудоемка. Искомые \bar{v} и \bar{a} определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, θ , связанные с движущейся точкой M . В работах [20, 21] скорость \bar{v} и ускорение \bar{a} получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работах [22, 23] для преобразования от прямоугольной и цилиндрической к сферической системе координат. Матричный метод расчета кинематических параметров применим к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности. При его использовании проекции абсолютной скорости и ускорения точки следует определять как на неподвижные оси координат, так и на подвижные оси координат.

Методика расчета кинематических параметров матричным методом заключается в том, что координаты точки рассматриваются в неподвижной системе и выражаются через координаты этой точки, например, в цилиндрической или сферической системах координат. Дифференцированием текущих координат определяются проекции скорости точки на неподвижные оси. С использованием транспонированной матрицы определяются проекции скорости точки на подвижные цилиндрические или сферические оси координат. Векторным дифференцированием текущих координат определяются проекции ускорения точки на неподвижные оси. Аналогично определяются проекции ускорения точки на подвижные цилиндрические или сферические оси координат. Модули скорости и ускорения рассчитываются по известным формулам, а их направления определяются направляющими косинусами. Получаемые расчетные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки матричным методом. Для численного расчета можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ. Они применимы для определения скорости и ускорения центра схватки робота-манипулятора с тремя степенями подвижности, работающего в цилиндрической и сферической системах координат [22, 23]. Рассмотрим матричный метод расчета кинематических параметров на примере двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности [15, 17].

Расчётная схема исполнительного механизма представлена на рис. 2. Механизм состоит из поворотного устройства с вертикальной осью вращения (на рисунке не показанной, угол поворота – φ) и двух звеньев l_1, l_2 , расположенных в вертикальной плоскости Y_1OZ_1 (углы поворота звеньев – θ_1 и θ_2). Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом. Система XYZ поворотом на угол φ переводится в подвижную систему $X_1Y_1Z_1$, таким образом, что механизм размещается в вертикальную плоскость Y_1OZ_1 . Следующим преобразованием переводим систему координат $X_1Y_1Z_1$ в систему $X_2Y_2Z_2$ поворотом вокруг оси OX_1 на угол θ_1 . Затем, перемещая начало координат $X_2Y_2Z_2$ на длину l_1 , получим систему координат $X_3Y_3Z_3$. Поворотом системы $X_3Y_3Z_3$ вокруг оси OX_3 на угол θ_2 получим систему координат $X_4Y_4Z_4$, которую перемещаем на длину l_2 и окончательно получим систему $X_5Y_5Z_5$. Для каждого поворота определяются матрицы $A_\theta, A_{\theta_1}, A_\varphi$, с помощью которых определяют координаты точки M . Анализом установлено, что при других способах преобразования координат усложняются матрицы перехода и, следовательно, в целом весь расчёт.

Координаты точки M в неподвижной системе XYZ в рассматриваемом случае выражаются через координаты этой точки в системе $X_5Y_5Z_5$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Принимаем, что $x_5, y_5, z_5=0$ и получаем новое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Из формулы (2) определяются проекции вектора точки M на неподвижные оси координат XYZ, которые имеют вид

$$\begin{aligned} x_M &= -l_1 \sin \varphi \sin \theta_1 - l_2 \sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ y_M &= l_1 \cos \varphi \sin \theta_1 + l_2 \cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2), \\ z_M &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (3)$$

