

УДК 629.7 + 531.383

А. А. ЛОБАТЫЙ, А. Ю. БУМАЙ

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

Рассматривается задача оценивания информации, содержащейся в случайных сигналах, поступающих от различных источников – измерителей. При этом предполагается, что оцениваемый случайный процесс и выход измерителя при математическом описании задачи представляют собой векторные случайные процессы. При этом размерность вектора измерений может быть больше, чем размерность вектора оцениваемого процесса. Проведен анализ аналитических методов и алгоритмов оценивания, основанных на определении основных вероятностных характеристик случайного процесса как априорными, так и апостериорными методами при различных критериях оптимальности. На основе проведенного анализа рассмотрена задача комплексирования измерителей случайного процесса в общей постановке на основе предложенного критерия максимума апостериорного правдоподобия, объединяющего критерий максимума правдоподобия и критерий максимума апостериорной вероятности, на основе чего разработана общая методика комплексирования. Приведенный пример комплексирования фильтров показывает работоспособность предложенного метода. Данный подход к построению алгоритмов оценивания многомерных случайных процессов позволяет повысить точность оценивания, так как учитывает дополнительную информацию и комплексную её обработку.

Ключевые слова: оценивание, критерий, плотность вероятности, фильтрация, комплексирование.

Введение

Среди задач оптимальной обработки информации значительное место занимают задачи оптимального оценивания параметров многомерных случайных в условиях воздействия на них различных помех (неопределенностей). В математической статистике оцениванием называют обработку данных измерений (наблюдений) с целью уменьшения влияния случайных факторов (ошибок) [1, 2]. К системам, решающим такие задачи, можно отнести имеющие большое распространение различные навигационные системы, устанавливаемые на движущихся объектах (ДО), которые перемещаются как поземной или водной поверхности, так и в воздушном или космическом пространстве. Назначением таких навигационных систем является определение собственного положения относительно заданной системы координат. При этом если перемещение ДО происходит в пределах Земли, то неподвижную систему координат «привязывают» к Земле, если движение ДО происходит в пределах солнечной системы, то – к Солнцу и так далее.

Одними из самых распространенных ДО являются беспилотные летательные аппараты (БЛА), представляющие широкий класс самодвижущихся летательных аппаратов, различающихся предназначением, принципами построения, выполняемыми задачами. Для непосредственного измерения навигационных параметров или физических величин, которые используются для определения этих параметров на борту БЛА, применяются различные устройства и системы: инерциальные навигационные системы (как правило, бесплатформенные); радиотехнические высотомеры и измерители скорости; барометрические и геомагнитные датчики; измерители воздушного давления и прочие приборы, основанные на различных физических принципах. Среди внешних источников информации о навигационных параметрах, находящихся за пределами БЛА, наибольшее распространение имеют спутниковые навигационные системы (СНС), к которым относятся системы GPS, ГЛОНАСС, DORIS, Galileo, Beidou [3, 4, 5]. К дополнительным источникам навигационной информации можно также отнести системы телеме-

трии, установленные как на борту БЛА, так и на наземных пунктах управления (радиомаяки и т. п.). Навигационная информация, поступающая от различных источников, как правило, отличается точностью и достоверностью, так как получается на основе различных физических принципов, каждый из которых имеет свою природу неопределенностей. Всё это ставит на повестку дня задачу комплексирования различных источников информации для повышения точности и достоверности выделения полезной составляющей. Принципы комплексирования измерителей могут быть различными, основанными на различиях у измерителей и той же физической величины спектральных, амплитудных или иных информационных характеристик.

