

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУЛИСТНОГО КОЛЬЦА

Сильвестров В.В., Смирнов А.В.

The first basic boundary-value problem of elasticity theory for two-sheeted ring is solved in an explicit form using the power series method. The construction is formed from two identical rings, which are joined with one another along boundary circumferences. The Kolosov-Muskhelishvili complex potentials are found, and the stressed state of rings is investigated.

Методом степенных рядов решается первая краевая задача теории упругости для двулистного кольца, образованного из двух одинаковых колец путем наложения их друг на друга и соединения вдоль граничных окружностей. Находятся комплексные потенциалы Колосова–Мусхелишвили, исследуется напряженное состояние колец.*

1. Постановка задачи. Пусть две тонкие упругие пластины S_1 и S_2 , занимающие на комплексной плоскости $z = x + iy$ одну и ту же область $R_1 \leq |z| \leq R_2$, наложены одна на другую и соединены друг с другом жестко вдоль окружностей $L_1 : |z| = R_1$ и $L_2 : |z| = R_2$. Пластины являются однородными, изотропными и имеют толщины, модули сдвига, коэффициенты Пуассона h_1, μ_1, ν_1 и h_2, μ_2, ν_2 соответственно. На линиях соединения пластин действуют расположенные в плоскостях пластин заданные внешние усилия

$$N_j(t) + iT_j(t) = p_j(t), \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.1)$$

где N_j – нормальная, а T_j – касательная компонента вектора внешних усилий, действующих на касательную площадку к линии L_j в точке t . Поверхности пластин касаются друг друга без трения, и передача усилий с одной пластины в другую происходит только через линии их соединения, на которых выполняются условия жесткого соединения:

$$u_1(t) + iv_1(t) = u_2(t) + iv_2(t), \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

где $u_k + iv_k$ – вектор смещений точек пластины S_k ($k = 1, 2$).

Будем считать, что изгиб и пространственные эффекты концентрации напряжений на линиях соединения, а также в точках пластин пренебрежимо малы и в них реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, определяемое по формулам Колосова–Мусхелишвили [1]

$$\begin{aligned} (\sigma_r + \sigma_\theta)_k(z) &= 4\operatorname{Re}\Phi_k(z), \\ (\sigma_r + i\tau_{r\theta})_k(z) &= \Phi_k(z) + \overline{\Phi_k(z)} - z\overline{\Phi'_k(z)} - z^{-1}\overline{z\Psi'_k(z)}, \\ 2\mu_k \frac{\partial}{\partial\theta}(u + iv)_k(z) &= iz(\kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)} + z\overline{\Phi'_k(z)} + z^{-1}\overline{z\Psi'_k(z)}), \\ 2\mu_k \frac{\partial}{\partial r}(u + iv)_k(z) &= e^{i\theta}(\kappa_k\Phi_k(z) - \overline{\Phi_k(z)}) - r\overline{\Phi'_k(z)} - e^{-i\theta}\overline{z\Psi'_k(z)}, \\ z \in S_k, \quad \kappa_k &= (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00160.

где $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений в полярных координатах r, θ ($re^{i\theta} = x + iy$), функции и параметры с индексом $k=1$ соответствуют пластине S_1 , а с индексом $k=2$ – пластине S_2 . Все напряжения, здесь и далее, берутся в расчете на единицу толщины пластины, в то время, как внешние усилия в условиях (1.1) берутся в расчете на всю толщину линий соединения пластин, поэтому эти условия имеют вид

$$h_1(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_1(t) + h_2(\sigma_r + i\tau_{r\theta})_2(t) = p_j(t), \quad t \in L_j, \quad j=1,2. \quad (1.4)$$

Функции $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ (комплексные потенциалы) аналитичны и однозначны в области S_k ($k=1,2$). В силу формул (1.3) и условий (1.2), (1.4) они должны удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned} \mu_2(\kappa_1\Phi_1(t) - \overline{\Phi_1(t)} + i\overline{\Phi_1'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) &= \mu_1(\kappa_2\Phi_2(t) - \overline{\Phi_2(t)} + i\overline{\Phi_2'(t)} + t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}), \\ h_1(\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - t\overline{\Phi_1'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_1(t)}) + h_2(\Phi_2(t) + \overline{\Phi_2(t)} - t\overline{\Phi_2'(t)} - t^{-1}\overline{t\Psi_2(t)}) &= p_j(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$t = R_j e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2.$$

Требуется найти комплексные потенциалы $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$ и напряжения в пластинах $S_k, k=1,2$.

