МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Математические методы в строительстве»

Е. А. Крушевский
А. А. Кузнецова

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пособие
по курсу «Математика. 1-й семестр»
для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Минск
БНТУ
2020

УДК 51(076.5)(075.4)
ББК 22.1я7
К84

Р е ц е н з е н т ы :
А. Э. Малевич, *Л. И. Майсеня*

Крушевский, Е. А.

К84 Практикум по математике: пособие по курсу «Математика. 1-й семестр» для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия» / Е. А. Крушевский, А. А. Кузнецова. – Минск : БНТУ, 2020. – 56 с.
ISBN 978-985-583-298-1.

Пособие содержит перечень программных вопросов по разделам курса математики для 1-го семестра, а также «квалификационные» вопросы по пройденному в ССУЗ материалу.

Приведены задачи для самоконтроля, в том числе с решениями. Аналитические решения продублированы решениями, полученными при помощи методов компьютерной математики, в том числе с использованием открытого интернет-ресурса www.wolframalpha.com.

УДК 51(076.5)(075.4)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-583-298-1

СОДЕРЖАНИЕ

КВАЛИФИКАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

Раздел 1. Элементы линейной и векторной алгебры

1. Матрицы (основные понятия). Линейные операции над матрицами, их свойства.
2. Умножение матриц. Свойства умножения.
3. Определители 2-го и 3-го порядков. Понятие определителя n-го порядка.
4. Миноры, алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам ряда.
5. Свойства определителей.
6. Обратная матрица. Необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы.
7. Системы линейных уравнений. Основные определения. Матричная запись.
8. Невырожденные системы. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
9. Ранг матрицы. Теорема об инвариантности ранга матрицы.
10. Теорема Конекера-Капелли. Решение произвольных систем.
11. Системы однородных линейных уравнений.
12. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.
13. Базис и координаты вектора.
14. Прямоугольная система координат. Линейные операции над векторами в линейной форме.
15. Скалярное произведение векторов: его свойства.
16. Векторное произведение векторов: его свойства.
17. Смешанное произведение векторов: его свойства.
18. Необходимое и достаточное условия компланарности векторов.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости в отрезках.
2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
3. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
4. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.
5. Канонические и параметрические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Сведение общего уравнения прямой в пространстве к каноническим уравнениям.
7. Способы задания прямой на плоскости: *а*) прямая, проходящая через точку перпендикулярно данному вектору; *б*) общее уравнение; *в*) уравнение в отрезках; *г*) уравнение прямой с угловым коэффициентом; *д*) уравнение прямой, проходящей через точку в данном направлении.
8. Взаимное расположение прямых на плоскости. Угол между прямыми.
9. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой.
10. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между прямыми.
11. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
12. Эллипс (определение, каноническое уравнение, исследование формы).
13. Гипербола (определение, каноническое уравнение, исследование формы).

14. Парабола (определение, каноническое уравнение, исследование формы).
15. Исследование общего уравнения линии второго порядка в случае отсутствия члена с произведением текущих координат.
16. Поверхности второго порядка.

Раздел 3. Введение в математический анализ

1. Числовая последовательность и ее предел.
2. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема Вейерштрасса.
3. Предел функции при $x \to a$ и при $x \to \infty$. Односторонние пределы.
4. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Связь между ними.
5. Свойства бесконечно малых функций.
6. Теорема о разложении функции, имеющей предел, на постоянную и бесконечно малую функцию.
7. Теорема о единственности предела функции. Предел суммы, произведения и частного функций.
8. Первый замечательный предел.
9. Второй замечательный предел.
10. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые.
11. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых.
12. Непрерывность функции в точке. Действия над непрерывными функциями.
13. Классификация точек разрыва.
14. Односторонняя непрерывность. Свойства непрерывных на отрезке функций.

КВАЛИФИКАЦИОННАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Раздел 1. Элементы линейной и векторной алгебры

ЗАДАЧА 1

Задания 1–10. Проверить невырожденность системы линейных уравнений и решить ее по формулам Крамера и матричным способом.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -15. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

ЗАДАЧА 2

Задания 11–20. Исследовать систему на совместность и, в случае совместности, решить ее, используя метод Гаусса.

11. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 9x_1 - 3x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

ЗАДАЧА 3

Задания 21–30. Даны векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

21. $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 3; 2)$, $\vec{c} = (7; -3; 5)$, $\vec{d} = (6; 10; 17)$.

22. $\vec{a}=(4;\,7;\,8)$, $\vec{b}=(9;\,1;\,3)$, $\vec{c}=(2;-4;\,1)$, $\vec{d}=(1;-13;-13)$.

23. $\vec{a}=(8;\,2;\,3)$, $\vec{b}=(4;6\,;10)$, $\vec{c}=(3;-2;\,1)$, $\vec{d}=(7;\,4;11)$.

24. $\vec{a}=(10;\,3;\,1)$, $\vec{b}=(1;\,4;\,2)$, $\vec{c}=(3;\,9;\,2)$, $\vec{d}=(19;\,30;\,7)$.

25. $\vec{a}=(2;\,4;\,1)$, $\vec{b}=(1;3;6)$, $\vec{c}=(5;3;1)$, $\vec{d}=(24,\,20,\,6)$.

26. $\vec{a}=(1;\,7;\,3)$, $\vec{b}=\left(3;\,4;\,2\right)$, $\vec{c}=\left(4;\,8;\,5\right)$, $\vec{d}=\left(7;\,32;14\right)$.

27. $\vec{a}=(1;-2;\,3)$**,** $\vec{b}=\left(4;\,7;\,2\right)$**,** $\vec{c}=\left(6;\,4;\,2\right)$**,** $\vec{d}=\left(14;18;\,6\right)$.

28. $\vec{a}=\left(1;\,4;\,3\right)$, $\vec{b}=\left(6;\,8;\,5\right)$, $\vec{c}=\left(3;1;\,4\right)$, $\vec{d}=\left(21;18;\,33\right)$.

29. $\vec{a}=\left(2;\,7;\,3\right)$, $\vec{b}=\left(3;1;8\right)$, $\vec{c}=(2;-7;\,4)$, $\vec{d}=\left(16;14;\,27\right)$.

30. $\vec{a}=\left(7;\,2;1\right)$, $\vec{b}=\left(4;\,3;\,5\right)$, $\vec{c}=(3;\,4;-2)$, $\vec{d}=(2;-5;-13)$.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

ЗАДАЧА 4

Задания 31–40.

31. Прямые $2x + y - 1 = 0$ и $4x - y - 11 = 0$ являются сторонами треугольника, а точка $P\,(1;\ 2)$ – точкой пересечения третьей стороны с высотой, опущенной на нее. Составить уравнение третьей стороны. Сделать чертеж.

32. Прямая $5x - 3y + 4 = 0$ является одной из сторон треугольника, а прямые $4x - 3y + 2 = 0$ и $7x + 2y - 13 = 0$ – его высотами. Составить уравнения двух других сторон треугольника. Сделать чертеж.

33. Точки $A\,(3;\ -1)$ и $B\,(4;\ 0)$ являются вершинами треугольника, а точка $D\,(2;\ 1)$ – точкой пересечения его медиан. Составить уравнение высоты, опущенной из третьей вершины. Сделать чертеж.

34. Прямые $3x - 4y + 17 = 0$ и $4x - y - 12 = 0$ являются сторонами параллелограмма, а точка $P\,(2;\ 7)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Сделать чертеж.

35. Прямые $x - 2y + 10 = 0$ и $7x + y - 5 = 0$ являются сторонами треугольника, а точка $D\,(1;\ 3)$ – точкой пересечения его медиан. Составить уравнение третьей стороны. Сделать чертеж.

36. Прямые $5x - 3y + 14 = 0$ и $5x - 3y - 20 = 0$ являются сторонами ромба, а прямая $x - 4y - 4 = 0$ – его диагональю. Составить уравнения двух других сторон ромба. Сделать чертеж.

37. На прямой $4x + 3y - 6 = 0$ найти точку, равноудаленную от точек $A\ (1;\ 2)$ и $B\ (-1;\ -4)$. Сделать чертеж.

38. Найти координаты точки, симметричной точке $A\ (5;\ 2)$, относительно прямой $x + 3y - 1 = 0$. Сделать чертеж.