Задача оценивания вероятностных характеристик случайного процесса

Рассмотрим общую постановку задачи оценивания вероятностных характеристик многомерного случайного процесса с помощью многомерного измерителя. В общем случае система уравнений, описывающая эволюцию состояния исследуемой системы (например – движение БЛА, как и любого ДО) с учетом неопределенностей представляет собой пример функционального представления модели динамической системы как нестационарного нелинейного управляемого объекта, подверженно-го действию возмущений [6]:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \varphi(X, t) + W(t)U(t) + H(t)\xi(t), \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(X, t)$ – в общем случае нелинейная векторная функция, $X = [x_1 \dots x_n]^T = X(t)$ – вектор переменных, описывающих пространство состояний системы, $X \in R^n$, где R^n – n -мерное евклидово пространство векторов. $U = [u_1 \dots u_h]^T = U(t)$ – вектор управлений, $U \in R^h$. $\xi = [\xi_1 \dots \xi_n]^T = \xi(t)$ – вектор белых шумов (возмущений) с матрицей интенсивностей $G(t)$, характеризующий неопределенности, оказывающие влияние на эволюцию $X(t)$, $W(t)$ и $H(t)$ – матрицы переменных (в общем случае) коэффициентов.

Заметим, что математическую модель практически любого случайного процесса можно представить как результат прохождения белого шума через соответствующий формирующий фильтр, представляющий собой совокупность

математических выражений, с помощью которых из белого шума получают случайный процесс с заданной корреляционной функцией. Добавив выражения, описывающие формирующий фильтр, к уравнению (1), получим математическое представление векторного марковского процесса. Для анализа эволюции такого процесса, описываемого уравнением (1), удобно использовать уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (в западных источниках – уравнение Фоккера–Планка) для многомерной функции плотности вероятности $f(X, t)$, которое имеет вид [1, 6]:

$$\frac{\partial f(X, t)}{\partial t} = -\nabla_x^T \pi(X, t), \quad f(X, t_0) = f_0(X_0), \quad (2)$$

где $\pi(X, t)$ – вектор плотности потока вероятности вида

$$\pi(X, t) = A(X, t)f(X, t) - \frac{1}{2}[\nabla_x^T B(X, t)f(X, t)]. \quad (3)$$

∇_x – векторный оператор дифференцирования (оператор градиента), который имеет вид: $\nabla_x^T = [\partial/\partial x_1 \dots \partial/\partial x_n]$, n – размерность вектора $X(t)$. $A(X, t)$ и $B(X, t)$ соответственно, вектор сноса и матрица диффузии, которые называются также локальными характеристиками марковского процесса и определяются на основе введения в рассмотрение таких понятий, как стохастические интеграл – интегралы по времени от белых шумов. Заметим, что стохастические интегралы вычисляются как предел в среднем квадратическом суммы, каждый член которой представляет собой произведение элементарного подинтервала на значение соответствующей функции либо вначале каждого подинтервала (стохастический интеграл Ито), либо в середине каждого подинтервала (симметризованный стохастический интеграл Стратоновича-Фиска) [1, 6]. Не смотря на то, что интегралы Ито требуют осторожного обращения при замене переменных и интегрировании по частям, они удобнее при решении ряда задач анализа и синтеза стохастических систем, так как в выражении для вектора сноса $A(X, t)$ отсутствует дополнительное слагаемое, связывающее его с вектором $\xi(t)$. При такой трактовке стохастических интегралов в форме Ито и процесса (1) выражения для $A(X, t)$ и $B(X, t)$ имеют вид: $A(X, t) = \varphi(X, t) + W(X, t)U(X, t)$, $B(X, t) = H(t)G(t)H^T(t)$.