2. Решение задачи. Запишем заданные функции $p_j(t), t \in L_j, j=1,2$, как функции от полярного угла θ :

$$p_j(t) = p_j(R_j e^{i\theta}) = g_j(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2. \quad (2.1)$$

Как и при решении основных задач теории упругости для кольца [1], будем считать функции $g_k(\theta)$ непрерывно-дифференцируемыми на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющими условиям $g_j(0) = g_j(2\pi), g_j'(0) = g_j'(2\pi), j=1,2$, и имеющими вторые производные, удовлетворяющие условию Дирихле. Тогда эти функции разлагаются в комплексные ряды Фурье:

$$g_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{n,j} e^{in\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad j=1,2, \quad (2.2)$$

$$A_{n,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_j(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.3)$$

коэффициенты которых удовлетворяют неравенствам

$$|A_{n,j}| \leq M/|n|^3, \quad M = \text{const} > 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j=1,2. \quad (2.4)$$

Будем искать комплексные потенциалы в виде рядов Лорана

$$\Phi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} z^n, \quad \Psi_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n,k} z^n, \quad z \in S_k, \quad k=1,2. \quad (2.5)$$

Однозначность смещений в пластинах S_1 и S_2 накладывает на коэффициенты этих рядов два условия

$$\kappa_k a_{-1,k} + \overline{b_{-1,k}} = 0, \quad k=1,2. \quad (2.6)$$

Предположим, что ряды (2.5) и ряды

$$\Phi_k'(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n a_{n,k} z^{n-1}, \quad z \in S_k, \quad k=1,2 \quad (2.7)$$

сходятся равномерно в замкнутой области $R_1 \leq |z| \leq R_2$. Тогда, подставив выражения функций $\Phi_k(t), \Psi_k(t)$ и производных $\Phi_k'(t)$ в условия (1.5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов (2.5), которая распадается на отдельные конечные сис-

темы относительно коэффициентов $a_{\pm n,1}, a_{\pm n,2}, b_{-2\pm n,1}, b_{-2\pm n,2}$ при каждом конкретном значении $n = 0, 1, \dots$

При $n = 0$ соответствующая система состоит из четырех уравнений

$$\begin{aligned} \kappa_1 a_{0,1} - \mu_* \kappa_2 a_{0,2} - \bar{a}_{0,1} + \mu_* \bar{a}_{0,2} + (\bar{b}_{-2,1} - \mu_* \bar{b}_{-2,2}) R_j^{-2} &= 0, \\ h_* a_{0,1} + a_{0,2} + h_* \bar{a}_{0,1} + \bar{a}_{0,2} - (h_* \bar{b}_{-2,1} + \bar{b}_{-2,2}) R_j^{-2} &= B_{0,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mu_* = \mu_1/\mu_2$, $h_* = h_1/h_2$, $B_{0,j} = A_{0,j}/h_2$. Все коэффициенты системы (2.8) действительны, поэтому она в свою очередь распадается на две отдельные системы относительно действительных и мнимых частей неизвестных $a_{0,1}, a_{0,2}, b_{-2,1}, b_{-2,2}$ соответственно. Система относительно действительных частей этих неизвестных имеет ненулевой определитель, поэтому она разрешима однозначно, а определитель системы относительно мнимых частей указанных неизвестных равен нулю, в силу чего она разрешима тогда и только тогда, когда

$$R_1^2 \operatorname{Im} A_{0,1} = R_2^2 \operatorname{Im} A_{0,2}. \quad (2.9)$$

При выполнении условия (2.9) решение системы (2.8) находится по формулам

$$\begin{aligned} a_{0,1} &= \alpha_0 \mu_* (\kappa_2 - 1) + i\beta_0, \quad a_{0,2} = \alpha_0 (\kappa_1 - 1) + i\beta_0 \frac{\kappa_1 + 1}{\mu_* (\kappa_2 + 1)}, \\ b_{-2,1} &= \mu_* (\alpha_1 + i\beta_1), \quad b_{-2,2} = \alpha_1 + i\beta_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где β_0 - произвольная действительная постоянная и

$$\alpha_0 = \frac{R_1^2 \operatorname{Re} B_{0,1} - R_2^2 \operatorname{Re} B_{0,2}}{2(R_1^2 - R_2^2)(h_* \mu_* (\kappa_2 - 1) + \kappa_1 - 1)}, \quad \alpha_1 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\operatorname{Re} B_{0,1} - \operatorname{Re} B_{0,2})}{(R_1^2 - R_2^2)(h_* \mu_* + 1)}, \quad \beta_1 = \frac{R_1^2 \operatorname{Im} B_{0,1} + R_2^2 \operatorname{Im} B_{0,2}}{2(h_* \mu_* + 1)}.$$

Из формул (1.3) и (2.5) видно, что значение постоянной β_0 на напряженное состояние пластин не влияет, поэтому, без ограничения общности, можно брать $\beta_0 = 0$.