39. Прямые $x - 3y + 6 = 0$ и $3x + y - 12 = 0$ являются сторонами прямоугольника, а точка $P\ (7;\ 2)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника. Сделать чертеж.

40. Точки $A\ (4;\ 5)$ и $C\ (2;\ -1)$ являются двумя противоположными вершинами ромба, а прямая $x - y + 1 = 0$ – одной из его сторон. Составить уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

ЗАДАЧА 5

Задания 41–50. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках A, B, C, D. Найти, используя векторы (a, b):

а) косинус угла между ребрами AB, AD;

б) уравнение плоскости ABC;

в) длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;

г) уравнение ребра AD;

д) уравнение и длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC;

е) угол между ребром AD и плоскостью ABC.

41. $A(1; 3; 6)$, $B(2; 2; 1)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(-4; 6; -3)$.

42. $A(5; 1; -4)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 3; -4)$, $D(2; 2; 2)$.

43. $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 3; -4)$, $D(2; 2; 2)$.

44. $A(1; 2; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(2; 3; 1)$, $D(12; 0; 0)$.

45. $A(2; -3; 5)$, $B(0; 2; 1)$, $C(-2; -2; 3)$, $D(3; 2; 4)$.

46. $A(1;4;2)$, $B(3;1;2)$, $C(5;2;4)$, $D(2;3;4)$.
47. $A(1;1;3)$, $B(3;5;4)$, $C(3;2;4)$, $D(0;4;1)$.
48. $A(1;-1;5)$, $B(4;4;-1)$, $C(-1;2;0)$, $D(5;1;5)$.
49. $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$, $C(3;5;5)$, $D(2;4;7)$.
50. $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$.

ЗАДАЧА 6

Задания 51–60.

51. Написать уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от начала координат и точки $A(-5,3)$.

52. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x,y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox, чем от оси Oy.

53. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(0,2)$ и от оси Ox.

54. Найти уравнение траектории точки $M(x,y)$, которая при своем движении все время остается вдвое ближе к точке $A(3,0)$, чем к оси абсцисс.

55. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Oy и от точки $F(4,0)$.

56. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний каждой из которых от точки $F_1(2,0)$ и точки $F_2(-2,0)$ равна $2\sqrt{5}$.

57. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x,y)$, равноудаленная от точек $A(0,2)$ и $B(0,-2)$.

58. Определить уравнение траектории точки $M(x, y)$, которая движется так, что ее расстояние от точки $F(-1, 0)$ остается вдвое меньше расстояния от прямой $x = -4$.

59. Найти уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x = 4$.

60. Найти уравнение геометрического места точек, модуль разности расстояний от каждой из которых до точек $F_1(-2, 0)$ и $F_2(2, 0)$ равен 4.

ЗАДАЧА 7

Задания 61─70. Упростить уравнение кривой и изобразить ее на рисунке:

61. $9x^2 + y^2 - 36x + 2y + 28 = 0$.

62. $x^2 + 8x + 2y + 20 = 0$.

63. $4x^2 + 9y^2 - 40x - 36y + 100 = 0$.

64. $x^2 - y^2 + 2x + 6y - 12 = 0$.

65. $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

66. $2x^2 + 8x - y + 12 = 0$.

67. $25x^2 - 9y^2 - 150x - 72y = 144$.

68. $x^2 - 4y^2 - 4x + 40 = 0$.

69. $x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$.

70. $x^2 + 4y^2 + 2x = 0$.

ЗАДАЧА 8

Задания 71─80. Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить тип поверхности. Сделать схематический чертеж.

71. *а*) $2x^2 - 4y^2 - z^2 - 6x + 8y + 1 = 0$;

б) $x^2 + 3y^2 - 6y - z + 1 = 0$.

72. *а*) $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+2x=0$.

73. *а*) $z^2-3x^2-4y-5=0$;

б) $x^2+y^2+2x-z+1=0$.

74. *а*) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$;

б) $2x^2+y^2+4x+2y+2z-1=0$.

75. *а*) $x^2+y^2-z^2-2x+2z-1=0$;

б) $x^2+4y^2+z^2-10x-16y+6z+6=0$.

76. *а*) $3x^2+6x-8y+6z^2-7=0$;

б) $x^2+y^2+2z^2+2y+4z=0$.

77. *а*) $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$;

б) $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$.

78. *а*) $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$;

б) $4x^2-y^2-4x+4y+1=0$.

79. *а*) $2x^2+4y^2+2z^2+4x-8y-4z+3=0$;

б) $x^2+5y^2+z^2+2x+6z=0$.

80. *а*) $x^2+y^2-3z^2-2x-6z-6y+4=0$;

б) $x^2-2y^2+4x-8z-4y+6=0$.

Раздел 3. Введение в математический анализ

ЗАДАЧА 9

Задания 81–90. Вычислить пределы.

81.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$.
2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

82.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x+\sin 5x}{6x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

83.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$.
4. $\lim\limits_{x\to3}(7-2x)^{\frac{1}{x^2-9}}$.

84.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\cdot \operatorname{tg} x}{\sin^2 3x}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

85.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\operatorname{tg}^3 5x}$.   4. $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{x-3}}$.

86.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^3+x+3}$.   2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$.   4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

87.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+4}{2x^2-x+1}$.   2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3}{(1-\cos 4x)\sin 2x}$.   4. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{3}{x^2-1}}$.

88.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$.   2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$.   4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

89.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$.   2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 3x}{(1-\cos 2x)x}$.   4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

90.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$.   2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cdot\operatorname{ctg}^2 3x$.   4. $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{3}{x^2-1}}$.

З А Д А Ч А 10

Задания 91─100. Исследовать функции на непрерывность и установить характер точек разрыва, если таковые имеются. В пункте *б*) дополнительно построить график функции

91. *а*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$

92. *а*) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 3,\\ x-3, & x>3.\end{cases}$

93. *а*) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}2, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

94. *а*) $f(x)=\dfrac{\sin(x+2)}{x^2+x-2}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & 0<x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 4,\\ x^2-10, & x>4.\end{cases}$

95. *а*) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2+2x}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, -\infty<x\le 0,\\ \mathrm{tg}\,x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

96. *а*) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-x}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, -1\le x\le 1,\\ x-1, & 1<x\le 3,\\ -\sqrt{x}, & x>3.\end{cases}$

97. *а*) $f(x)=\dfrac{2}{1+3^{1/x}}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -\infty<x\le \pi,\\ x-\pi, & \pi<x\le 2\pi,\\ \cos x, & x>2\pi.\end{cases}$

98. *а*) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^4-x^3-x^2+x}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 3^x, & 0<x\le 1,\\ 2x+2, & x>1.\end{cases}$

99. *а*) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \ln x, & 0<x\le e,\\ x-e, & x>e.\end{cases}$

100. *а*) $f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$; *б*) $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le \pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

ПРОГРАММА КУРСА на 1-й семестр
(Контрольные вопросы и навигатор по теории)

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная. Геометрический и механический смысл.
   [1], 3.1, с. 227, [2], 6.1, с. 189, [4], с. 76, [5], 5.1, с. 99.
2. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Таблица производных.
   [2], 6.1, с. 190, [4], с. 79, [5], 5.2, с. 104, [5], 5.8, с. 115.
3. Основные правила дифференцирования.
   [1], 3.1, с. 228, [4], с. 82, [5], 5.4, с. 108.
4. Производная сложной и обратной функции.
   [1], 3.1, с. 228, [4], с. 86, 88, [5], 5.3, с. 107, [5], 5.6, с. 113.
5. Производные основных элементарных функций.
   [1], 3.1, с. 228, [5], 5.4, с. 111.
6. Производная функции, заданной неявно.
   [1], 3.2, с. 238, [4], с. 90.
7. Производная функции, заданной параметрически.
   [1], 3.2, с. 238, [4], с. 91, [5], 5.1, с. 117.
8. Логарифмическое дифференцирование.
   [1], 3.2, с. 238, [2], 6.1, с. 194, [4], с. 92, [5], 5.10, с. 116.
9. Производные высших порядков.
   [1], 3.2, с. 238, [2], 6.1, с. 189, [4], с. 93, [5], 5.12, с. 118.
10. Дифференциал функции, его свойства, геометрический смысл.
    [1], 3.3, с. 248, [4], с. 101, [5], 5.3, с. 107.
11. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
    [1], 3.3, с. 248, [4], с. 104.

