Доклады Академии наук Беларуси

1993 июль-август том 37 № 4

УДК 52-64+535.36+539.125.523

Н. Н. РОГОВЦОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД РАЗЛИЧНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

(Представлено академиком Ф. И. Федоровым)

К настоящему времени в теории переноса излучения получен целый ряд интегральных соотношений для случая плоскопараллельных и сферически-симметричных сред [1—3]. Хотя сами по себе данные соотношения не дают явных решений уравнения переноса, они накладывают на них достаточно жесткие ограничения. Это обстоятельство позволяет при использовании дополнительной информации находить с помощью интегральных соотношений асимптотики искомых величин и сводить решение одних задач к исследованию других, которые проще для изучения по сравнению с исходными. К тому же указанные соотношения оказываются полезными при проведении оценок точности приближенных и численных методов, а также при решении обратных задач. Отметим, что интеграл потока и K-интеграл [4] стационарного уравнения переноса излучения, полученные для случая консервативно-рассеивающей плоскопараллельной среды, являются частными вариантами интегральных соотношений.

В статье предложен способ получения интегральных соотношений применительно к средам различной конфигурации, которые облучаются нестационарными источниками. Он основан на использовании общих соотношений инвариантности [5—7] и информации об асимптотическом поведении решений уравнения переноса излучения при $t\to\infty$ (t — время) [8—10]. В качестве иллюстрации приведен ряд интегральных соотношений (в частности, векторных) для случая нестационарного уравнения переноса излучения.

Рассмотрим однородное рассеивающее поглощающее тело V (оно может являться частью другого тела), ограниченное поверхностью S (она может быть подстилающей поверхностью) и содержащее внутренние нестационарные источники, описываемые функцией $g(\mathbf{r}, \Omega, t)$. Везде далее под $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и Ω, Ω' будем соответственно понимать радиусы-векторы точки «наблюдения» (или точки, задающей положение источника) и единичные векторы, определяющие направления испускания (или распространения) излучения. Для простоты будем считать, что функции $g(\mathbf{r}, \Omega, t)$, $I(\mathbf{r}, \Omega, t)$ ($I(...)$ — интенсивность излучения в V) тождественно равны нулю при $t<0$. Как показано в [5—7], имеет место следующее общее соотношение инвариантности:

$$\theta(V) I(\mathbf{r}, \Omega, t) = \iiint\limits_{\mathring{V}} dV' \int\limits_{\Omega} d\Omega' \int\limits_0^t G_\infty(\mathbf{r}, \Omega; \mathbf{r}', \Omega'; t-t') g(\mathbf{r}', \Omega', t')\, dt' -$$

$$- \iint\limits_S dS' \int\limits_\Omega (\mathbf{n}'\cdot\Omega')\, d\Omega' \int\limits_0^t G_\infty(\mathbf{r}, \Omega; \mathbf{r}', \Omega'; t-t') I(r', \Omega', t')\, dt'. \quad (1)$$

Здесь $G_\infty(...)$ — функция Грина нестационарного уравнения переноса излучения для однородной бесконечной среды V_∞ (V_∞ содержит часть, идентичную $\overset{0}{V}=V\backslash S$; $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{\Omega}'$ определяют в функции Грина соответственно положение точечного мононаправленного источника и его направленность); $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к заданной стороне S в точке, определяемой $\mathbf{r}'$ ($|\mathbf{n}'|=1$); $\theta(V)=1$, когда $\mathbf{r}$ задает точку в V, и $\theta(V)=0$ в противном случае; Ω — единичная сфера (более подробно смысл величин и символов в (1) описан в [5—7]).

Выражение (1) будет одним из исходных при получении интегральных соотношений. В качестве дополнительной содержательной информации используем также явные аналитические выражения для пространственно-угловых моментов $G^0_{\infty,0}(\ldots)$, $G^0_{\infty,2}(\ldots)$ функции $G_\infty(\ldots)$, которые несложно получить непосредственно из нестационарного уравнения переноса излучения, записанного в прямоугольной декартовой правой системе координат $OXYZ$. Они имеют вид

$$G^0_{\infty,0}(z',\ \mu';\ t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz\int\limits_{-1}^{1}G_\infty(z,\ \mu;\ z',\ \mu';\ t)\,d\mu=v\exp(-(\alpha-\sigma)vt); \quad (2)$$

$$\begin{aligned}G^0_{\infty,2}(z',\ \mu';\ t)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}z^2dz\int\limits_{-1}^{1}G_\infty(z,\ \mu;\ z',\ \mu';\ t)\,d\mu=\\&=v\exp(-(\alpha-\sigma)vt)\left[(z')^2+2z'\mu' vm\left(\frac{x_1}{3},\ t\right)+\right. \quad (3)\\&\left.+\frac{4v}{3}P_2(\mu')\frac{m\left(\frac{x_1}{3},\ t\right)-m\left(\frac{x_2}{5},\ t\right)}{\sigma\left(\frac{x_1}{3}-\frac{x_2}{5}\right)}-\frac{2v\left(m\left(\frac{x_1}{3},\ t\right)-t\right)}{\sigma(3-x_1)}\right].\end{aligned}$$