Условие (2.9) согласно (2.3), (1.1) имеет вид

$$R_1 \int_{L_1} T_1(t) ds = R_2 \int_{L_2} T_2(t) ds$$

(ds - дифференциал длины дуги) и выражает равенство нулю главного момента (относительно начала координат) внешних усилий, приложенных к совокупности линий L_1, L_2 .

При $n = 1, 2, \dots$ система уравнений для нахождения восьми неизвестных $a_{\pm n,k}, b_{-2\pm n,k}$, $k = 1, 2$, состоит из четырех уравнений

$$\begin{aligned} (\kappa_1 a_{n,1} - \mu_* \kappa_2 a_{n,2}) R_j^n - (n+1)(\bar{a}_{-n,1} - \mu_* \bar{a}_{-n,2}) R_j^{-n} + (\bar{b}_{-n-2,1} - \mu_* \bar{b}_{-n-2,2}) R_j^{-n-2} &= 0, \\ (h_* a_{n,1} + a_{n,2}) R_j^n + (n+1)(h_* \bar{a}_{-n,1} + \bar{a}_{-n,2}) R_j^{-n} - (h_* \bar{b}_{-n-2,1} + \bar{b}_{-n-2,2}) R_j^{-n-2} &= B_{n,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

и уравнений, получаемых из приведенных заменой n на $-n$:

$$\begin{aligned} (\kappa_1 a_{-n,1} - \mu_* \kappa_2 a_{-n,2}) R_j^{-n} - (1-n)(\bar{a}_{n,1} - \mu_* \bar{a}_{n,2}) R_j^n + (\bar{b}_{n-2,1} - \mu_* \bar{b}_{n-2,2}) R_j^{n-2} &= 0, \\ (h_* a_{-n,1} + a_{-n,2}) R_j^{-n} + (1-n)(h_* \bar{a}_{n,1} + \bar{a}_{n,2}) R_j^n - (h_* \bar{b}_{n-2,1} + \bar{b}_{n-2,2}) R_j^{n-2} &= B_{-n,j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $B_{n,j} = A_{n,j}/h_2$. Выделив у уравнений (2.11), (2.12) их вещественные и мнимые части, получим две вещественные системы относительно действительных и мнимых частей неизвестных соответственно. Обе эти системы имеют один и тот же определитель

$$\begin{aligned} \Delta_n &= R_*^{-4n-4} (h_* \mu_* + 1)^2 (R_*^2 (R_*^{2n-1} - 1)^2 - n^2 R_*^{2n} (R_*^2 - 1)^2) \left((R_*^{2n} - R_*^2) (R_*^{2n+2} - 1) (h_* \mu_* \kappa_2 + \kappa_1)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (n^2 - 1) R_*^{2n} (R_*^2 - 1)^2 (h_* \mu_* + 1)^2 \right), \quad R_* = R_1 R_2^{-1}, \end{aligned}$$

который при $n = 1$ обращается в нуль, а при остальных $n = 2, 3, \dots$ отличен от нуля. Следовательно, система (2.11), (2.12) при $n = 2, 3, \dots$ однозначно разрешима. В частности, если свободные члены $B_{n,j} = B_{-n,j} = 0$, $j = 1, 2$, что имеет место, например, при постоянных внешних нагрузках $p_j(t) \equiv \text{const}$, $j = 1, 2$, на линиях соединения пластин, то система (2.11), (2.12) при $n = 2, 3, \dots$ имеет лишь тривиальное решение.

При $n = 1$ система (2.11), (2.12) разрешима тогда и только тогда, когда

$$R_1 A_{-1,1} = R_2 A_{-1,2}, \quad (2.13)$$

что в силу (2.3), (1.1) равносильно условию

$$\int_{L_1} p_1(t) e^{i \arg t} ds = \int_{L_2} p_2(t) e^{i \arg t} ds,$$

выражающему равенство нулю главного вектора внешних усилий, приложенных к линиям соединения L_1, L_2 . При выполнении условия (2.13) решение системы зависит от двух комплексных постоянных C_1, C_2 и находится по формулам

$$a_{-1,1} = (R_1 B_{-1,1} + R_2 B_{-1,2}) (2h_* (1 + \kappa_1))^{-1} + \mu_* (1 + \kappa_2) C_1 + (1 + h_* \mu_*) C_2,$$

$$a_{-1,2} = (\kappa_1 - h_* \mu_*) C_1,$$

$$b_{-1,1} = -\kappa_1 (R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2}) (2h_* (1 + \kappa_1))^{-1} + (h_* \mu_* - \kappa_1) \bar{C}_2,$$