12. Дифференциалы высших порядков.
    [1], 3.3, с. 249, [2], 6.1, с. 198, [4], с. 105, [5], 5.13, с. 120.
13. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.
    [2], 6.1, с. 202, [4], с. 109, [5], 5.14, с. 122.
14. Раскрытие неопределенностей вида $0/0, \infty/\infty$ и других (правило Лопиталя).
    [1], 3.4, с. 254, [2], 6.1, с. 202, [4], с. 109, [5], 5.15, с. 127.
15. Формула Тейлора и ее приложения.
    [1], 3.5, с. 261, [5], 5.16, с. 129.
16. Достаточное условие возрастания (убывания) функции.
    [1], 3.6, с. 266, [4], с. 121, [5], 6.1, с. 140.
17. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма).
    [1], 3.6, с. 266, [4], с. 122, [5], 6.2, с. 141.
18. Достаточные условия существования экстремума.
    [1], 3.6, с. 266, [5], 6.2, с. 143.
19. Наименьшее и наибольшее значения непрерывной на отрезке функции.
    [1], 3.6, с. 266, [4], с. 123, [5], 6.3, с. 146.
20. Выпуклость, вогнутость графика функции; достаточные условия.
    [1], 3.7, с. 274, [4], с. 125, [5], 6.4, с. 147.
21. Точки перегиба графика функции; достаточные условия.
    [1], 3.7, с. 274, с. 125, [5], 6.4, с. 147.
22. Асимптоты графика функции.
    [1], 3.7, с. 274, [4], с. 128, [5], 6.5, с. 149.
23. Общая схема исследования функции и построения графика.
    [1], 3.8, с. 279, [2], 6.1, с. 205, [4], с. 130, [5], 6.6, с. 151.

Раздел 2. Вектор-функция скалярного аргумента

1. Вектор-функция скалярного аргумента. Годограф.
   [1], 3.9, с. 289, [5], 7.1, с. 167.
2. Предел и непрерывность вектор-функций.
   [1], 3.9, с. 289, [5], 7.2, с. 169.
3. Производная вектор-функции скалярного аргумента.
   [1], 3.9, с. 290, [5], 7.2, с. 170.
4. Геометрический и механический смысл производной вектор-функции.
   [5], 7.2, с. 170.
5. Касательная прямая и нормальная плоскость.
   [1], 3.9, с. 290, [5], 7.3, с. 173.
6. Кривизна, радиус кривизны. Соприкасающаяся окружность. Эволюта и эвольвента.
   [1], 3.9, с. 291, [2], 6.9, с. 217, [5], 7.4, с. 175.
7. Кручение пространственной кривой.
   [6], с. 277.
8. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.
   [6], с. 274.

Раздел 3. Неопределенный интеграл

1. Первообразная. Неопределенный интеграл.
   [1], 4.1, с. 299, [3], 8.1, с. 14, [5], 8.1, с. 188.
2. Таблица основных интегралов.
   [1], 4.1, с. 300, [3], 8.1, с. 14, [5], 8.3, с. 191.
3. Основные свойства неопределенного интеграла.
   [1], 4.1, с. 299, [3], 8.1, с. 14, [5], 8.2, с. 190.

4. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
   [1], 4.2, с. 311, [3], 8.4, с. 24, [5], 8.4, с. 193.
5. Метод интегрирования по частям.
   [1], 4.2, с. 311, [3], 8.5, с. 284, [5], 8.4, с. 196.
6. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.
   [1], 4.3, с. 319, [3], 8.3, с. 20.
7. Рациональные дроби. Интегрирование элементарных рациональных дробей.
   [1], 4.4, с. 327, [3], 8.6, с. 30, [5], 8.6, с. 198.
8. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших.
   [1], 4.4, с. 327, [3], 8.5, с. 30, [5], 8.7, с. 200.
9. Интегрирование функций вида
   $$R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right),\ R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right).$$
   [1], 4.6, с. 350, [3], 8.7, с. 36, [5], 8.9, с. 209.
10. Интегрирование тригонометрических функций.
    [1], 4.5, с. 338, [3], 8.8, с. 40, [5], 8.8, с. 205.
11. Вычисление интегралов вида
    $$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx.$$
    [1], 4.8, с. 361, [5], 8.9, с. 211.
12. Интегрирование дифференциальных биномов.
    [1], 4.7, с. 356., [5], 8.9, с. 213.
13. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.
    [5], 8.10, с. 214.

Раздел 4. Определенный интеграл

1. Задачи геометрического и физического содержания, приводящие к понятию определенного интеграла.
   [3], 9.4, с. 159.
2. Определение определенного интеграла. Основные свойства.
   [1], 5.1, с. 369, [3], 9.1, с. 137.
3. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.
   [5], 9.5, с. 223.
4. Формула Ньютона–Лейбница.
   [1], 5.1, с. 370, [5], 9.6, с. 224.
5. Замена переменной в определенном интеграле.
   [1], 5.1, с. 370, [5], 9.7, с. 226.
6. Интегрирование по частям при вычислении определенного интеграла.
   [1], 5.1, с. 370, [5], 9.7, с. 227.
7. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах.
   [1], 5.2, с. 376, [3], 9.3, с. 149, [5], 10.1, с. 246.
8. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах.
   [1], 5.1, с. 378, [3], 9.3, с. 150, [5], 10.2, с. 252.
9. Вычисление длины дуги плоской кривой.
   [1], 5.4, с. 391, [3], 9.3, с. 152, [5], 10.3, с. 254.
10. Вычисление объема тела методом параллельных сечений.
    [3], 9.3, с. 153, [5], 10.4, с. 258.
11. Объем тела вращения.
    [1], 5.3, с. 384, [5], 10.4, с. 260

12. Площадь поверхности тела вращения.
    [1], 5.4, с. 391, [3], 9.3, с. 156.
13. Правило применения определенного интеграла в конкретных задачах.
    [1], 5.5, с. 398-399, [5], 10.5, с. 262, [5], 10.7, с. 264, [5], 10.8, с. 267.
14. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
    [1], 5.6, с. 407, [3], 9.2, с. 143, [5], 9.8, с. 228.
15. Интегралы от разрывных функций.
    [1], 5.6, с. 407, [3], 9.2, с. 146, [5], 9.8, с. 232.
16. Признаки сходимости несобственных интегралов.
    [1], 5.6, с. 407–409, [5], 9.8, с. 230.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ПО ПРОГРАММЕ ЗА 1-Й СЕМЕСТР

Раздел 1. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

ЗАДАЧА 1

Задания 1—10. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций. В пунктах 1) и 4) найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

1.

1. $y = 2\sqrt{x^3} - e^{2x} + \frac{3-2x}{2+x}$.
2. $y = 4(x+1)^3 \operatorname{tg} x - \ln(x - x^2)$.
3. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$.
4. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{t^2}, \\ y = \frac{1}{t^4+1}. \end{cases}$

2.

1. $y = \operatorname{ctg} 3x - 2^{x-1} + \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}$.
2. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{3} - 2\operatorname{tg} x^2$.
3. $y = \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{x}\right)^{\cos x}$.
4. $\begin{cases} x = \sin^3 \frac{t}{2}, \\ y = \cos^4 t. \end{cases}$

3.

1. $y = (x+1)^{10} - \ln(1-x) + \frac{x + \sin x}{1+5x}$.
2. $y = 2\sqrt{x^3}\sin x - 5e^{-\sqrt{x}}$.
3. $y = (\cos x)^{\sqrt[5]{x^2 - x^5}}$.
4. $\begin{cases} x = \ln\left(\sin \frac{t}{2}\right), \\ y = \frac{1}{\sin \frac{t}{2}}. \end{cases}$

4.

1. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\sin 2x+\dfrac{\ln x+1}{\ln x-1}$.

2. $y=2^x\log_3 x-3\operatorname{tg}\sqrt{1-x}$.

3. $y=x^{2\sin x}$.

4. $\begin{cases} x=\sqrt[4]{t^2-1}, \\ y=\dfrac{1}{t^2-1.} \end{cases}$

5.

1. $y=-\dfrac{1}{3x^3}+\dfrac{5x-x^2}{2-3x}$.

2. $y=\sqrt[4]{x}\log_2 x-\sqrt{1-x^3}$.

3. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

4. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t. \end{cases}$

6.

