ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ НА МНОГОСЛОЙНОЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Круподеров А.В.

Белорусский государственный университет, Минск

The problem of act of normal loading on transversely isotropic half-space consisted from horizontal layers in is solved. The layers are unbounded. Problem is solved in 3D. The method of solution is based on using of Fourier transform. The cubature formulae are obtained for the following types of problem: resting of elastic layer on inflexible and elastic half-space, resting of two elastic layers on elastic half-space. The examples of calculations are represented. Also comparison of obtained results with numerical results is represented.

Изучение поведения слоистых упругих материалов имеет широкую область приложений в инженерии, механике грунтов и геофизике. В инженерии это изучение поведения композитных материалов. Что касается механики грунтов и геофизики, то породный массив зачастую представляет собой несколько горизонтально залегающих слоев из различных материалов. Однако, упругие свойства материала могут быть различными для различных направлений, т.е. материал может быть анизотропным. Материл, имеющий ось, поворот вокруг которой не вызывает изменений упругих свойств называется трансверсально-изотропным. Именно такой анизотропией свойств зачастую обладают грунты.

Изучение напряженно деформированного состояния трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании было выполнено Лехницким 1. Изучением плоского и антиплоского напряженно-деформированного состояния многослойного трансверсально-изотропного полупространства занимались такие авторы как Гарг Синг, Шарма и Куо. Хадхури и Бовал расширили их результаты, предполагая неоднородность свойств [2]. Они предполагали экспоненциальное изменение свойств с глубиной.

В данной работе предлагается метод изучения объемного напряженно-деформированного состояния многослойного трансверсально-изотропного полупространства, вызванного воздействием нормальной нагрузки, распределенной по его поверхности. Основой метода является использование преобразования Фурье.

Итак, будем рассматривать многослойное трансверсально-изотропное упругое полупространство. Будем предполагать, что выполняются условия идеального силового контакта на границах слоев:

$$u_i^j\,|_{z=h_j} = u_i^{j+1}\,|_{z=h_j}, \sigma_{i3}^j\,|_{z=h_j} = \sigma_{i3}^j\,|_{z=h_j}.$$

Здесь индексом «*j*» обозначены напряжения и перемещения в верхнем относительно границы контакта слое, индексом «*j+1*» – в нижнем относительно границы контакта слое. В дальнейшем индекс *j* будем опускать, предполагая, что речь идет о конкретном слое.

Уравнения равновесия записываются в виде [3]

$$\left(c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{66}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u+\left(c_{12}+c_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0, \qquad (1)$$

$$\left(c_{12}+c_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(c_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)w=0,$$

где $(c)_{ij}, i, j=\overline{1,6}$ – матрица упругих констант, связывающая напряжения с деформациями т.е. компоненты напряжений $\sigma_1=\sigma_{11}, \sigma_2=\sigma_{22}, \sigma_3=\sigma_{33}$, $\sigma_4=\sigma_{23}$, $\sigma_5=\sigma_{13}$, $\sigma_6=\sigma_{12}$ с деформациями $\varepsilon_1=\varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2=\varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3=\varepsilon_{33}, \varepsilon_4=2\varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5=2\varepsilon_{13}$, $\varepsilon_6=2\varepsilon_{12}$.

Для нахождения решения поставленной задачи воспользуемся методом, описанным в [3]. Для этого представляем перемещения в следующем виде(здесь приводим выражения для более общего случая $s_1 \neq s_2$,, противоположный случай получается из него предельным переходом)

$$u=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y},$$

$$v=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}, \tag{2}$$

$$w=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial z_i},$$

Подставляя выражения (2) в (1), найдем, что каждая из функций φ_i должна удовлетворять уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)\varphi_i=0,\ (i=1,\ 2,\ 3).$$

Тогда пользуясь свойствами указанного преобразования получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант функций φ_i. В данном случае указанная система распадается на независимые уравнения.

