Брестский государственный технический университет

К РЕШЕНИЮ ПЛОСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ И МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЕЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Хвисевич В.М.

On the basis of the theory of potential and of a source function are constructed the singular integrated equations of a flat regional problem of thermoelasticity for external and multicoherent internal area. It has developed algorithm of numerical realization of the integrated equations by means of Gauss square formulas. Reliability of the received equations is confirmed by the decision of test problems. Comparison of the received results with analytical decisions has shown high accuracy of algorithm.

Рассмотрим плоскую внешнюю D^- или внутреннюю D^+ многосвязную область, на границе которой L заданы значения механических усилий $p_i = f_i(x_L)$ и температуры $T = F(x_L)$ (т.е. для T имеем задачу Дирихле).

Предполагается, что деформирование механическими усилиями не приводит к изменению температуры в области. Температура T определяется как решение независимого интегрального уравнения краевой задачи теплопроводности.

Большинство авторов решает температурную задачу Дирихле по методу ньютоновского потенциала так называемым прямым или непрямым способом. Как известно, в прямом способе решение для T берется в виде формулы Грина, а в непрямом способе представляется потенциалом двойного слоя [1].

$$T(x) = \int_L \chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y. \tag{1}$$

Здесь φ - угол между вектором $\bar{r} = |y - x|$ и внешней нормалью $n_i(y)$ проведенной к L в точке интегрирования y, x – параметрическая точка, $\chi(y)$ - плотность потенциала двойного слоя.

Формула Грина позволяет представить температуру в области D^- или D^+, однако присутствие потенциалов простого и двойного слоев создает некоторые сложности при численном решении задачи.

Решение (1) можно применять только в случае внутренней односвязной области. Это объясняется тем, что потенциал двойного слоя представляет температуру внешней или внутренней многосвязной области лишь частично, т.е. им не учитывается влияние средней температуры (случай J по Н.М. Гюнтеру [1]).

Недостаток решения устраняем, дополнив (1) точечными источниками определенной мощности [2].

$$T(x) = \int_L \chi(y)\frac{\cos\varphi}{r}dl_y + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln\frac{1}{r_{AK}}, \tag{2}$$

где A_k - мощность источников, расположенных во внутренних контурах L_k, r_{Ak} - расстояние от точки x до источника.

Через L_e обозначим охватывающий контур $k+1$ - связанной области.

Такой прием известен в теории гармонических функций, однако, практического применения для решения краевых задач термоупругости методом потенциала он не находил.

Константы A_k определяются через среднее значение температур на L_k, которое легко вычислить из граничного условия.

$$T^{(m)} = \int_L F \cdot dl \ . \tag{3}$$

В граничных точках контуров L_k потребуем, чтобы было

$$T_k^{(m)} = \frac{1}{L_{k+1}} \sum_{i=1}^{n} A_i \int_{L_i} \ln \frac{1}{r_{Ai}} dl_y + 2\pi\chi^{(m)} \ . \tag{4}$$

Это предлагает условие Дирихле для $T^{(m)}$, т.к. потенциал двойного слоя в (2) равен нулю.

На основе (2) получается интегральное уравнение краевой задачи Дирихле для многосвязной (внешней) области и после его решения определяется плотность $\chi(y)$.

Решение дифференциальных уравнений плоской задачи квазистационарной термоупругости разыскиваем с помощью градиента некоторой бигармонической функции. Выполнив преобразования, получим формулу бигармонической функции, которая представлена контурным интегралом и алгебраической суммой

$$W = -\frac{a}{4}\left\{ \int_L \chi(y) \cdot \cos\varphi (1 - 2\ln r) dl_y + \sum_{i=1}^{n} A_k \left[r_{A_k} \left(1 - \ln r_{A_k}\right)\right]\right\}, \tag{5}$$

где $a = \alpha \dfrac{1+\nu}{1-\nu}$, α - коэффициент линейного расширения, ν - коэффициент Пуассона.

Используя (5) получаем новые интегральные представления температурных перемещений и напряжений для $\chi \in l$

$$u_i^T = -\frac{a}{4}\left\{ \int_L \chi(y)[n_i(y)(2\ln r - 1) + 2\beta_i \cos\varphi] dly + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\beta^{(A_k)} r_{A_k} \left(2\ln r_{A_k} - 1\right)\right]\right\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^T = a\mu \Bigg\{ & 2\pi\chi(x_L)[n_i(x_i) - \delta_{ij}] + \vartheta.p. \int_L \frac{\chi(y)}{r}[n_i(y)\beta_j + n_j(y)\beta_i - 2(\beta_i\beta_j - \delta_{ij})\cos\varphi] dl_y + \\ & + \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\beta_{Ai}^{(k)} \beta_{Aj}^{(k)} - \left(\frac{1}{2} + \ln r_{Ak}\right)\delta_{ij} \right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{7}$$

где μ - модуль сдвига, β_i - направляющие косинусы вектора r.

Полные перемещения и напряжения определяются как

$$u_i = u_i^0 + u_i^T; \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^T \ . \tag{8}$$

здесь σ_{ij}^0 - соответствуют решению σ_i^0 дифференциальных уравнений теории упругости и их интегральные представления приведены в работе [3].