$$b_{-1,2} = (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \bar{C}_1 + h_* (1 + \kappa_1) \bar{C}_2,$$

$$a_{1,1} = \frac{1}{(\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2)} \left(\frac{\mu_* \kappa_2 (R_1^3 B_{1,1} - R_2^3 B_{1,2})}{R_1^2 - R_2^2} + \frac{(1 - h_* \mu_* \kappa_2)(R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2})}{h_* (1 + \kappa_1)} + 2\mu_* (1 + \kappa_2) (h_* \mu_* (1 - \kappa_2) - \kappa_1 + 1) \bar{C}_1 + 2(1 - h_* \mu_* \kappa_2) (1 + h_* \mu_*) \bar{C}_2 \right),$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{(\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2)(R_1^2 + R_2^2)} \left(\frac{\kappa_1 (R_1^3 B_{1,1} - R_2^3 B_{1,2})}{R_1^2 - R_2^2} - (R_1 \bar{B}_{-1,1} + R_2 \bar{B}_{-1,2}) - 2(h_*^2 \mu_*^2 + h_* \mu_* (\kappa_1 \kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_2 + 1) + \kappa_1^2) \bar{C}_1 - 2h_* (1 + h_* \mu_*) (1 + \kappa_1) \bar{C}_2 \right), \quad (2.14)$$

$$b_{-3,1} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{\mu_* R_1 R_2 (R_2 \bar{B}_{1,1} - R_1 \bar{B}_{1,2})}{(1 + h_* \mu_*) (R_1^2 - R_2^2)} + \frac{R_1 B_{-1,1} + R_2 B_{-1,2}}{h_* (1 + \kappa_1)} + 2\mu_* (1 + \kappa_2) C_1 + 2(1 + h_* \mu_*) C_2 \right),$$

$$b_{-3,2} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \left(\frac{R_1 R_2 (R_2 \bar{B}_{1,1} - R_1 \bar{B}_{1,2})}{(1 + h_* \mu_*) (R_1^2 - R_2^2)} + 2(\kappa_1 - h_* \mu_*) C_1 \right), \quad j = 1, 2.$$

Для нахождения постоянных C_1, C_2 воспользуемся одним из условий (2.6) (другое является следствием первого) и условием

$$\frac{1}{\mu_1} \int_{R_1}^{R_2} (\kappa_1 \Phi_1(r) - \overline{\Phi_1(r)} - r \overline{\Phi_1'(r)} - \overline{\Psi_1(r)}) dr = \frac{1}{\mu_2} \int_{R_1}^{R_2} (\kappa_2 \Phi_2(r) - \overline{\Phi_2(r)} - r \overline{\Phi_2'(r)} - \overline{\Psi_2(r)}) dr,$$

выражающим однозначность смещений при обходе замкнутого контура, составленного из двух отрезков $[R_1, R_2]$ действительной оси, расположенных в пластинах S_1 и S_2 соответственно. В силу (2.5), (2.6) и (2.11), (2.12) последнее условие имеет вид

$$(R_1^2 - R_2^2) (\bar{a}_{1,1} - \mu_* \bar{a}_{1,2}) + 2(\kappa_1 a_{-1,1} - \mu_* \kappa_2 a_{-1,2}) \ln(R_2/R_1) = 0. \quad (2.15)$$

Из уравнений (2.6) и (2.15) находим

$$\begin{aligned} C_1 &= -R_2 \left((R_*^3 \bar{B}_{1,1} - \bar{B}_{1,2}) \delta_1 + (R_* \bar{B}_{-1,1} + \bar{B}_{-1,2}) \delta_2 \right) \delta_0^{-1}, \\ C_2 &= R_2 \kappa_1 (1 + \kappa_2) \left((R_*^3 \bar{B}_{1,1} - \bar{B}_{1,2}) \delta_1 + (R_* \bar{B}_{-1,1} + \bar{B}_{-1,2}) \delta_2 \right) (\delta_0 h_* (1 + \kappa_1))^{-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\delta_0 = 2(h_* \mu_* - \kappa_1) \left[(R_*^2 - 1) \left((1 + h_* \mu_*)^2 + (h_* \mu_* \kappa_1 + \kappa_2)(1 + h_* \mu_*) - h_* \mu_* (\kappa_1 - \kappa_2)^2 \right) - (R_*^2 + 1) (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \left((1 + h_* \mu_*) \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2 \right) \ln R_* \right],$$

$$\delta_1 = h_* \mu_* (\kappa_2 - \kappa_1 (\kappa_1 - \kappa_2 + 1)),$$

$$\delta_2 = (R_*^2 - 1)(h_* \mu_* (\kappa_1 - \kappa_2) + h_* \mu_* + 1) - (R_*^2 + 1) \kappa_1 (\kappa_1 + h_* \mu_* \kappa_2) \ln R_*, \quad R_* = R_1 R_2^{-1}.$$