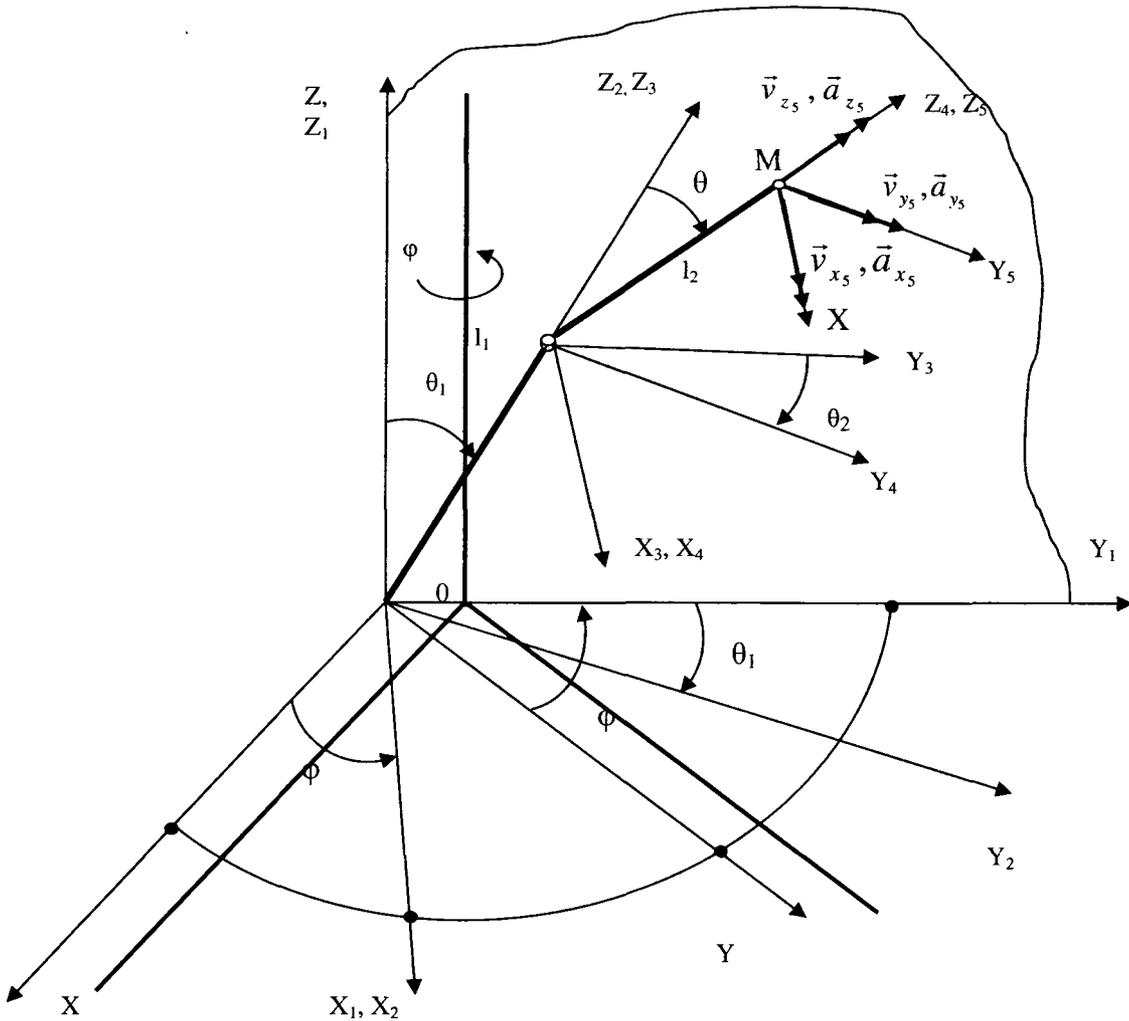


Рис. 2. Расчетная схема двухзвенного исполнительного механизма

Вектор скорости \vec{v} точки M в системе XYZ определяется дифференцированием текущих координат равенства (2) из выражения

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \left(A_\varphi \dot{A}_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\theta}_1 + A_\varphi A_{\theta_1} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_\varphi A_{\theta_1} A_{\theta_2} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Из формулы (4) определяются проекции вектора скорости точки М на неподвижные оси координат XYZ, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = v_x &= -l_1 \left(\cos \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \right) - l_2 \left(\cos \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \sin \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right), \\ \dot{y} = v_y &= l_1 \left(-\sin \varphi \sin \theta_1 \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \right) + l_2 \left(-\sin \varphi \sin(\theta_1 + \theta_2) \dot{\varphi} + \cos \varphi \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right), \\ \dot{z} = v_z &= -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \left(-\sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Модуль скорости точки М найдётся из равенств (5) по формуле

$$v = \sqrt{l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 + l_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2))^2}. \quad (6)$$

В свою очередь вектор скорости \vec{v}_M точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$

$$\vec{v}_M = A^T \vec{v}, \quad (7)$$

где A^T – транспонированная матрица, равная произведению транспонированных матриц-множителей, взятых в обратном порядке: $A^T = A_{\theta_2}^T A_{\theta_1}^T \cdot A_{\varphi}^T$.