1. $y=x\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

2. $y=\sqrt[4]{x}+e^{-x}+\dfrac{\cos x}{1+5\sin x}$.

3. $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

4. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y=\dfrac{1}{t^2-1.} \end{cases}$

7.

1. $y=-2x+\operatorname{ctg} x\cdot\ln(\sin x)$.

2. $y=4(x+1)^3\operatorname{tg} x-\dfrac{1+2x}{1-x}$.

3. $y=x^{\sin^2 3x}$.

4. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{1-t^2.} \end{cases}$

8.

1. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x$.

2. $y=x\log_3 x-\sqrt{1-x}+e^{1-x}$.

3. $y=(\ln x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

4. $\begin{cases} x=\sin^2\dfrac{t}{2}, \\ y=\cos^2 t. \end{cases}$

9.

1. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} - 3x$. 2. $y = x\,\mathrm{tg}\,x - \sqrt{1+2x} + e^{1+3x}$.

3. $y = \left(\log_5(3x+1)\right)^{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}$. 4. $\begin{cases} x = e^{-4t}, \\ y = e^{\frac{1}{t}}. \end{cases}$

10. С решением

1. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. 2. $y = \cos^2 x \cdot \cos\left(\sin^2 x\right);$.

3. $y = \left(\arcsin\sqrt{2x}\right)^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$. 4. $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \dfrac{t^3 - 54}{t}. \end{cases}$

Решение.

1. Здесь следует воспользоваться формулами:
   - производная произведения $(uv)' = u'v + v'u$,
   - производная суммы (разности) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
   - вынесение постоянного множителя за знак производной $(a \cdot u)' = a \cdot u'$,
   - производная сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

$$y' = \left(x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)' = (x\,\mathrm{arctg}\,x)' - \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)' = \mathrm{arctg}\,x +$$

$$+\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2(1+x^2)} \cdot 2x = \mathrm{arctg}\,x.$$ Отсюда $y'' = (y')' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решения, полученные в пакете Wolfram Mathematica (в дальнейшем WM), будут представлены ниже. Они полностью совпадают с ответами, полученными аналитическими методами.

```
y1 = x ArcTan[x] - 0.5 Log[1 + x^2];
D[y1, x] // Simplify
```

$0. + \mathrm{ArcTan}[x]$

```
D[%, x]
```

$\dfrac{1}{1 + x^2}$

2. Формулы те же, что и в предыдущем пункте.

$$y' = \left(\cos^2 x \cdot \cos\left(\sin^2 x\right)\right)' = \left(\cos^2 x\right)' \cdot \cos\left(\sin^2 x\right) + \cos^2 x \cdot \left(\cos\left(\sin^2 x\right)\right)' =$$

$$= 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' \cdot \cos\left(\sin^2 x\right) + \cos^2 x \cdot (-\sin(\sin^2 x)) \cdot (\sin^2 x)' =$$

$$= 2 \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos\left(\sin^2 x\right) + \cos^2 x \cdot (-\sin(\sin^2 x)) \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' =$$

$$= \sin 2x \cdot \cos\left(\sin^2 x\right) - \cos^2 x \cdot \sin(\sin^2 x) \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x =$$

$$= \sin 2x \cdot \left(\cos\left(\sin^2 x\right) - \cos^2 x \cdot \sin(\sin^2 x)\right).$$

» function to differentiate:

(cos(x))^2 cos((sin(x))^2)

Derivative:

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^2(x)\cos\left(\sin^2(x)\right)\right) = -2\sin(x)\cos(x)\left(\sin\left(\sin^2(x)\right)\cos^2(x) + \cos\left(\sin^2(x)\right)\right)$$

Решение получено на сайте www.wolframalpha.com (в дальнейшем WMA). Приведен скриншот с экрана телефона. Отметим, что здесь синтаксис отличается от принятого в самом пакете WM, однако к этому быстро привыкаешь.

3. Для дифференцирования степенно-показательной функции нужна формула для логарифмической производной $y=(u(x))^{v(x)}$, $\ln y = v(x)\cdot \ln u(x)$, тогда $y' = y\cdot(\ln y)'$.

$$\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right),\quad (\ln y)' = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'\cdot\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)\right)' = \frac{\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\arcsin\sqrt{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2x}}=$$

$$=\frac{\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x(1-2x)}\cdot\arcsin\sqrt{2x}}.$$ Тогда $y' = y\cdot(\ln y)' =$

$$=\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{\ln\left(\arcsin\sqrt{2x}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x(1-2x)}\cdot\arcsin\sqrt{2x}}\right).$$

```
y3 = (ArcSin[√(2 x)])^(Tan[x / 2]);
D[y3, x] // Simplify
```

$$\text{ArcSin}\left[\sqrt{2}\sqrt{x}\right]^{\text{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]}\left(\frac{1}{2}\,\text{Log}\left[\text{ArcSin}\left[\sqrt{2}\sqrt{x}\right]\right]\,\text{Sec}\left[\frac{x}{2}\right]^2+\frac{\text{Tan}\left[\frac{x}{2}\right]}{\sqrt{2-4x}\,\sqrt{x}\,\text{ArcSin}\left[\sqrt{2}\sqrt{x}\right]}\right)$$

4. Находим $x_t' = (t^2+6t+5)' = 2t+6$ и $y_t' = \left(\frac{t^3-54}{t}\right)' =$

$=\left(t^2-54\,t^{-1}\right)' = 2t+54\,t^{-2}$. Тогда $y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{2t+54\,t^{-2}}{2t+6} = \frac{t^3+27}{t^3+3t^2}$.

В ответ следует записать производную как параметрическую функцию $\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y' = \dfrac{t^3 + 27}{t^3 + 3t^2} \end{cases}$. Для нахождения второй производной следует последнюю дробь продифференцировать еще раз

$$(y')'_t = \left(\frac{t^3+27}{t^3+3t^2}\right)' = \frac{3t^2(t^3+3t^2)-(3t^2+6t)(t^3+27)}{(t^3+3t^2)^2} = \frac{3t^4-81t^2-162t}{(t^3+3t^2)^2}$$

и разделить полученный результат на x'_t. Итак,

$$\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y'' = \dfrac{3(t^3 - 27t - 54)}{2t^3(t+3)^3} \end{cases}.$$

```
x4 = t^2 + 6 t + 5; y4 = (t^3 - 54) / t;
D[y4, t] / D[x4, t] // Simplify
```

$$\frac{9 - 3\,t + t^2}{t^2}$$

```
D[%, t] / D[x4, t] // Simplify
```

$$\frac{3\,(-6 + t)}{2\,t^3\,(3 + t)}$$

Отметим, что в последнем примере компьютер нашел возможность дальнейшего (неочевидного) упрощения полученной дроби при первом дифференцировании, поэтому выражение и для второй производной выглядит проще.

ЗАДАЧА 2

Задания 11–20. Вычислить пределы с использованием правила Лопиталя:

11. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\mathrm{arctg}3x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$.

12. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$.

13. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.

14. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\mathrm{tg}\,x+x^3}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$.

15. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\mathrm{tg}\,x^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$.

16. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$.

17. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\mathrm{arctg}2x-7x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$.

18. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\mathrm{tg}2x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$.

19. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$.

20. С решением

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$

Решение.

1. Учитывая неопределенность $[0/0]$, воспользуемся правилом Лопиталя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Введем следующие обозначения: $f(x)=e^x+e^{-x}-2$, $g(x)=\sin^2 x$ и найдем производ-

ные $f'(x)=e^{x}-e^{-x}$ и $g'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$. После этого наш предел выглядит следующим образом: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}x}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2\sin 2x}$. Т. к. и числитель, и знаменатель снова стремятся к 0 при $x\to 0$, то опять воспользуемся (2 раза) правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2\sin 2x}==\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2\cos 2x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^{2}+2x-8}{8-x^{3}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^{2}+2x-8)'}{(8-x^{3})'}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+2}{-3x^{2}}=-\dfrac{6}{12}=-\dfrac{1}{2}$.

Решения WMA дают те же результаты.

» function to find limit of:

(e^x+e^(-x)-2)/(sin(x))^2

» value to approach:

0

Limit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}(x)}=1$$

» function to find limit of:

(x^2+2 x-8)/(8-x^3)

» value to approach:

2

Limit:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^{2}+2\,x-8}{8-x^{3}}=-\frac{1}{2}$$

ЗАДАЧА 3

Задания 21─30. Исследовать функцию и построить ее график:

21. 1. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. 2. $y = (x-1)e^x$.