Подставляя σ_{ij} в граничные условия второй краевой задачи получаем систему сингулярных уравнений плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости.

$$\begin{aligned}&\nu_i(x)+\frac{1}{2\pi(1-\nu)}\int_L \frac{1}{r}\langle \nu_i(y)\left[(1-2\nu)-2\beta_i^2\right]\cos\psi+\{[n_k(y)\beta_i-n_i(y)\beta_k](1-2\nu)+\\&+2\beta_i\beta_k\cos\psi\}\nu_k(y)\rangle dl_y=f_i(x_L)+f_i^T(x_L),\end{aligned}\tag{9}$$

где $\nu_i(y)$ - плотность потенциала простого слоя [1],

$$f_i^T(x_L)=\sigma_{ij}^T\cdot n_j \tag{10}$$

Последовательность решения рассматриваемой задачи следующая: сначала решается интегральное уравнение краевой задачи теплопроводности относительно плотности $\chi(y)$, после чего вычисляются (6) и (7). Затем с учетом (10) решается система СИУ (9), в результате решения которой находим $\nu_i(y)$. Напряжения $\sigma_i(y)$ и перемещения u_i определяем по формулам (8).

Проведенные выкладки относятся для области D^+. Если рассматриваемая область D^-, то в (4) вместо слагаемого $2\pi\chi_e^m$ записывается температура в бесконечности T_∞, а в (7) добавляются напряжения σ_{ij}^∞.

Для численного решения СИУ с учетом методик работы [4], разработан алгоритм и программа для ЭВМ. Рассматриваемая область может быть кусочно-гладкой. Неизвестная плотность потенциала интерполируется полиномом Лагранжа. Сингулярные интегралы в (6), (7), (9) вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса с четным числом узлов.

Достоверность полученных формул подтверждена решением тестовых примеров: краевые задачи для СИУ- а) во внутренней кольцеобразной области (рис. 1); б) во внешней односвязной области (рис. 2). С учетом симметрии и нагружения достаточно рассмотреть ¼ часть областей.

Внешний контур области а) был разбит на 7, в внутренний на 5 отрезков интегрирования. Контур области (б) аппроксимирован 7 отрезками. Сравнение результатов численного решения этих задач с известными аналитическими решениями показало высокую точность алгоритма (погрешность составила сотые доли процента).

Таким образом, с помощью дополнения решения (1) простыми источниками определенной мощности получены новые СИУ плоской краевой задачи квазистационарной термоупругости для внешней и многосвязной областей. В отличие от прямого способа полученные на основе (5) формулы проще и их легче реализовать численно.

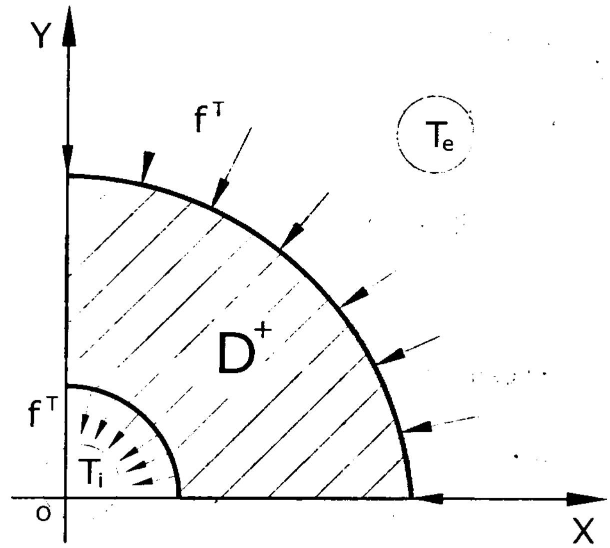

Рис. 1 Расчетная схема задачи «А».

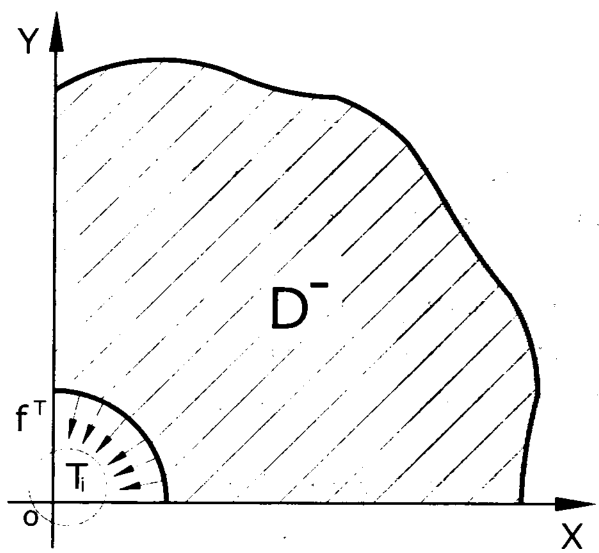

Рис. 2 Расчетная схема задачи «Б».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гос. Издательство техн. – теоретической литературы. – 1953. - 414 с.

2. Хвисевич В.М. О решении температурной внешней и внутренней задачи Дирихле теории потенциала в многосвязной области //ИФЖ.-Мн, 1991.т.61.№5 – С.858-862.

3. Копейкин Ю.Д, Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела// Диссертация на соискание уч.ст.докт.физ.-мат. Наук. М. 1969, -280 с.

4. Бормот Ю.Л. Численное решение СИУ плоской задачи теории упругости// Проектирование металлических конструкций. Реферативный сборник. Сер. 7. – М.: ЦИНИС Госстроя СССР. 1974. –Вып.4.(51).-С.17-19.