Таким образом, все коэффициенты рядов (2.5) найдены. Анализ системы уравнений (2.10), (2.11) при больших положительных n с учетом неравенств (2.4) показывает, что

$$\begin{aligned} |a_{n,k}| &\leq M_1 R_2^{-n} n^{-3}, & |b_{n,k}| &\leq M_1 R_2^{-n} n^{-3}, & M_1 &= \text{const} > 0, \\ |a_{-n,k}| &\leq M_2 R_1^n n^{-3}, & |b_{-n,k}| &\leq M_2 R_1^n n^{-3}, & M_2 &= \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из последних неравенств следует, что ряды (2.5) и (2.7) в области $R_1 \leq |z| \leq R_2$ сходятся абсолютно и равномерно, чем обеспечивается правомерность всех произведенных выше операций над ними.

3. Напряженное состояние в случае постоянной внешней нагрузки. Пусть к внутренней границе L_1 двулистного кольца приложено постоянное внешнее нормальное усилие $N_1(t) = (h_1 + h_2)\sigma_1$, а к внешней границе L_2 – постоянное усилие $N_2(t) = (h_1 + h_2)\sigma_2$. Касательные усилия на обеих линиях отсутствуют. В этом случае $p_j(t) = (h_1 + h_2)\sigma_j$, $j = 1, 2$, и все коэффициенты рядов (2.2) равны нулю, кроме $A_{0,j} = (h_1 + h_2)\sigma_j$, $j = 1, 2$, поэтому условия разрешимости задачи (2.9), (2.13) выполнены. Так как системы (2.11), (2.12) при всех $n = 1, 2, \dots$ являются однородными, то они имеют лишь тривиальное решение. Следовательно, согласно (2.5), (2.10) комплексные потенциалы

$$\Phi_1(z) = \mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0, \quad \Phi_2(z) = (\kappa_1 - 1) \alpha_0, \quad \Psi_1(z) = \mu_* \alpha_1 z^{-2}, \quad \Psi_2(z) = \alpha_1 z^{-2},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{(1 + h_*) (R_1^2 \sigma_1 - R_2^2 \sigma_2)}{2(R_1^2 - R_2^2) (h_* \mu_* (\kappa_2 - 1) + \kappa_1 - 1)}, \quad \alpha_1 = \frac{(1 + h_*) R_1^2 R_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{(R_1^2 - R_2^2) (1 + h_* \mu_*)}, \quad h_* = \frac{h_1}{h_2}, \quad \mu_* = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

и на основании формул (1.3) находим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= 2\mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0 - \mu_* \alpha_1 |z|^{-2}, & \sigma_{\theta 1} &= 2\mu_* (\kappa_2 - 1) \alpha_0 + \mu_* \alpha_1 |z|^{-2}, & \tau_{r\theta 1} &= 0, \\ \sigma_{r2} &= 2(\kappa_1 - 1) \alpha_0 - \alpha_1 |z|^{-2}, & \sigma_{\theta 2} &= 2(\kappa_1 - 1) \alpha_0 + \alpha_1 |z|^{-2}, & \tau_{r\theta 2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

откуда видно, что напряжения зависят лишь от полярного радиуса r точки $z = r e^{i\theta}$. Анализ формул (3.1) показывает, что с ростом r при $\sigma_1 < \sigma_2$ напряжения σ_{r1}, σ_{r2} монотонно возрастают, а напряжения $\sigma_{\theta 1}, \sigma_{\theta 2}$ монотонно убывают; при $\sigma_1 > \sigma_2$ напряжения σ_{r1}, σ_{r2} убывают, а напряжения $\sigma_{\theta 1}, \sigma_{\theta 2}$ возрастают; при $\sigma_1 = \sigma_2$ все напряжения постоянны. На рис. 1 приведены графики напряжений $\sigma_{r1}, \sigma_{\theta 1}$ и $\sigma_{r2}, \sigma_{\theta 2}$ (кривые 1 и 2 соответственно) в зависимости от r для случая $N_1 = (h_1 + h_2)\sigma$, $N_2 = 0.5(h_1 + h_2)\sigma$ ($\sigma > 0$), когда пластины S_1 и S_2 , имеющие упругие постоянные и толщины $\nu_1 = 0.37$, $\mu_1 = 40$ МПа, $h_1 = 0.5h$ и $\nu_2 = 0.22$, $\mu_2 = 174$ МПа, $h_2 = h$ ($h > 0$) соответственно, соединены друг с другом вдоль окружностей $L_1: |z| = 0.5R$ и $L_2: |z| = R$ ($R > 0$). Пунктирными линиями 3 на этих рисунках изображены графики напряжений в одной из пластин, когда второй пластины нет, и на граничных линиях

L_1, L_2 действуют постоянные внешние нормальные усилия $N_1 = (h_1 + h_2)\sigma$, $N_2 = 0.5(h_1 + h_2)\sigma$.