22. 1. $y = \dfrac{x}{(1+x)^3}$. 2. $y = \ln\left(1 - x^2\right)$.

23. 1. $y = \dfrac{4x^3}{1 - x^3}$. 2. $y = x\sqrt{1 - x^2}$.

24. 1. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$. 2. $y = x^2 e^{-x}$.

25. 1. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. 2. $y = \ln\left(4 - x^2\right)$.

26. 1. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$. 2. $y = (x+1)e^{-x}$.

27. 1. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$. 2. $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$.

28. 1. $y = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$. 2. $y = x\sqrt{x^2 - 1}$.

29. 1. $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. 2. $y = x^2 \sin x$.

30. С решением

1. $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$. 2. $y = \ln\left(x - x^2\right)$.

Решение.

1. Область определения функции $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, т.к. деление на 0 невозможно и в точке $x = 0$ функция терпит разрыв 2-го рода ($\lim\limits_{x \to -0} y = \lim\limits_{x \to +0} y = +\infty$).

» curve function:

(x^4+1)/x^2

Input interpretation:

maximize $\frac{x^4+1}{x^2}$

Global maxima:

(no global maxima found)

» curve function:

(x^4+1)/x^2

Input interpretation:

inflection points $\frac{x^4+1}{x^2}$

Result:

(no inflection points found)

» curve function:

(x^4+1)/x^2

Also include: search domain

Compute

Input interpretation:

minimize $\frac{x^4+1}{x^2}$

Global minima:

$\min\left\{\frac{x^4+1}{x^2}\right\} = 2$ at $x = -1$

$\min\left\{\frac{x^4+1}{x^2}\right\} = 2$ at $x = 1$

Input interpretation:

asymptotes $\frac{x^4+1}{x^2}$

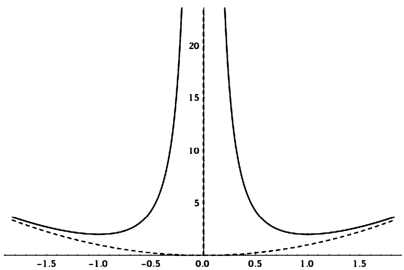
Vertical asymptote:

$\frac{x^4+1}{x^2} \to \infty$ as $x \to 0$

Parabolic asymptote:

$\frac{x^4+1}{x^2}$ is asymptotic to x^2

Plot:



Представленные выше решения WMA на самом деле являются комбинацией 4 скриншотов.

Функция является четной, т. е. $y(-x)=\dfrac{(-x)^4+1}{(-x)^2}=\dfrac{x^4+1}{x^2}=y(x)$.

Т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\infty$, то наклонных асимптот у графика функции нет.

В выражении для y разделим почленно числитель на знаменатель $y=x^2+x^{-2}$. Тогда $y'=2x-2x^{-3}=2x^{-3}(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Видно, что точки $x=\pm 1$ являются стационарными. Тогда на $(-\infty;-1)\bigcup(0;1)$ $y'<0$, т. е. функция убывает. Функция возрастает при $x\in(-1;0)\bigcup(1;\infty)$, т. к. там $y'>0$. В силу четности функции, при $x=\pm 1$ функция достигает минимума, равного 1. Т. к. $y''=2+6x^{-4}\neq 0$, то точек перегиба нет.

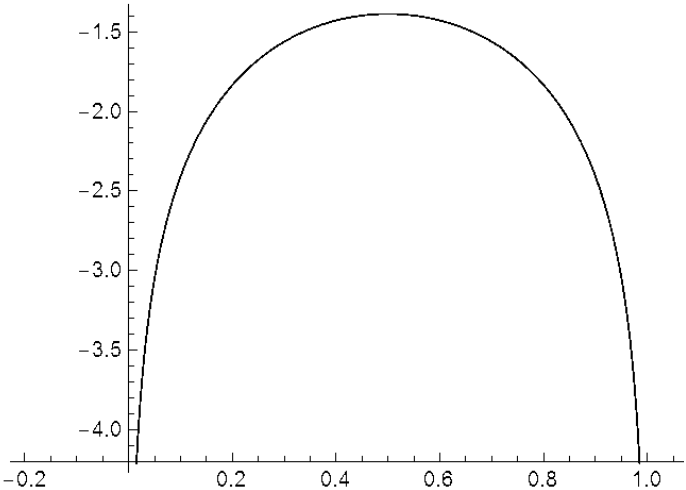
Отметим, что WM указал на параболическую асимптоту (т. е. функция в бесконечности «ведет себя» как парабола).

2. Область определения функции $(0;1)$. Имея это в виду, упростим выражения для функции $y=\ln x+\ln(1-x)$. Вертикальные прямые $x=0$ и $x=1$ являются односторонними вертикальными асимптотами. $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$ Т. к. знаменатель всегда отрицателен (в области определения), то функция возрастает при $x\in(0;0,5)$ и убывает при $x\in(0,5;1)$.

Точка $x=0,5$ является точкой максимума.

Максимальное значение функции при $x=0,5$; $y_{\max}=\ln(0,25)=-2\ln 2=-1,386$.

```
Plot[Log[x - x^2], {x, -0.2, 1.2}]
```




```
FindMaximum[Log[x - x^2], {x, 0.4}]
```

```
{-1.38629, {x → 0.5}}
```

Раздел 2. Вектор-функция скалярного аргумента

ЗАДАЧА 4

Задания 31─40. Для графика функции $y = f(x)$ в заданной точке с абсциссой x_0 найти радиус и центр кривизны. Изобразить график функции и дугу соприкасающейся окружности.

31. $y = x^2,\ x_0 = 0$.

32. $y = x^2,\ x_0 = 1$.

33. $y = x^2,\ x_0 = -1$.

34. $y = -x^2,\ x_0 = 0$.

35. $y = -x^2,\ x_0 = 1$.

36. $y = -x^2,\ x_0 = -1$.

37. $y = x^{-1},\ x_0 = 1$.

38. $y = x^{-1},\ x_0 = -1$.

39. $y = -x^{-1},\ x_0 = 1$.

40. $y = -x^{-1},\ x_0 = 1$ (с решением).

Решение.

Воспользуемся формулой для нахождения кривизны явно заданной функции $K = \dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$. Здесь $y' = x^{-2}$, $y'' = -2x^{-3}$.

Отсюда $K = \dfrac{|-2|}{(1+(1)^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда радиус кривизны $R = K^{-1} = \sqrt{2}$.

Центр кривизны найдем по параметрическим формулам для эволюты:

$$x_c = x - y'\frac{1+(y')^2}{y''} = 1 - 1\cdot\frac{1+1}{-2} = 2,$$

$$y_c = y + \frac{1+(y')^2}{y''} = -1 + \cdot\frac{1+1}{-2} = -2.$$

Т. о., точка $(2; -2)$ является центром кривизны данной кривой при $x = 1$, и, одновременно, центром соприкасающейся окружности. Уравнение этой окружности можно записать в виде $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$.

curvature $y = -\dfrac{1}{x}$ at $x = 1$

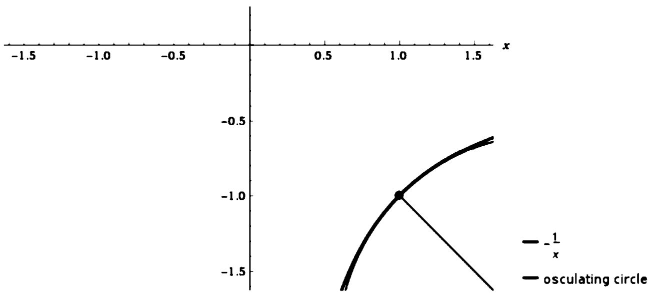
Result:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Osculating circle:

center	$(2, -2)$
radius	$\sqrt{2}$
equation	$(-2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 2$

Plot:



ЗАДАЧА 5

Задания 41–50. Для годографа вектор-функции $u = \vec{f}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в заданной точке со значением параметра t_0 найти уравнение касательной прямой и нормальной плоскости. Вычислить кручение в данной точке.