$$\frac{d^2\varphi_i^F}{dz^2}=s_i^2w^2\varphi_i^F,\ \text{где}\ w^2=w_1^2+w_2^2,$$

$$s_i=\sqrt{\frac{(C-c_{13})(C+c_{13}+2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}}+(-1)^{i+1}\sqrt{\frac{(C+c_{13})(C-c_{13}-2c_{44})}{4c_{33}c_{44}}},\ i=\overline{1,2},$$

$$s_3=\sqrt{\frac{c_{66}}{c_{44}}},\ C=\sqrt{c_{11}c_{33}},\quad \alpha_i=\frac{c_{11}-c_{44}s_i^2}{(c_{13}+c_{44})s_i^2},\ z_i=s_iz.$$

Имеем уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этих уравнений можно записать в следующем виде(здесь опять возвращаемся к индексу j т.к. для каждого слоя константы свои):

$$\varphi_i^j=C_{1i}^je^{s_iw}+C_{2i}^je^{-s_iw} \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) сначала в формулы (2), учитывая уравнения связи напряжений с деформациями и деформаций с перемещениями, получаем следующую систему линейных уравнений относительно C_{li}^j.

Решая данную систему, находим константы C_{li}^j, а вместе с ними и преобразованное по Фурье Решение задачи. Воспользовавшись интегралами Фурье находим само решение. Аналитическое вычисление этих интегралов является достаточно затруднительной процедурой, поэтому более эффективным представляется воспользоваться известными численными методами для получения решения при конкретных начальных параметрах.

В качестве примера, а также проверки полученного решения, рассмотрим прикладную задачу определения НДС в слое грунта (трансверсально-изотропный слой), расположенного на мощном породном основании (гладкое бесконечное основание). На слой оказывает давление насыпь больших размеров (солеотвал). Ее форма приведена на рисунке 1. Вертикальную нагрузку на слой, вызванную давлением насыпи, принимаем в таком виде:

$$q(x,y)=\frac{\rho g h_e}{a}(H(y+b)-H(y-b))((x+a)H(x+a)-2xH(x)+(x-a)H(x-a)),$$

где ρ – плотность насыпи, a, b, h_e – соответственно ширина, длина и высота насыпи, g – ускорение свободного падения, H – функция Хевисайда.

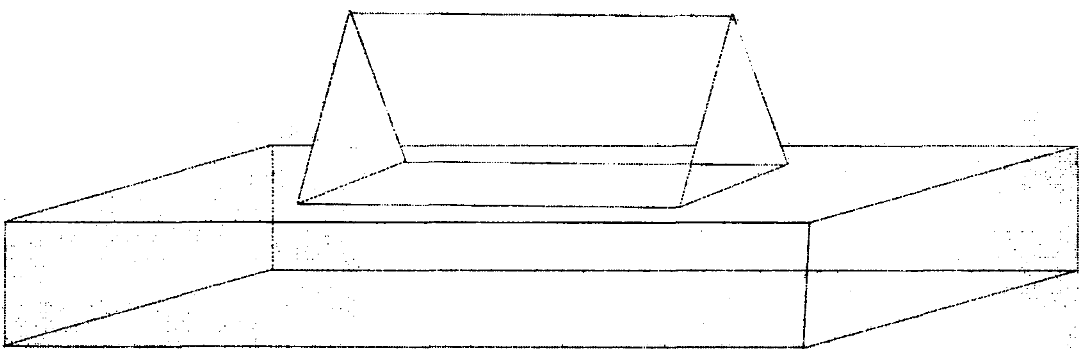

Рис. 1. Форма насыпи

Для проведения численных расчетов возьмем следующие значения входных параметров: $E_1 = E_2 = 5$ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_2 = 0.28462$ГПа, a=10м, b=50м, $\rho = 2000$кг/м^3, $h_e = 10$м, h=20м.

Для проверки построенного аналитического решения были выполнены сравнительные расчеты тестовой задачи в соответствии с данным решением и на основе расчетной схемы метода конечных элементов.

В качестве иллюстрации на рис.1 приведены графики напряжений σ_{zz}, σ_{xx} на оси z. На приведенных рисунках сплошная кривая – построенное аналитическое решение, пунктирная – решение, полученное методом конечных элементов.