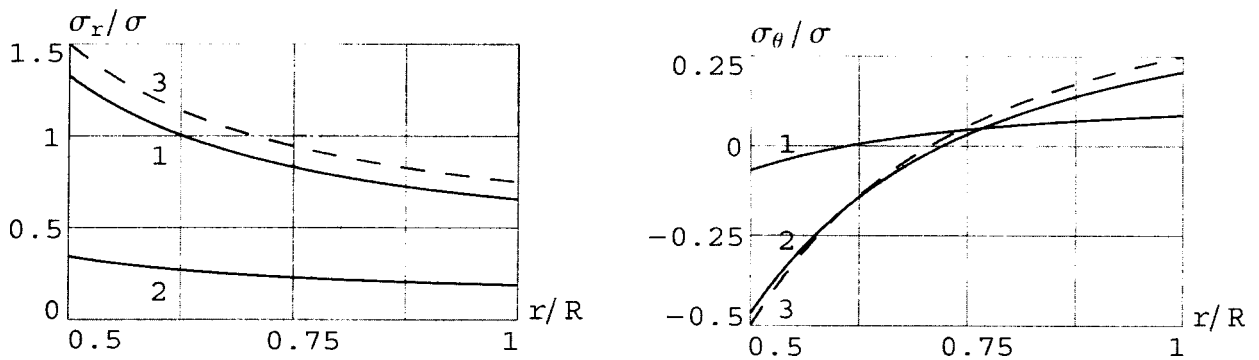


Рис. 1.

Пусть к линиям соединения L_1 и L_2 пластин приложены постоянные внешние касательные усилия $T_1(t) = (h_1 + h_2)\tau$ и $T_2(t) = (h_1 + h_2)R_1^2 R_2^{-2}\tau$ ($\tau = \text{const}$) соответственно, а нормальные усилия отсутствуют. Тогда функции $p_j(t) = iT_j(t)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют условиям (2.9), (2.13) и аналогично предыдущему случаю находим

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = \Phi_2(z) = 0, \quad \Psi_1(z) = i\mu_*\alpha_2 z^{-2}, \quad \Psi_2(z) = i\alpha_2 z^{-2}, \\ \tau_{r\theta 1} = \mu_*\alpha_2 |z|^{-2}, \quad \tau_{r\theta 2} = \alpha_2 |z|^{-2}, \quad \sigma_{rk} = 0, \quad \sigma_{\theta k} = 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\alpha_2 = R_1^2(1 + h_*)(1 + h_*\mu_*)^{-1}\tau$. В данном случае нормальные напряжения σ_r, σ_θ во всех точках области отсутствуют, а касательные напряжения $\tau_{r\theta 1}, \tau_{r\theta 2}$ снова зависят только от полярного радиуса r , и с ростом r они монотонно убывают по модулю.

4. Зависимость напряжений от упругих и геометрических параметров. Пусть пластины S_1 и S_2 имеют упругие постоянные и толщины $\nu_1 = 0.37$, $\mu_1 = 40$ МПа, $h_1 = 0.5h$ и $\nu_2 = 0.22$, $\mu_2 = 174$ МПа, $h_2 = h$ ($h > 0$) соответственно. Их внутренняя линия соединения $L_1: |z| = 0.5R$ свободна от внешних усилий, а на внешней линии соединения $L_1: t = R e^{i\theta}$ ($R = \text{const} > 0$) действует нормальное внешнее усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, в то время, как внешнее касательное усилие отсутствует. В этом случае напряжения в пластинах зависят как от полярного радиуса r , так и от полярного угла θ . Их графики на окружностях L_1 и L_2 приведены на рис. 2. Кривые 1, здесь и далее, соответствуют напряжениям в пластине S_1 , кривые 2 – напряжениям в пластине S_2 , а пунктирные линии 3 соответствуют напряжениям в одной из пластин S_1 или S_2 при отсутствии другой, когда на внешней границе L_2 действует то же нормальное усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

На рис. 3 приведены графики напряжений, когда внутренняя граница L_1 свободна от внешних усилий, а на внешней границе L_2 действует касательное внешнее усилие $T_2 = \tau(h_1 + h_2)\sin 2\theta$, $\tau = \text{const}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Нормальное внешнее усилие на L_2 в данном случае отсутствует.