41.	$x(t) = t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = 1.$
42.	$x(t) = t,$	$y(t) = -t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = 1.$
43.	$x(t) = t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = -2t^3/3,$	$t_0 = 1.$
44.	$x(t) = -t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = 1.$
45.	$x(t) = t,$	$y(t) = -t^2,$	$z(t) = -2t^3/3,$	$t_0 = 1.$
46.	$x(t) = t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = -1.$
47.	$x(t) = t,$	$y(t) = -t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = -1.$
48.	$x(t) = t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = -2t^3/3,$	$t_0 = -1.$
49.	$x(t) = -t,$	$y(t) = t^2,$	$z(t) = 2t^3/3,$	$t_0 = -1.$
50.	С решением			
	$x(t) = t,$	$y(t) = -t^2,$	$z(t) = -2t^3/3,$	$t_0 = -1.$

Решение.

Найдем производные от компонент нашей вектор-функции до 3-го порядка включительно: $\dot{x} = 1, \dot{y} = -2t, \dot{z} = -2t^2$, $\ddot{x} = 0,$ $\ddot{y} = -2, \ddot{z} = -4t$, $\dddot{x} = \dddot{y} = 0,$ $\dddot{z} = -4$. Тогда соответствующие вектора имеют вид $\vec{r}(1) = (1; -1; -2/3)$, $\dot{\vec{r}}(1) = (1; 2; -2)$, $\ddot{\vec{r}}(1) = (0; -2; 4)$, $\dddot{\vec{r}}(1) = (0; 0; -4)$. Смешанное произведение последних трех векторов равно $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 8$. Векторное произведение $[\dot{\vec{r}}(1); \ddot{\vec{r}}(1)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (4;-4;-2)$, его длина равна 6. Тогда кручение $\kappa = \dfrac{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \dddot{\vec{r}}}{[\dot{\vec{r}}; \ddot{\vec{r}}]^2} = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

Используя координаты векторов $\vec{r}(1) = (1; -1; -2/3)$ и $\dot{\vec{r}}(1) = (1; 2; -2)$, запишем уравнение касательной прямой при $t = 1$ $\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+\frac{2}{3}}{-2}$ и нормальной плоскости $(x-1) + 2(y+1) - 2(z+\frac{2}{3}) = 0$. После упрощения получим $x + 2y - 2z - \dfrac{1}{3} = 0$.

```
In[2]:= k2 = Simplify[FrenetSerretSystem[{t, -t^2, -2 t^3 / 3}, t]]
```

Out[2]= $\left\{\left\{\frac{2}{(1+2t^2)^2}, \frac{2}{(1+2t^2)^2}\right\}, \left\{\left\{\frac{1}{1+2t^2}, -\frac{2t}{1+2t^2}, -\frac{2t^2}{1+2t^2}\right\}, \left\{-\frac{2t}{1+2t^2}, \frac{-1+2t^2}{1+2t^2}, -\frac{2t}{1+2t^2}\right\}, \left\{\frac{2t^2}{1+2t^2}, \frac{2t}{1+2t^2}, \frac{1}{-1-2t^2}\right\}\right\}\right\}$

```
In[5]:= t = -1;
        k2
```

Out[6]= $\left\{\left\{\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right\}, \left\{\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}\right\}\right\}$

В данной встроенной функции WM в ответ записывается вектор кривизны (его координатами являются как раз кривизна и кручение), а также векторы сопровождающего трехгранника Френе. Т. о., видим, что кручение равно 2/9, а первый вектор трехгранника $\vec{\tau} = \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right), |\vec{\tau}| = 1$ (касательный вектор) является направляющим вектором для касательной прямой и нормальным вектором для нормальной плоскости.

Раздел 3. Неопределенный интеграл

ЗАДАЧА 6

Задания 51–60. Найти неопределенные интегралы. Выполнить проверку полученного результата дифференцированием.

51. 1. $\int\left(3x^2+(x+1)^{10}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$. 2. $\int xe^{3-x^2}dx$.

52. 1. $\int\left(2x+(x-1)^{11}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$. 2. $\int x^4e^{-1-x^5}dx$.

53. 1. $\int\left(4x^3+(x-2)^{12}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$. 2. $\int\cos^{-2}x\cdot e^{\operatorname{tg}x}dx$.

54. 1. $\int\left(5x^5+(x+2)^{13}-\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$. 2. $\int\frac{\sqrt[5]{8\operatorname{arctg}^3 x}}{1+x^2}dx$.

55. 1. $\int\left(\frac{3}{x^4}+(x-1)^9-\sqrt{x}\right)dx$. 2. $\int\frac{9\arccos^7 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

56. 1. $\int\left(\frac{2}{x}+(x-1)^8-\sqrt[3]{x}\right)dx$. 2. $\int\frac{\sqrt{12\ln^3(x+6)}dx}{x+6}$.

57. 1. $\int\left(\frac{5}{x^4}+(x-2)^4-\sqrt[4]{x}\right)dx$. 2. $\int\frac{4x-6}{2x^2-6x-8}dx$.

58. 1. $\int\frac{5x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. 2. $\int x\cdot\ln\left(x^2+1\right)dx$.

59. 1. $\int\left(\frac{x^5}{\sqrt{16+x^6}}-x\cdot 5^{x^2}\right)dx$. 2. $\int\frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

60. С решением

1. $\int\left(4+\operatorname{ctg}^2 x\right)\frac{dx}{\sin^2 x}$. 2. $\int x^3\cdot e^{-x^2}dx$

Решение.

1. Воспользуемся свойством интегралов и разобьем интеграл от суммы на сумму двух интегралов: $\int (4+\mathrm{ctg}^2 x)\dfrac{dx}{\sin^2 x} =$
$= 4\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} + \int \dfrac{\mathrm{ctg}^2 x dx}{\sin^2 x}$. Первый из интегралов является табличным $4\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -4\,\mathrm{ctg}\,x$, во втором интеграле мы используем правило поднесения под знак дифференциала, т. е. $df(x) = f'(x)dx$. Заметим, что $d(\mathrm{ctg}x) = (\mathrm{ctg}x)'dx = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$. Из последнего выражения окончательно получим следующий результат: $4\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} + \int \dfrac{\mathrm{ctg}^2 x dx}{\sin^2 x} = -4\mathrm{ctg}x - \int (\mathrm{ctg}^2 x) d(\mathrm{ctg}x) =$
$= -4\mathrm{ctg}x - \dfrac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} + C$.

Для проверки продифференцируем полученный ответ.

$$\left(-4\mathrm{ctg}x - \frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3} + C\right)' = \frac{4}{\sin^2 x} - \frac{3}{3}\mathrm{ctg}^2 x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 0 = \frac{4-\mathrm{ctg}^2 x}{\sin^2 x}.$$

$$\int \frac{(4 + (\mathrm{Cot}[x])\text{^}2)}{(\mathrm{Sin}[x])\text{^}2}\, dx$$

$$-4\,\mathrm{Cot}[x] - \frac{\mathrm{Cot}[x]^3}{3}$$

Отметим иное обозначение для котангенса в системе WM, а также тот факт, что произвольной постоянной здесь пренебрегли. Другими словами, вместо неопределенного интеграла WM в ответ записала одну из первообразных. Что касается проверки дифференцированием, то здесь следует обратиться к задаче 1 раздела 1.

2. Заметим, что $x^3 = x \cdot x^2$. Тогда $\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^2 e^{-x^2} x dx$. Теперь мы воспользуемся поднесением под знак дифференциала $df(x) = f'(x)dx$. $dx^2 = 2xdx$, откуда выразим $\frac{1}{2} dx^2 = xdx$. Тогда получим наш интеграл в таком виде $\int x^2 e^{-x^2} xdx =$ $= \frac{1}{2} \int x^2 e^{-x^2} dx^2$. Для удобства заменим $x^2 = t$, получим интеграл $\frac{1}{2} \int te^{-t} dt$. Далее воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, где $u = t$, $dv = e^{-t} dt$, $du = dt$, $\int dv = \int e^{-t} dt$, $v = -e^{-t}$. Получим следующее выражение:

$$\frac{1}{2} \int te^{-t} dt = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} - \int (-e^{t}) dt\right) = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{t} dt\right) = -\frac{e^{-t}}{2}\left(t+1\right) + C.$$

После «возвращения» к старой переменной ответ выглядит так: $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C$.