Величины в (3), неопределенные ранее, имеют следующий смысл:

$$m(u,\ t)=(\sigma v(1-u))^{-1}(1-\exp(-\sigma(1-u)vt)),$$

$$G_\infty(z,\ \mu;\ z',\ \mu';\ t)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_\infty(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ z',\ \mu',\ \varphi';\ t)\,dy, \quad (4)$$

$$G_\infty(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega};\ \mathbf{r}',\ \mathbf{\Omega}';\ t)=G_\infty(x,\ y,\ z,\ \mu,\ \varphi;\ x',\ y',\ z',\ \mu',\ \varphi';\ t),$$

где $\mathbf{r}=(x,\ y,\ z)$; $\mathbf{r}'=(x',\ y',\ z')$; переменные μ, φ и μ', φ' являются соответственно угловыми координатами единичных векторов $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Omega}'$ в сферической системе координат, согласованной с системой $OXYZ$; v — скорость света в среде V; $P_2(\mu')$ — полином Лежандра второго порядка; α и σ — показатели ослабления и рассеяния; x_1 и x_2 — соответствующие коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра.

Интегрируя (1) по каждой из переменных $x,\ y,\ z$ в пределах от $-\infty$ до ∞ и по переменной $\mathbf{\Omega}$ по единичной сфере Ω, с учетом (2), (4) получаем такую формулу:

$$\begin{aligned}A(t)&=\frac{1}{v}\exp((\alpha-\sigma)vt)\iiint\limits_V dV\int\limits_\Omega I(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\,d\Omega=\\&=\iiint\limits_{\overset{0}{V}}dV\int\limits_\Omega d\Omega\int\limits_0^t\exp((\alpha-\sigma)vt)\,g(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\,dt- \quad (5)\\&-\iint\limits_S dS\int\limits_\Omega(\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})\,d\Omega\int\limits_0^t\exp((\alpha-\sigma)vt)\,I(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\,dt.\end{aligned}$$

Из (5) можно найти одно из искомых интегральных соотношений, если учесть, что величина $A(t)$ для целого ряда ситуаций стремится к нулю при $t\to\infty$. Отметим здесь только одну из них. Указанное поведение $A(t)$ имеет место при следующих предположениях: тело V не имеет подстилающих поверхностей и является частью другой рассеивающей поглощающей среды V_1 (или находится в вакууме); альбедо однократного рассеяния в любой точке $P\in V_1\setminus V$ не превышает соответствующую величину в V, а индикатриса рассеяния не зависит от положения P в V_1; тело V_1 не имеет подстилающих поверхностей и может быть «погружено» в полубесконечную среду $V_{(0,\infty)}$, оптические параметры которой согласованы с ими же в V_1 так же, как соотнесены они между собой в V и V_1; тело V_1 облучается пространственно ограниченными внешними или внутренними источниками; существует конечный предел первого интеграла в правой части (5) при $t\to\infty$; произведения функций, описывающих источники, на $\exp((\alpha-\sigma)vt)$ монотонно стремятся к нулю при достаточно больших t (при этом убывание должно быть равномерным относительно пространственных и угловых переменных). Доказательство этого утверждения можно провести с учетом асимптотического поведения при $t\to\infty$ интенсивности излучения в среде $V_{(0,\infty)}$, облучаемой нестационарными источниками, имеющими те же характеристики, что и реальные источники, находящиеся внутри и вне V_1 (такого рода асимптотики или их оценки можно получить, если использовать результаты работ [8—10]). К тому же необходимо учесть, что интенсивность излучения в V и V_1 при $t\to\infty$ будет убывать не медленнее, чем в $V_{(0,\infty)}$.

Устремляя теперь в (5) величину t к ∞, находим первое из искомых интегральных соотношений:

$$\iiint\limits_{\mathring{V}} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^\infty \exp((\alpha-\sigma)vt)\, g(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt = \tag{6}$$

$$= \iint\limits_S dS \int\limits_\Omega (\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})\, d\Omega \int\limits_0^\infty \exp((\alpha-\sigma)vt)\, I(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt.$$

Это выражение является аналогом интеграла потока [4] для случая неконсервативно-рассеивающей среды сложной формы, облучаемой нестационарными источниками. Из (6) можно найти $\varepsilon=\alpha=\sigma$.