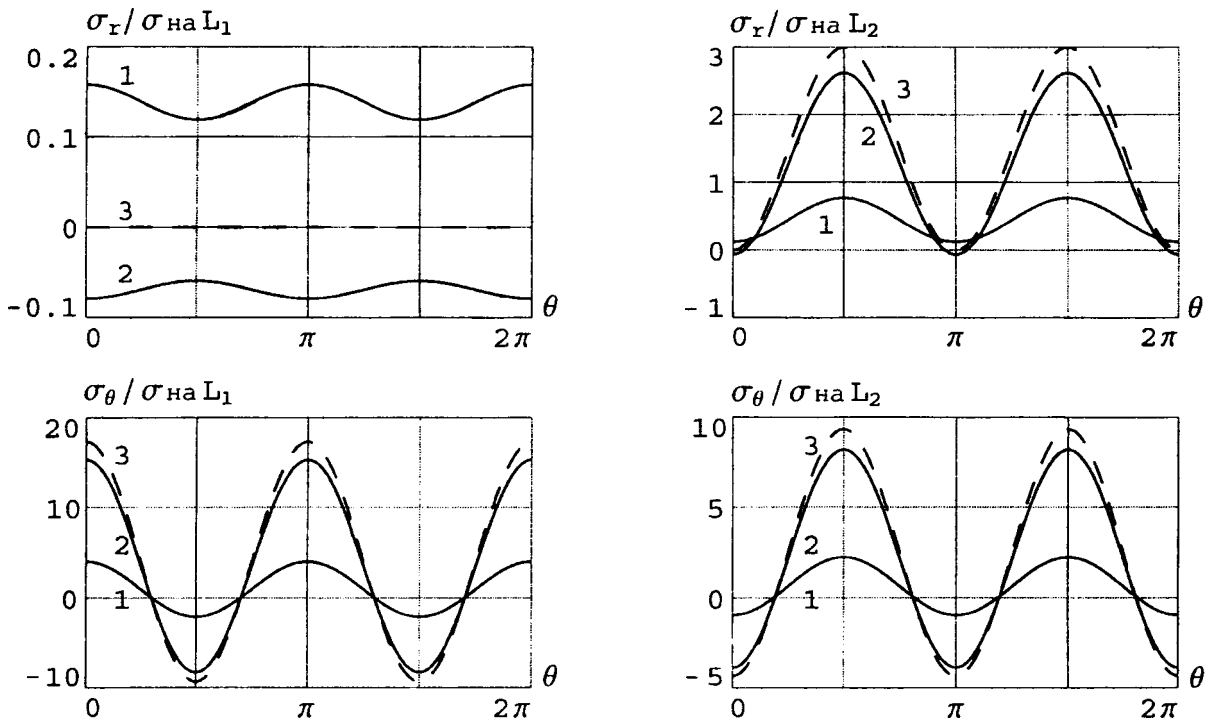


Рис. 2.

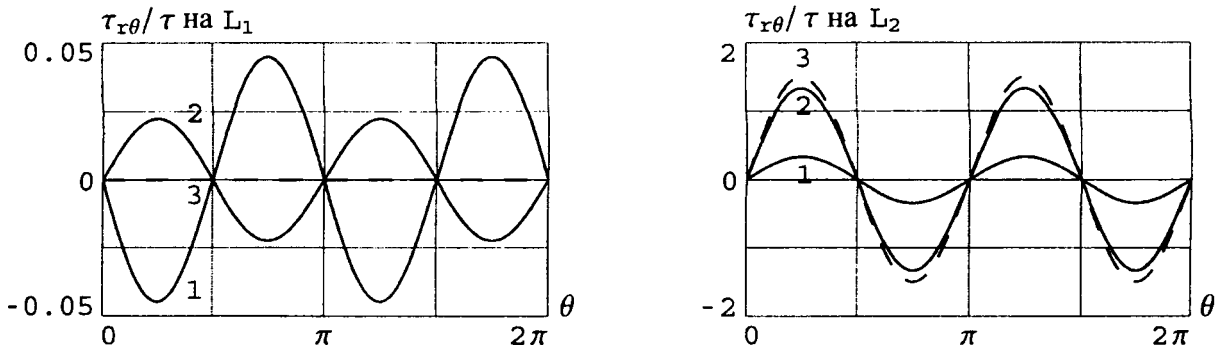


Рис. 3.