Проверка дифференцированием дает:

$$\left(-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + C\right)' = \frac{2xe^{-x^2}}{2}(x^2+1) - \frac{e^{-x^2}}{2}(2x) + 0 = x^3 e^{-x^2} -$$

$$-x^2 e^{-x^2}(-2x) + 2xe^{-x^2} = -2xe^{-x^2} + 2x^3 e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 2x^3 e^{-x^2}.$$

$$\int \mathbf{x \hat{\ } 3\ Exp[-x \hat{\ } 2]}\ d\mathbf{x}$$

$$\frac{1}{2} e^{-x^2} \left(-1 - x^2\right)$$

ЗАДАЧА 7

Задания 61–70. Применяя различные приёмы, найти неопределённые интегралы:

61.

1. $\int (10x-6)\sin\frac{x}{2}\,dx$. 2. $\int \frac{x}{2x^2-6x-8}dx$. 3. $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$.

62.

1. $\int x\,\mathrm{arctg}\,2x\,dx$. 2. $\int \frac{x+5}{x^2(x-1)}dx$. 3. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

63.

1. $\int x\ln(x+7)dx$. 2. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$. 3. $\int \frac{dx}{2-3\cos x+\sin x}$.

64.

1. $\int (x+1)e^{-x}dx$. 2. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$. 3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$.

65.

1. $\int x\cdot 5^x dx$. 2. $\int \frac{2-x}{x^2(x+1)}dx$. 3. $\int \frac{\cos^2 2x\,dx}{\sin^4 2x}$.

66.

1. $\int x\cos 4x\,dx$. 2. $\int \frac{3x}{(x+1)^2(x-1)}dx$. 3. $\int \cos^5\frac{x}{3}\sin^2\frac{x}{3}dx$.

67.

1. $\int x^2e^{3x}dx$. 2. $\int \frac{\sqrt{1+4x^2}}{x^4}dx$. 3. $\int \cos^5\frac{x}{3}\cdot\sin^2\frac{x}{3}dx$.

68.

1. $\int (x^2-3x)\ln(x+2)dx$. 2. $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$. 3. $\int \sin 6x\cdot\cos 9x dx$.

69.

1. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$. 2. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}$. 3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}dx$.

70. С решением

1. $\int x\operatorname{arctg}2x dx$. 2. $\int \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x^2+2x}}$. 3. $\int \frac{(3\operatorname{tg}x+5)dx}{1+\cos^2 x}$.

Решение.

1. Это интеграл вида $\int P_n(x)\operatorname{arctg}\alpha x dx$. Если вы обратитесь к теории, то узнаете, что $P_n(x)dx$ необходимо принять за dv: $dv = x\,dx$, тогда $u = \operatorname{arctg}2x$. Далее, интегрируя левую и правую часть, получим $\int dv = \int xdx$ и окончательно $v = \frac{x^2}{2}$. Теперь вычисляем $du = d(\operatorname{arctg}2x)$, получим в итоге $du = \frac{2}{1+(2x)^2}dx$. Затем, по формуле интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$, получим $\int x\operatorname{arctg}2x dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}2x - \frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1+4x^2}dx$. Последний интеграл вычислим отдельно

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1+4x^2}dx = \int\frac{x^2}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int\frac{x^2}{x^2+1/4}dx = \frac{1}{4}\int\frac{x^2+1/4-1/4}{x^2+1/4}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\frac{x^2+1/4}{x^2+1/4}dx - \frac{1}{4}\int\frac{1/4}{x^2+1/4}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x^2+0{,}5^2} = \frac{1}{4}x -$$

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1/2}\operatorname{arctg}\frac{x}{1/2} + C = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\cdot\operatorname{arctg}2x + C.$$ Тогда, возвращаясь

назад, получаем $\frac{x^2}{2}\text{arctg}2x-\frac{1}{2}\int\frac{2x^2}{1+4x^2}dx=\frac{x^2}{2}\text{arctg}2x-$ $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}\cdot\text{arctg}2x+C$.

```
∫x ArcTan[2 x] ⅆx

-x/4 + 1/8 ArcTan[2 x] + 1/2 x^2 ArcTan[2 x]
```

2. Первое, что стоит сделать при вычислении этого интеграла – это представить $x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1$, а затем заменить $\frac{1}{x+1}=t$. Из последнего выражения выразим $\frac{1}{t}=x+1$, откуда $x=\frac{1}{t}-1$. Теперь наша задача найти dx. Для этого необходимо продифференцировать левую и правую части выражения $x=\frac{1}{t}-1$. В результате получим $dx=d(t^{-1}-1)$, а окончательно $dx=(t^{-1}-1)'dt$ или $dx=-t^{-2}dt$. Чтобы не потеряться в череде дробей, отдельно преобразуем знаменатель $(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}=t^{-1}\sqrt{t^{-2}-1}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}=\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^2}$.

Тогда, разделив $dx=-t^{-2}dt$ на $(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}=t^{-2}\sqrt{1-t^2}$, можно с легкостью вычислить исходный интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C$. При обратной подстановке $\dfrac{1}{x+1}=t$, получим окончательный результат $-\arcsin\left(\dfrac{1}{x+1}\right)+C$.

$\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x\hat{}2+2x}}\,dx$	$\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}\sqrt{x+2}}\,dx$
$\dfrac{2\sqrt{x}\sqrt{2+x}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}}\right]}{\sqrt{x(2+x)}}$	$2\,\mathrm{ArcTan}\left[\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}}\right]$

Отметим, что WM весьма серьезно относится к понятию области определения подынтегральной функции. Более простое выражение удалось получить только после небольшой корректировки условия (корень из неполного квадратного трехчлена заменили произведением корней). Кроме того, WM отдал предпочтение арктангенсу (перед арксинусом). Ответы на самом деле одинаковые. Это легко проверить дифференцированием.

3. Применим подстановку $t=\operatorname{tg}x$, при этом $x=\operatorname{arctg}t$, т.е. $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$. В этой подстановке также используются формулы $\sin^2 x=\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Учитывая $t=\operatorname{tg}x$, получим $\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$ и $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$. Тогда подынтегральная функция преобразуется следующим образом $3\operatorname{tg}x+5=3t+5$, $1+\cos^2 x=1+\dfrac{1}{1+t^2}$ или $1+\cos^2 x=\dfrac{2+t^2}{1+t^2}$. Дробь $\dfrac{3\operatorname{tg}x+5}{1+\cos^2 x}$ теперь имеет вид $\dfrac{(3t+5)(1+t^2)}{(2+t^2)}$. Запишем интеграл с учетом

всех замен $\int \frac{(3\,\mathrm{tg}\,x+5)}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{(3t+5)(1+t^2)}{(2+t^2)(1+t^2)}dt = \int \frac{(3t+5)}{(2+t^2)}dt$. Теперь разобьем последний интеграл на два и по свойствам интеграла вынесем постоянные за знак интеграла: $\int \frac{(3t+5)}{(2+t^2)}dt =$

$=3\int \frac{t}{2+t^2}dt + 5\int \frac{dt}{(\sqrt{2})^2+t^2}$. В первом интеграле поднесем t под знак дифференциала: $tdt = \frac{1}{2}d(2+t^2)$. Получим

$$3\int \frac{t}{t^2+2}dt + 5\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(2+t^2)}{2+t^2}dt + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|2+t^2\right| + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{3}{2}\ln\left|2+\mathrm{tg}^2 x\right| + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$\int \frac{3\,\mathtt{Tan[x]}+5}{1+(\mathtt{Cos[x]})\verb|^|2}\,dx$$

$$\frac{5\,\mathtt{ArcTan}\left[\frac{\mathtt{Tan[x]}}{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{2}} - 3\,\mathtt{Log[Cos[x]]} + \frac{3}{2}\,\mathtt{Log[3+Cos[2\,x]]}$$

Учитывая, что $\frac{3+\cos 2x}{2\cos^2 x} = \frac{4+2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = 2+\mathrm{tg}^2\,x$ аналитический ответ и ответ из WM идентичны.

Раздел 4. Определенный интеграл

ЗАДАЧА 8

Задания 71–80. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

71. $y^2 = 16 - 8x;\ y^2 = 24x + 48$. **72.** $x = -2y^2;\ x = 1 - 3y^2$.

73. $y = \dfrac{x^2}{16};\ y = \dfrac{1}{x^2}; x = 4$. **74.** $y = x + 1; y = \cos x; y = 0$.