Векторы \vec{v} и \vec{v}_M в равенствах (4) и (7) представляют разложение одного и того же вектора \vec{v} по разным базисам систем координат XYZ и $X_5 Y_5 Z_5$. С учётом (4) равенство (7) будет иметь вид

$$\vec{v}_M = A^T \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + A^T \left(A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\varphi} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Из формулы (8) определяются проекции вектора скорости точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\dot{x}_5 = v_{x_5} = 0, \quad \dot{y}_5 = v_{y_5} = l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2, \quad \dot{z}_5 = v_{z_5} = l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta_1 + \theta_2)^2 \quad (9)$$

Модуль скорости точки М определяется из равенств (9) формулой (6), а направление скорости – направляющими косинусами.

Определим ускорение точки М в системе координат XYZ матричным методом. Вектор ускорения \vec{a} точки М определится дифференцированием равенства (4)

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \ddot{\varphi} + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\varphi} + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_1} \dot{\theta}_1^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_1} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + 2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 \end{pmatrix} + \\ &+ (2\dot{A}_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\varphi} + 2A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2^2 + 2A_{\varphi} \dot{A}_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} \ddot{A}_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\theta}_2 + A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 \dot{\varphi} + \\ &+ A_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \ddot{\theta}_2 + \ddot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \dot{\varphi}^2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} \dot{A}_{\theta_2} \dot{\varphi} \dot{\theta}_2 + \dot{A}_{\varphi} A_{\theta_2} A_{\theta_2} \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (10) определяются проекции вектора ускорения точки М на неподвижные оси координат XYZ. Модуль ускорения точки М определяется из равенств (10) по формуле

$$a = \sqrt{\ddot{x}_5^2 + \ddot{y}_5^2 + \ddot{z}_5^2} = \sqrt{a_{x_5}^2 + a_{y_5}^2 + a_{z_5}^2}. \quad (11)$$

Значения $a_{x_5}, a_{y_5}, a_{z_5}$ приведены ниже в (13).

Вектор ускорения \vec{a}_M точки М в системе $X_5 Y_5 Z_5$ (см. рис. 2)

$$\vec{a}_M = A^T \vec{a}. \quad (12)$$

С учётом (10) из равенства (12) получим проекции вектора ускорения точки М на подвижные оси координат $X_5 Y_5 Z_5$, которые имеют вид

$$\begin{aligned}\ddot{x}_5 &= a_{x_5} = 0, \\ \ddot{y}_5 &= a_{y_5} = l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos \theta_2 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2, \\ \ddot{z}_5 &= a_{z_5} = l_1 \dot{\varphi} \sin \theta_1 + l_1 \dot{\varphi} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\varphi} \sin (\theta_1 + \theta_2) + l_2 \dot{\varphi} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin 2(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}\quad (13)$$

Искомые кинематические параметры (9) и (13) показаны на рис. 2. Модуль ускорения точки М определяется формулой (11), а направление ускорения – направляющими косинусами.

Полученные расчётные формулы позволяют определить скорость и ускорение точки М двухзвенного исполнительного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом. Для численного расчёта можно использовать стандартные программы вычисления произведения матриц на ЭВМ.

При заданных $\varphi = \varphi(t)$, $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$ уравнения траектории центра схвата в параметрической форме получим из формулы (3), где роль параметра играет t . Используя транспонированную матрицу A^T , при заданных $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ получим траекторию центра схвата в подвижных координатных осях $X_5 Y_5 Z_5$.

Изложенную методику расчета скорости и ускорения матричным методом можно использовать для двухзвенных и многозвенных исполнительных механизмов с тремя и более степенями подвижности, имеющие исходные расчетные кинематические и конструктивные параметры роботов-манипуляторов в виде $\varphi = \varphi(t)$, l_1, l_2, \dots, l_k , $\theta_1 = \theta_1(t)$, $\theta_2 = \theta_2(t)$, ..., $\theta_k = \theta_k(t)$.