Нахождение решения уравнения (2) особенно для многомерных систем представляет собой неразрешимую задачу, которая существенно упрощается при применении различных способов аппроксимации функции $f(X, t)$. Наиболее распространенным является применение двухмоментной гауссовой аппроксимации $f(X, t)$, основанной на применении центральной предельной теоремы теории вероятностей. Выражение для гауссовой многомерной плотности вероятности имеет вид [1, 6]:

$$f(X, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\theta(t)|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (X(t) - m_x(t))^T \theta^{-1}(t) (X(t) - m_x(t)) \right\}. \quad (4)$$

В выражении (5) $|\theta(t)|$ – определитель ковариационной матрицы $\theta(t)$ вектора $X(t)$, $m_x(t)$ – математическое ожидание вектора $X(t)$. В скалярной форме выражение (4) имеет вид:

$$f(X, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\theta|}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2|\theta|} \sum_{p,q=1}^n \theta^{pq} (x_p - m_{xp})(x_q - m_{xq}) \right\}, \quad (5)$$

где θ^{pq} – алгебраическое дополнение элемента θ_{pq} в определителе $|\theta|$. Здесь аргумент t для упрощения записи опущен.

Задача вероятностного анализа процесса $X(t)$ упрощается, если уравнение, описывающее эволюцию процесса (1), является линейным. Обоснованность линеаризации системы (1) обусловлена малой степенью отклонений параметров возмущённого движения объекта (например, БЛА) от их номинальных значений. Обычно принимается, что если отклонения входных параметров систем $\delta U(t)$ и вызываемые ими отклонения выходных параметров $\delta X(t)$ не превосходят 3–5% номинальных значений, то такое требование выполняется, что даёт основание представлять возмущённое движение в виде линейной комбинации $U(t) = U^*(t) + \delta U(t)$, $X(t) = X^*(t) + \delta X(t)$ [1]. Параметры, обозначенные звёздочкой, отвечают номинальному невозмущённому движению. Объединяя в одну систему уравнения номинального и возмущённого движения, получим каноническую форму математической модели состояния линейной (линеаризованной) нестационарной системы:

$$\dot{X}(t) = D(t)X(t) + W(t)U(t) + H(t)\xi(t), \quad (6)$$

$$X(t_0) = X_0.$$

$D(t)$, $W(t)$, $H(t)$ – матрицы коэффициентов. Из уравнения (6) достаточно просто получают дифференциальные уравнения для вектора математических ожиданий $m_x(t) = M[X(t)]$ и ковариационной матрицы $\theta(t) = M[(X(t) - m_x(t))[X(t) - m_x(t)]^T]$ (здесь $M[\dots]$ – операция математического ожидания – «осреднения») вектора $X(t)$, которые имеют вид:

$$\dot{m}_x(t) = A(t)m_x(t) + W(t)U(t), \quad m_x(t_0) = m_{x0}. \quad (7)$$

$$\dot{\theta}(t) = D(t)\theta(t) + \theta(t)D^T(t) + H(t)G(t)H^T(t), \quad (8)$$

$$\theta(t_0) = \theta_0.$$

Задачи определения наилучших (оптимальных) значений процесса $X(t)$ на основании имеющихся наблюдений в виде вектора $Z(t_1)$ в зависимости от того, как расположен момент времени t_1 по отношению к моменту времени t представляют собой задачи оценивания (фильтрации, сглаживания или экстраполяции). Задача фильтрации является основной. Рассмотрим эту задачу, учитывая, что совокупность выходов измерителей процесса $X(t)$ представляет собой вектор $Z = [z_1 \dots z_m]^T = Z(t)$, $Z \in R^m$. Вектор наблюдений $Z(t)$ связан с вектором состояния $X(t)$ нелинейной векторной функцией $C(X, t)$. При этом наблюдение (измеритель) имеет аддитивную помеху $\zeta(t)$, обусловленную технологическими и внешними факторами, не связанными с процессом $X(t)$:

$$Z(t) = C(X, t) + \zeta(t). \quad (9)$$

Обычно $\zeta(t)$ принимается векторным центрированным гауссовым белым шумом с матрицей интенсивностей $Q(t)$. Обоснованность такого допущения основана на том, что в пределах полосы пропускания измерителя величина спектральной плотности шума $\zeta(t)$ является (принимается) постоянной.