На примере двулистной пластины $S_1 \cup S_2$ и одной отдельной пластины S_1 или S_2 , внутренние границы L_1 которых свободны от внешних усилий, а на внешних L_2 действует лишь нормальное внешнее усилие $N_2 = \sigma(h_1 + h_2)(1 - \cos 2\theta)$, $\sigma = \text{const}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, рассмотрим зависимость напряжений на L_1 , L_2 от отношений $R_* = R_1/R_2$, $h_* = h_1/h_2$, $\mu_* = \mu_1/\mu_2$ и коэффициента Пуассона ν_1 . При этом все параметры, кроме изменяемых, берутся те же, что и выше. Анализ решения задачи показал, что при такой нагрузке напряжения σ_r , σ_θ по модулю достигают своих максимумов на L_1 при $\theta = \pi n$, $n = 0, 1$, а на L_2 при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$. Максимум $|\tau_{x\theta}|$ как на L_1 , так и на L_2 достигается при $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3$. Графики зависимостей модулей некоторых напряжений от R_* , h_* , μ_* , ν_1 приведены на рис. 4.

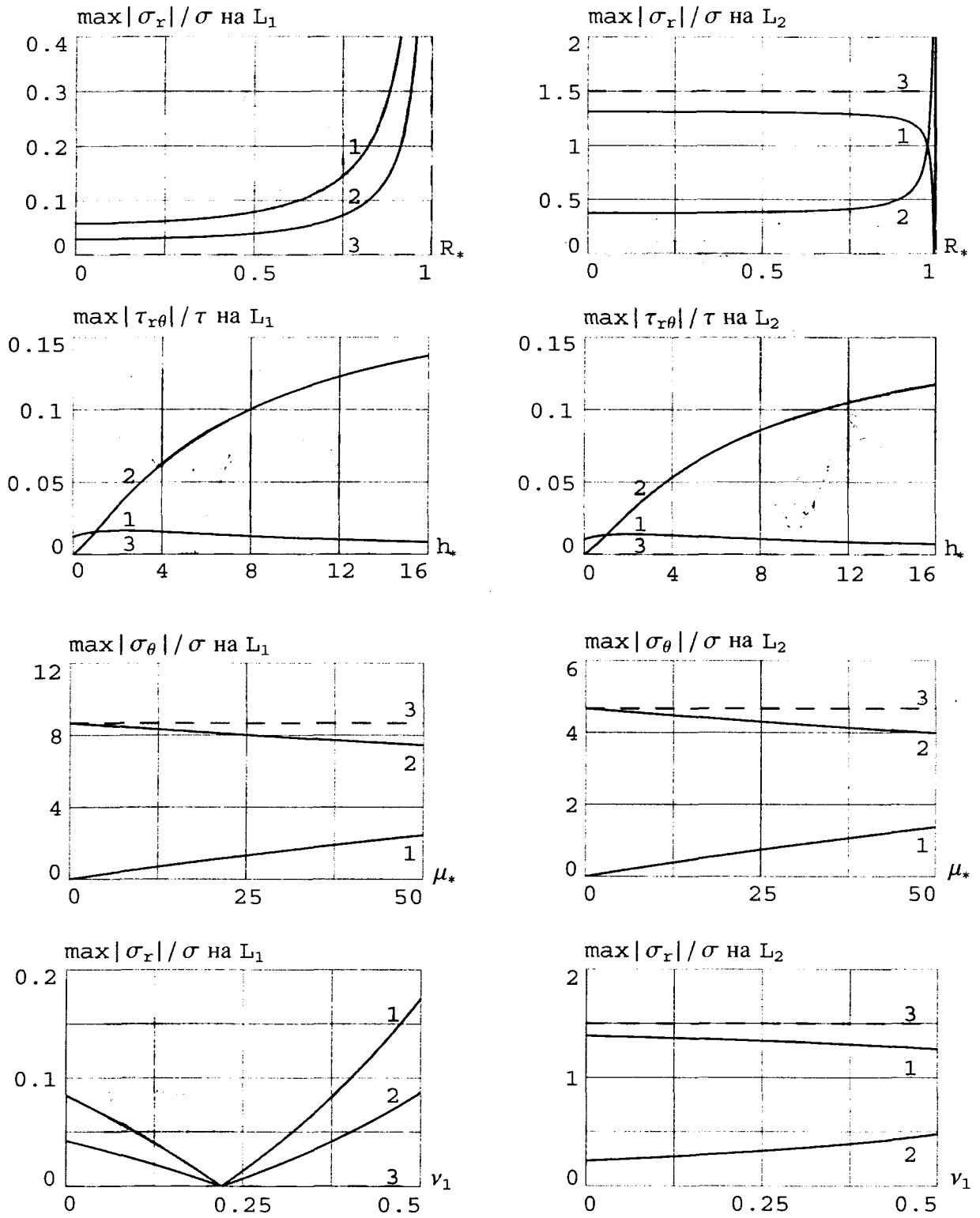


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966.