Предлагаемая методика расчета кинематики роботов изложена в учебном пособии по теоретической механике [24]. При рассмотрении кинематики роботов в пособии представлены: расчет кинематических параметров трехзвенного робота-манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения; расчет кинематических параметров в цилиндрических координатах матричным методом; расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом; расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности матричным методом; оценка методов расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грановский Г.И. Кинематика резания. – М.: Машгиз, 1947. – 200 с.
2. Грановский Г.И., Грановский В.Г. Резание металлов: Учебник для студентов машиностроительных и приборостроительных спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 304 с., ил.
3. Ключников И.И., Архангельский А.С. Проходческие комбайны ПКГ-3 и ПКГ-4. – М.: Госгортехиздат, 1961. – 176 с.
4. Барон Л.И., Глатман Л.Б., Губенков Е.К. Разрушение горных пород проходческими комбайнами. – М.: Наука, 1968. – 216 с.
5. Унгефуг В.Г. К теории аналитического расчета кинематических и геометрических параметров отделения стружки от массива инструментом резцовых дисковых исполнительных органов горных машин // Вопросы механизации и автоматизации в горной промышленности: Сб. науч. тр. КНИУИ. – М.: Недра, 1962. Вып. № 11. С. 35-81.
6. Юдин Н.П. Изыскание рациональной конструкции и исследование режимов работы дисковых исполнительных органов (на примере проходческих комбайнов «Караганда»): Дис. ... канд. техн. наук. – М., 1963. – 320 с.
7. Толстых Б.Н. Исследование кинематики планетарных исполнительных органов проходческих комбайнов «Караганда» // Вопросы механизации и автоматизации в горной промышленности: Сб. науч. тр. КНИУИ. – М.: Недра, 1967. – Вып. 20. – С. 87-102.

8. Санкин В.Б. Некоторые вопросы определения параметров шнеко-планетарного исполнительного органа очистного узкозахватного комбайна // Механизация горных пород на угольных шахтах: Сб. науч. тр. ТПИ. – Тула, 1973. – С. 55-64.
9. Локтионов А.В. К методике аналитического расчета кинематических параметров исполнительного механизма // Пути совершенствования технологических процессов в машиностроении. – Мн.: «Университетское», 1990. – С. 150-155.
10. Локтионов А.В. К матричной записи кинематических параметров режущего инструмента горной машины // Изв. Вузов. Машиностроение. М., 1979. №7 – С. 138-141.
11. Локтионов А.В. Методика расчета кинематических параметров корончатых исполнительных органов матричным методом // Механизация горных работ на угольных шахтах. Тула: ТПИ, 1986. – С. 125-132.
12. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров режущего инструмента исполнительных органов проходческих комбайнов. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. Новосибирск, «Наука», 1989. №4. – С. 69-72.
13. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров режущего инструмента исполнительных органов проходческих комбайнов с продольной режущей головкой // Изв. вузов. Горный журнал. 1990. №1. – С. 74-76.
14. Локтионов А.В., Богданов В.Б., Яцков Б. И. Расчет и эффективность исполнительных органов проходческих комбайнов. – Мн.: «Университетское», 1995.- 170 с.
15. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1986.
16. Фролов К.В., Воробьев Е.И. Механика промышленных роботов. Ч. 1. Кинематика и динамика. – М.: Высшая школа, 1988.– 304 с.
17. Локтионов А.В., Гусаков А.В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма // Современные методы проектирования машин: Республ. межведомств. сб. науч. тр. Вып. 2: В 7 т. Т. 2. Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций/ Под общ. ред. П.А. Витязя. – М.: Технопринт, 2004. – С. 132-136.
18. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
19. Бухгольц Н.Н. Основы курс теоретической механики. Ч. 1. – М.: Наука, 1972. – 468 с.
20. Халфман Р.Л. Динамика. – М.: Наука, 1972. – 568 с.
21. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
22. Локтионов А.В. К вопросу расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах. Теоретическая и прикладная механика: Сб. науч. трудов. Под ред. И.П. Филонова. – Мн.: УП «Технопринт», 2002. – 252 с.
23. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом // Теоретическая и прикладная механика: Межведомств. сб. науч.-метод. Ст. – Мн.: Технопринт, 2004. – С.115-118.
24. Теоретическая механика, статика и кинематика: учебное пособие / Локтионов А.В., Крыгина Л.Г.; УО «ВГТУ». – Витебск, 2005. – 171 с.