75. $y = x^2 - 3;\ y = \dfrac{4}{x^2}; x = 1$. **76.** $y^2 = 2x + 1;\ x - y - 1 = 0$.

77. $y = x^2 - 1;\ x = 2;\ y = 0$. **78.** $y = x^2 - 4x + 3; y = x + 3$.

79. $xy = 4;\ x + y = 5$. **80.** $y=8-x^2$; $y=x^2$ (с решением).

Решение.

Кривые, ограничивающие область, являются параболами. У первой из них ветви направлены вниз, у второй – вверх. Приравнивая их между собой и решая полученное уравнение $8 - x^2 = x^2$, получим абсциссы пересечения графиков $x = \pm 2$, т. е. пределы интегрирования в определенном интеграле. Тогда площадь равна (не забываем, что надо из выражения для верхней кривой вычитать выражение для нижней, а не наоборот)

$$S = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - x^2)dx = 8x - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} + +16 - \frac{16}{3} = \frac{64}{3}.$$

Input interpretation:

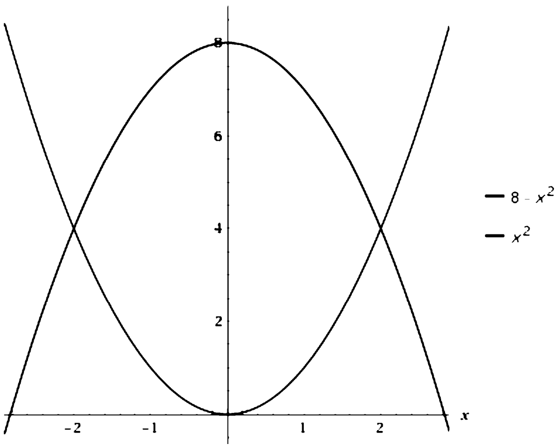
area between $8 - x^2$ and x^2

Result:

$$\int_{-2}^{2}(8 - 2x^2)\,dx = \frac{64}{3} \approx 21.3333$$

More digits

Plot:



ЗАДАЧА 9

Задания 81─90.

81. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=x^2+1$.

82. Найти длину кривой $y=\ln\sin x, \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.

83. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ (одной полуволны), $y=0$.

84. Найти длину кривой $y=\ln\left(1-x^2\right), 0\le x\le\frac{1}{4}$.

85. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

86. Найти длину кривой $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le\frac{3}{4}$.

87. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $x=4$, $y=0$.

88. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x=t-\sin t; \\ y=1+\cos t, \end{cases}$ $t\in[0;2\pi]$.

89. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5$, $y=1$.

90. С решением

Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* фигуры, ограниченной линиями $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$.

Решение.

Объем тела вращения дуги кривой $y = f(x)$ в пределах $x \in [a;b]$ вычисляется определенным интегралом $\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Таким образом, нам надо вычислить интеграл $\pi\int_0^1 e^{-2x}dx = -\frac{\pi}{2}e^{-2x}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}(e^{-2}-1) = \frac{\pi}{2}(1-e^{-2})$.

```
Pi ∫_0^1 Exp[-2 x] ⅆx
```

$$\frac{\left(-1+e^2\right)\pi}{2\,e^2}$$

```
N[Pi ∫_0^1 Exp[-2 x] ⅆx]
```

```
1.35821
```

Отметим, что WM легко вычислил приближенное значение интеграла, что весьма важно с точки зрения различных приложений.

ЗАДАЧА 10

Задания 91–100. Вычислить несобственный интеграл или доказать его сходимость или расходимость.

91. 1. $\int_0^{\infty} x\sin x dx$. 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln^2\ln x}$. 3. $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x}$.

92. 1. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$. 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x\ln^2\ln x}$. 3. $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$.

93. 1. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$. 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$. 3. $\int_0^2 \frac{\ln x}{x} dx$.

94. 1. $\int_2^{\infty} \frac{2x+3}{x^2+2x-3} dx$. 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. 3. $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+2x-3} dx$.

95. 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. 2. $\int_0^{\infty} xe^{-3x} dx$. 3. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2}$.

96. 1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. 2. $\int_{\pi}^{\infty} x\cos 3x dx$. 3. $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

97. 1. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$. 2. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^4}$. 3. $\int_0^1 \frac{e^{-x^2} dx}{x}$.

98. 1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. 2. $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx$. 3. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

99. 1. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$. 2. $\int_{\pi}^{\infty} x\cos 3x dx$. 3. $\int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4+x}}$.

100. С решением

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8}$. 2. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^4-4x^2+4}$.

Решение.

1. Данный несобственный интеграл 1-го рода можно вычислить. Вычислим для начала соответствующий неопределенный интеграл при помощи операции поднесения под дифференциал:

$$\int \frac{xdx}{x^4+4x^2+8} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^2+4x^2+8} = [x^2 = u] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+4u+8} = [x^2 = u] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u+2}{2} + C =$$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2+2}{2} + C$. Т. о. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8} +$

$$+\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+4x^2+8} == \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2+2}{2}\Bigg|_a^0 + \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2+2}{2}\Bigg|_0^b =$$

$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}1 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}1\right) = 0$. Заметим, что $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

Этот результат можно было поучить иначе. Видя, что данный интеграл сходится, т. к. порядок малости подынтегральной функции на обеих бесконечностях равен $3 = 4 - 1$, а подынтегральная функция является нечетной, то ответ 0 становится просто очевидным.

2. Данный несобственный интеграл 1-го рода непосредственному вычислению не поддается. Однако к нему можно применить признак сравнения. В частности, т. к. известно, что при $x \to \infty$ логарифм возрастает медленнее, чем любая степень *x*, то функция $x^{-3/2}$ мажорирует подынтегральную функцию. А, как известно, $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится для всех $\alpha > 1$. Здесь $\alpha = 1{,}5$. Отметим, что в качестве мажоранты можно было взять любую функцию $x^{-\alpha}$, при $1 < \alpha < 2$. Вычислить данный интеграл аналитическими методами представляет значительную сложность.

3. Т. к. подынтегральная функция имеет разрыв 2-го рода при $x=\sqrt{2}$ (точка $x=-\sqrt{2}$ не лежит на отрезке интегрирования, поэтому ее рассматривать не нужно), то данный интеграл, несмотря на его схожесть с обычным определенным интегралом, таковым не является. Это несобственный интеграл 2-го рода. Вычислим вначале неопределенный интеграл $\int\frac{xdx}{x^4-4x^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2)^2-4x^2+4}=[x^2=u]=\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-2)^2}=\frac{-1}{2u-4}=$

$=\frac{-1}{2x^2-4}+C$. Тогда $\int\limits_0^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{x^4-4x^2+4}=\lim\limits_{b\to\sqrt{2}}\frac{-1}{2x^2-4}\Big|_0^b=\infty$.

Таким образом, данный интеграл расходится.

В WM ответ дается весьма кратко. Тем не менее сходящиеся и расходящиеся интегралы легко различимы.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{(x^4+4x^2+8)}\,dx$$

0

$$\int_1^{\infty}\frac{\text{Log}[x]}{x^2}\,dx$$

1

$$\int_0^{\sqrt{2}}\frac{x}{(x^4-4x^2+4)}\,dx$$

Integrate::idiv : Integral of $\frac{x}{(-2+x^2)^2}$ does not converge on $\{0,\sqrt{2}\}$. ≫

Литература

1. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : учеб. пособие: в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. школа, 1993. – Ч. 1. – 416 с.

2. Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – 5-е изд. – Ч. 1. Линейная и векторная аглебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – Минск : Выш. школа, 2009. – 304 с.

3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособие: в 3 ч. / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. школа, 1991. – Ч. 2. – 352 с.

4. Капусто, А. В. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных : учебно-методическое пособие / А. В. Капусто. – Минск : БНТУ, 2016. – 223 с.

5. Герасимович, А. И. Математический анализ : справ. пособие: в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск : Выш. школа, 1989. – Ч. 1. – 287 с.

6. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1981. – 464 с.

Учебное издание

КРУШЕВСКИЙ Евгений Александрович
КУЗНЕЦОВА Александра Алексеевна

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

пособие по курсу «Математика. 1-й семестр»
для студентов-заочников специальности 1-56 02 01 «Геодезия»

Редактор *Е. О. Германович*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 26.03.2020. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,31. Уч.-изд. л. 2,59. Тираж 100. Заказ 806.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.