Воронежский государственный университет

РАСЧЁТ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК.

Семыкина Т.Д., Лопырёва Е.В.

Calculation design is considered In work from transversal-izotropic material at condition elaborated theories such shell. At problems to theories shell on base of the classical theory does not manage to take into account the main particularities of the material, such possibility gives the elaborated theory a shell.

Is it Below offered to conduct the decision by variational method.

Многие элементы машино- и самолётостроения изготовлены из трансверсально изотропных материалов, которые обладают осью симметрии упругих свойств [1]. Использование классических гипотез Кирхгоффа-Лява не позволяет учесть особенности этих материалов, поэтому при расчёте таких оболочек будем использовать гипотезы уточнённой теории [2].

Введём систему координат смешанного типа α, β, z (z – координата, отсчитываемая от срединной поверхности, α, β - сетка, связанная с линиями кривизны срединной поверхности).

Уточнённая теория основывается на следующих гипотезах:

а) при определении деформаций $e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ считаем, что касательные напряжения не отличаются от соответствующих напряжений, найденных по гипотезе недеформируемых нормалей, то есть от соответствующих напряжений классической теории;

б) нормальные к срединной поверхности перемещения не зависят от координаты z;

в) нормальными напряжениями σ_z на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь.

Принимая приведённые гипотезы, мы приближённо полагаем

$$\sigma_{\alpha z}=\frac{1}{2}(\frac{h^2}{4}-z^2)\varphi(\alpha,\beta),\ \ \sigma_{\beta z}=\frac{1}{2}(\frac{h^2}{4}-z^2)\psi(\alpha,\beta),$$

$$\varepsilon_z=0, U_z=U_z(\alpha,\beta)=w(\alpha,\beta),\quad \sigma_z=0, \tag{1}$$

где φ,ψ - функции, определяемые из решения задачи с учётом гипотез классической теории

$$\varphi(\alpha,\beta)={}^{12}\!/_{h^3}\,Q_1;\ \ \psi(\alpha,\beta)={}^{12}\!/_{h^3}\,Q_2. \tag{2}$$

Запишем закон Гука для трансверсально-изотропного материала:

$$\sigma_\alpha=\frac{E}{1=\nu^2}(\varepsilon_\alpha+\nu\varepsilon_\beta);\ \ \sigma_\beta=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\beta+\nu\varepsilon_\alpha);\ \ \sigma_{\alpha\beta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{\alpha\beta};$$

$$\sigma_{\alpha z}=G'e_{\alpha z};\ \sigma_{\beta z}=G'e_{\beta z}. \tag{3}$$

Если рассматривается цилиндрическая оболочка, то деформации по толщине оболочки, с учётом (1) и (3), меняются согласно формулам:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 + z\chi_1 + \frac{h^2}{8G'}\left[\left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right];$$

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_2 + \left(z - \frac{z^2}{R}\right)\chi_2 + \frac{h^2}{8G'}\left(z - \frac{z^2}{2R} - \frac{4z^3}{3h^2} + \frac{z^4}{Rh^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\beta};$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \omega + \left(z - \frac{z^2}{2R}\right)\tau + \frac{h^2}{8G'}\left(z - \frac{z^2}{2R} + - \frac{4z^3}{3h^2} + \frac{4z^4}{Rh^2}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$$

$$+\frac{h^2}{8G'}\left(z + \frac{z^2}{2R} - \frac{4z^3}{3h^2} - \frac{z^4}{3Rh^2}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}. \qquad (4)$$

Здесь ε_α, ε_β, ω - деформации элементов срединной поверхности, χ_1, χ_2, τ – изменения кривизн и крутка срединной поверхности.

Рассмотрим осесимметричное нагружение цилиндрических оболочек. В этом случае $\psi = 0$ и напряженно-деформированное состояние будет характеризоваться тремя компонентами деформации: ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha z}$.

С учетом сказанного внутренняя энергия примет вид:

$$U = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\alpha\varepsilon_\alpha dz + \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_\beta\varepsilon_\beta dz + \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z}\varepsilon_{\alpha z} dz. \qquad (5)$$

Учитывая соотношения (3) и (5), получим после интегрирования выражение удельной внутренней энергии через обобщённые компоненты деформаций срединной поверхности, пренебрегая членами порядка h^7,

$$U = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\left(\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2\right)h + \left(\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2\right)\frac{h^3}{12} -\right.$$

$$\left. -\frac{\nu h^3}{12R}\left(\varepsilon_1\chi_2 + 2\varepsilon_2\chi_2\right) + \frac{h^5}{80G'R^2}\chi_2^2 + \frac{h^5}{60G'}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right)\frac{d\varphi}{d\alpha}\right) + \frac{h^5}{120G'}\varphi^2. \qquad (6)$$

Отметим, что деформации и кривизны выражаются через перемещения с помощью соотношений (4), а функция $\varphi(\alpha,\beta)$ определяется из решения задачи с использованием классической теории по формулам (2).

При расчете приближенными методами используем вариационное уравнение Лагранжа, согласно которому:

$$\delta V - \delta A_p = 0. \qquad (7)$$

Здесь A_p - работа внешних заданных сил на допустимых перемещениях, V – внутренняя энергия оболочки:

$$V = \iint_\Omega U\, AB\, d\alpha\, d\beta \qquad (8)$$

Решение уравнения (7) ищется среди всех кинематически допустимых перемещений. Последние должны быть непрерывными и дифференцируемыми в области решения и удовлетворять граничным условиям, заданным для перемещений.

Исходя из принятых гипотез, при варьировании внутренней энергии V функция $\varphi(\alpha,\beta)$ считается определённой, и последнее слагаемое в уравнении (6) можно опустить при варьировании. С учётом зависимости внутренней энергии от деформаций срединной поверхности U можно разбить на два варьируемых слагаемых:

$$U_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\Bigg(\left(\varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2\right)h + \left(\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2\right)\frac{h^3}{12} + $$

$$+ \frac{\nu h^3}{12R}\left(\varepsilon_1\chi_2 + 2\varepsilon_2\chi_2\right) + \frac{h^5}{80G'R^2}\chi_2^2\Bigg), \tag{9}$$

$$U_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h^5}{60G'}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right)\frac{d\varphi}{d\alpha}. \tag{10}$$

Выражения (9) и (10) определяют энергию V виде:

$$V_1 = \iint\limits_{\Omega} U_1 AB\, d\alpha\, d\beta + \iint\limits_{\Omega} U_2\, AB\, d\alpha\, d\beta. \tag{11}$$

Первое слагаемое даёт квадратичную относительно деформаций срединной поверхности функцию, второй – линейную. Таким образом, $\varphi(\alpha,\beta)$ войдёт наравне с внешними силами, и при применении вариационных методов, в дальнейшем можно в качестве интенсивности обобщённых усилий принимать $\frac{Eh^2}{12\left(1-\nu^2\right)G'}\frac{d\varphi}{d\alpha}$, а в качестве обобщённых перемещений $\frac{h}{5}\left(\chi_1 + \nu\chi_2\right)$. Введение таких фиктивных сил позволяет использовать разработанные для изотропных оболочек методы расчёта трансверсально изотропных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

2. Родионова В.А. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек: Учебное пособие/ В.А. Родионова, Б.Ф. Титаев, К.Ф. Черных. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996. – 280 с.