Умножим теперь (1) на $\mathbf{r}^2$ и проведем такие же интегрирования, как и при отыскании (5). Полученное таким образом выражение преобразуем с учетом тождества $P_2(\mu)+P_2(\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)+P_2(\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi)\equiv 0$, формул (3), (6) и равенства $\lim\limits_{t\to\infty} tA(t)=0$ (оно верно, например, при выполнении условий, при которых $A(t)\to 0$ при $t\to\infty$, и дополнительном допущении о равенстве нулю мощностей внутренних и внешних источников для $\forall t\notin[0,\ T]$, $0<T<\infty$). В результате получим второе интегральное соотношение:

$$\iiint\limits_{\mathring{V}} dV \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_0^\infty g(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)\exp((\alpha-\sigma)vt)\, F(\mathbf{OP},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt = \tag{7}$$

$$= \iint\limits_S dS \int\limits_\Omega (\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})\, d\Omega \int\limits_0^\infty I(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)\exp((\alpha-\sigma)vt)\, F(\mathbf{OP},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt,$$

$$F(\mathbf{OP},\ \mathbf{\Omega},\ t)=\mathbf{OP}^2+2\left((\mathbf{OP}\cdot\mathbf{\Omega})-\frac{vt}{3}\right)\left(\sigma\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\right)^{-1},$$

где $\mathbf{OP}=\mathbf{r}$, $g(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\equiv g(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)$, $I(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\equiv I(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)$. При выводе

(7) также предполагалось, что тело V имеет конечную геометрическую толщину вдоль любой прямой, пересекающей его. Подчеркнем, что источники и интенсивность излучения в V не зависят от выбора точки O системы $OXYZ$, а определяются только положением точки «наблюдения» P, что и отражено при записи (7). Принимая во внимание независимость структуры выражения (7) от положения точки O, можно получить из него такое векторное интегральное соотношение:

$$\iiint\limits_{\overset{\circ}{V}} dV \int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_0^\infty g(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)\, e^{(\alpha-\sigma)vt} \left(\mathbf{OP} + \left(\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\sigma\right)^{-1} \mathbf{\Omega}\right) dt =$$

$$= \iint\limits_S dS \int\limits_\Omega (\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Omega})\, d\Omega \int\limits_0^\infty e^{(\alpha-\sigma)vt} \left(\mathbf{OP} + \left(\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\sigma\right)^{-1}\mathbf{\Omega}\right) I(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt = 0. \tag{8}$$

Из (7), (8) можно вывести ряд других интегральных соотношений. Пусть, например, в области $V_2 \subset V$ отсутствуют источники. Тогда, как видно из (8), для любой сферы S_1, лежащей в V_2, справедливо соотношение

$$\iint\limits_{S_1} dS_1 \int\limits_\Omega (\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{\Omega})\, d\Omega \int\limits_0^\infty e^{(\alpha-\sigma)vt} I(P_1,\ \mathbf{\Omega},\ t) \left(R_1\mathbf{n}_1 + \frac{\mathbf{\Omega}}{\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\sigma}\right) dt = \mathbf{0}. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{n}_1$ — единичная внешняя нормаль к S_1 в точке P_1 ($P_1 \in S_1$), R_1 — радиус сферы S_1.

Перейдем теперь к получению интегральных соотношений для однородного слоя V. Расположим систему $OXYZ$ так, чтобы границы слоя задавались равенствами $z=a$, $z=b\,(a<b)$. Ограничимся рассмотрением случая, когда в V отсутствуют внутренние источники и слой облучается внешними нестационарными источниками, описываемыми функцией $g_1(P,\ \mathbf{\Omega},\ t)$. Предположим, что $g_1(\ldots)\equiv 0$ для $\forall P \notin V_3$ и $\forall t \notin [0,\ T]\,(T<\infty)$, где V_3 — часть пространства, задаваемая неравенствами $a_1 \leqslant z < a$, $b < z \leqslant b_1$, $a_1 > -\infty$, $b_1 < \infty$. Будем к тому же считать, что сходится интеграл $B = \iiint\limits_{V_3} dV \int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_0^T \exp((\alpha-\sigma)vt)\, g_1(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, dt$. Допустим также, что альбедо хотя бы одной из границ слоя строго меньше некоторого числа $q<1$. Обозначим через $[z_1,\ z_2]$ подслой слоя $[a,\ b]\,(a \leqslant z_1 < z_2 \leqslant b)$. Используя выражения (1), (6), когда в качестве V берется подслой $[z_1,\ z_2]$, формулу (3), асимптотику величины $A(t)$ при $t\to\infty$ (ее для описанных выше условий можно вывести с помощью рассуждений, аналогичных использованным ранее при отыскании (6), (7), и результатов, изложенных в [10]), получаем искомое интегральное соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1} \mu d\mu \int\limits_0^\infty \exp((\alpha-\sigma)vt)\, F_1(z_1,\ \mu,\ t)\, I_0(z_1,\ \mu,\ t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \mu d\mu \int\limits_0^\infty \exp((\alpha-\sigma)vt)\, F_1(z_2,\ \mu,\ t)\, I_0(z_2,\ \mu,\ t)\, dt = \Phi(z_2), \tag{10}$$