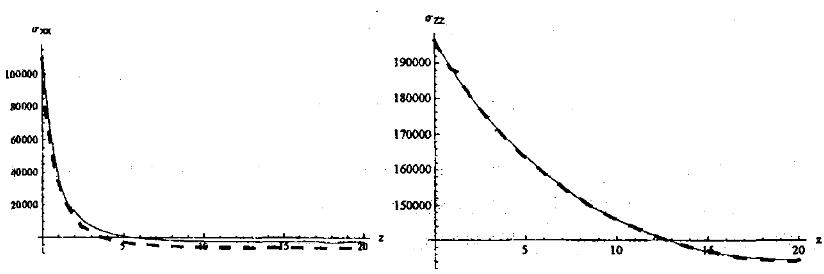

Рис. 2. Результаты расчетов

В качестве примера для многослойного полупространства рассмотрим задачу о воздействии однородной нагрузки, распределенной по единичному квадрату. Толщина слоя h=0.5м. Упругие свойства слоя соответствуют свойствам бетона (считаем материал изотропным): $E = 10^{10}$ Па, $\nu = 0.2$. Упругие свойства полупространства: $E_1 = E_2 = 5$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_2 = 0.28462$ ГПа.

На рис. 3 представлены графики напряжений соответственно $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ в плоскости xOz.

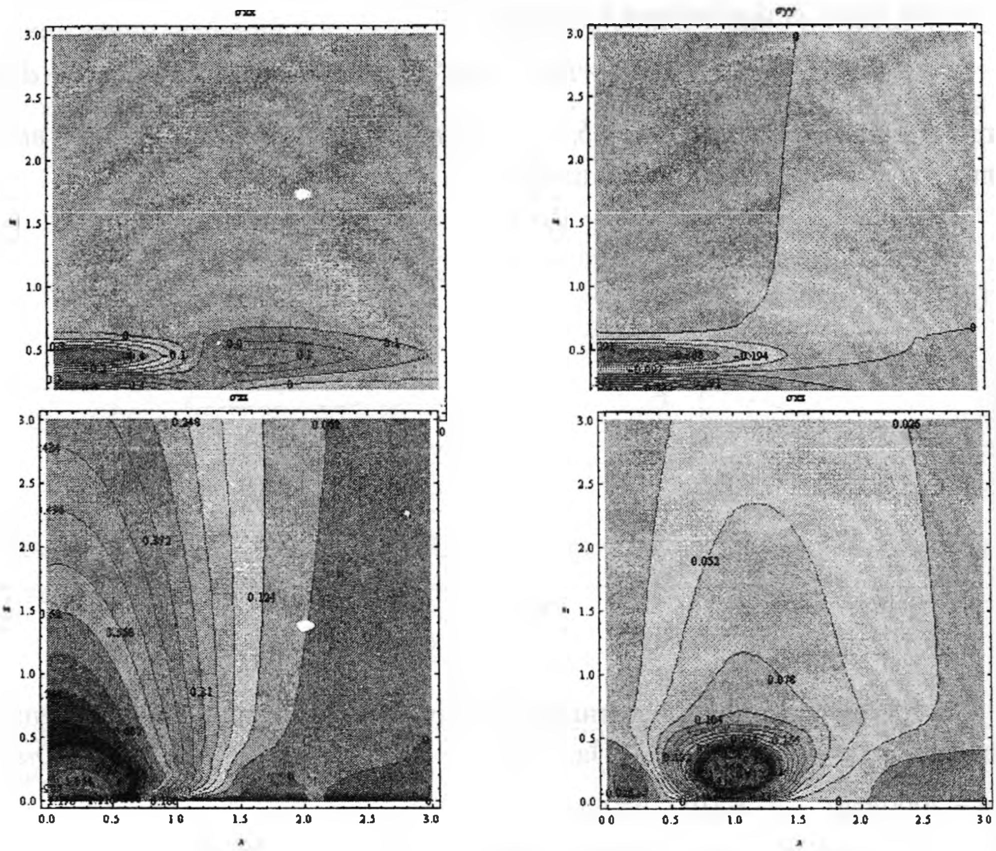

Рис. 3. Контурные графики напряжений

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Упругое равновесие трансверсально-изотропного слоя и толстой плиты// Прикладная механика и математика. – Т.26, №4.-1962. – С.687-696.
2. Garg N.R. Displacements and stresses at any point of a transversely isotropic multilayered half-space due to strip loading// Indian. J. pure appl. Math. – 22(10), 1991.– P.859-87
3. Ding H., Chen W., Zhang L. Elasticity of transversely isotropic body – Springer, 2006. – 442p.