$$F_1(z,\ \mu,\ t) = z^2 + \frac{6z\mu}{\sigma(3-x_1)} + \frac{20P_2(\mu)}{\sigma^2(3-x_1)(5-x_2)} - \frac{2vt}{(3-x_1)\sigma},$$

$$I_0(z,\ \mu,\ t) = \iint\limits_{S^*} dS \int\limits_0^{2\pi} I(\mathbf{r},\ \mathbf{\Omega},\ t)\, d\varphi,$$

где S^* — плоскость, задаваемая уравнением $z=\text{const}\in(a, b)$; μ — косинус угла между Ω и осью OZ. Из (10) видно, что $\Phi(z)$ не зависит от z, т. е. $\Phi(z)=\mathfrak{Z}=\text{const}$ для $\forall z\in(a, b)$. Следовательно, получен «интеграл» нестационарного уравнения переноса излучения для случая однородного плоского слоя V. С учетом инвариантности формы выражения (10) по отношению к преобразованию $z\to z+c$, где c — произвольная константа, находим следующие более простые интегральные соотношения «интегралы»:

$$\int_{-1}^{1}\mu d\mu\int_{0}^{\infty}\exp((\alpha-\sigma)vt)\,I_0(z, \mu, t)\,dt=\mathfrak{Z}_1=\text{const},$$

$$\int_{-1}^{1}\mu d\mu\int_{0}^{\infty}\exp((\alpha-\sigma)vt)\,I_0(z, \mu, t)\left(z+\mu\left(\sigma\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\right)^{-1}\right)dt=\mathfrak{Z}_2=\text{const}. \tag{11}$$

Из (10) с учетом явного выражения для $P_2(\mu)$ и формул (11) нетрудно получить следующее интегральное соотношение:

$$2z\mathfrak{C}_2-z^2\mathfrak{C}_1+2\left(\sigma\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\right)^{-1}\int_{-1}^{1}\mu d\mu\int_{0}^{\infty}\exp((\alpha-\sigma)vt)\times$$

$$\times\left(\mu^2\left(\sigma\left(1-\frac{x_2}{5}\right)\right)^{-1}-\frac{vt}{3}\right)I_0(z, \mu, t)\,dt=\mathfrak{C}_3=\text{const},\ z\in(a, b). \tag{12}$$

Заметим, что соотношения (11) являются непосредственными обобщениями интеграла потока и K-интеграла [4]. Отметим также, что первое из выражений (11) справедливо и при $T=\infty$, если $B<\infty$, и при достаточно больших t имеет место неравенство $\exp((\alpha-\sigma)vt)\iiint_{V_3}dV\int_{\Omega}g_1(\mathbf{r}, \Omega, t)\times\times d\Omega\leqslant g_2(t)$, где $g_2(t)$ — монотонно убывающая функция.

Summary

The method of obtaining the integral relations (vector in particular) for non-stationary radiative transfer equation in case of scattering media of different configuration is proposed. It is based on the use of general invariance relations and the information on asymptotic behaviour of non-stationary radiative transfer equation under $t\to\infty$. With the help of the proposed approach a set of new integral relations (integrals) has been got. The generalization of flow integral and K-integral in case of non-conservatively homogeneous layer, irradiated by non-stationary sources are given. The integral relations presented in the article are of interest for solving the inverse problems on the radiative transfer theory.

Литература

1. Роговцов Н. Н., Самсон А. М. Интегральные соотношения и величины в теории многократного рассеяния света в однородных и неоднородных средах. Минск, 1976 (Препринт / ИФ АН БССР: 91). 2. Соболев В. В. // Астрофизика. 1984. Т. 20, № 1. С. 123—132. 3. Колесов А. К. // Астрофизика. 1985. Т. 22, № 1. С. 177—187. 4. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972. 5. Роговцов Н. Н. // Журнал прикл. спектроскопии. 1981. Т. 34, № 2. С. 335—342. 6. Роговцов Н. Н. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 5. С. 420—423. 7. Роговцов Н. Н. // Журнал прикл. спектроскопии. 1981. Т. 35, № 6. С. 1044—1050. 8. Минин И. Н. // Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск, 1971. С. 59—73. 9. Романова Л. М. // Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света. Минск, 1971. С. 74—92. 10. Зеге Э. П., Кацев И. Л. Временные асимптотические решения уравнения переноса излучения и их применение. Минск, 1973 (Препринт / ИФ АН БССР).

Белорусская государственная политехническая академия

Поступило 26.10.92