Полной вероятностной характеристикой $X(t)$ в момент времени t при измерении вектора $X(t)$ является условная апостериорная функция плотности вероятности, обозначаемая $f(X, t) = f(X, t | Z, \tau)$. Эволюция $\hat{f}(X, t)$ описывается интегро-дифференциальным уравнением Стратоновича-Кушнера для апостериорной плотности вероятности [1, 7]:

$$\frac{\partial \hat{f}(X, t)}{\partial t} = -\nabla_x^T \hat{\pi}(X, t) - \frac{1}{2} \left[\rho(\hat{X}, Z, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\hat{X}, Z, t) \hat{f}(X, t) dX \right] \hat{f}(X, t), \quad (10)$$

где

$$\hat{\pi}(X, t) = A(X, t) \hat{f}(X, t) - \frac{1}{2} \left[\nabla_x^T (B^T(X, t) \hat{f}(X, t)) \right]^T. \quad (11)$$

$\rho(\hat{X}, Z, t)$ – функция невязки, вычисляемая по формуле:

$$\rho(\hat{X}, Z, t) = \left[Z(t) - C(\hat{X}(t)) \right]^T Q^{-1}(t) \left[Z(t) - C(\hat{X}(t)) \right]. \quad (12)$$

Уравнение Стратоновича-Кушнера не может быть решено непосредственно не только в силу трудностей вычислений, но и в связи с тем, что в нем присутствует истинное значение оцениваемого процесса $X(t)$, которое по условию задачи не может быть определено. При решении практических задач фильтрации, как правило, требуется определить оптимальную апостериорную оценку $\hat{X}(t) = X(t | Z)$. В качестве критерия оптимальности чаще всего рассматривается минимум среднего квадрата ошибки оценивания – математическое ожидание функции $[X(t) - \hat{X}(t)]^2$. В то же время критерием оптимальности может быть и максимум функции $\hat{f}(X, t)$ (максимум апостериорной вероятности – МАВ), при котором:

$$\hat{X}_{\text{МАВ}}(t) = \operatorname{argmax}_X \hat{f}(X, t) = \operatorname{argmax}_X f(X | Z). \quad (13)$$

При гауссовой аппроксимации $\hat{f}(X, t)$, как показано в [7], выражения для оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ имеют тот же вид, что и при квадратичном критерии.

В качестве оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ обычно рассматривается условное математическое ожидание $X(t)$, вычисляемое как интеграл вида:

$$\hat{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \hat{f}(X, t) dX. \quad (14)$$

Так как найти точное значение интеграла (14) с учетом (1), (9) и (10) практически невозможно, то применяют так называемые субоптимальные алгоритмы, основанные на различ-

ных способах аппроксимации нелинейных функций $\varphi(X, t)$ и $C(X, t)$ (кусочно-полиномиальная, кусочно-линейная). Распространенной и удобной для использования является линейная аппроксимация данных нелинейных функций. При этом выражения (6) и (9) принимают вид:

$$\dot{X} = D(t)X(t) + W(t)U(t) + H(t)\xi(t), \quad (15)$$

$$X(t_0) = X_0,$$

$$Z(t) = C(t)X(t) + \zeta(t). \quad (16)$$

$\zeta(t)$ – белый шум измерителя, $C(t)$ – матрица коэффициентов.

В простейшем случае линейной постановки задачи, когда процесс $X(t)$ описывается уравнением (15), а измеритель – выражением (16), вектор сноса имеет вид $A(X, t) = D(t)X(t) + W(t)U(t)$, а матрица диффузии равна интенсивности шума $\xi(t)$ $B(X, t) = G(t)$. При этом дифференциальное уравнение для определения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}(t) &= D(t)\hat{X}(t) + W(t)U(t) + \\ &+ R(t)C^T(t)Q^{-1}(t)[Z(t) - C(t)\hat{X}(t)], \quad (17) \\ \hat{X}(t_0) &= M[X_0]. \end{aligned}$$

В выражении (17) $R(t)$ – апостериорная корреляционная матрица, дифференциальное уравнение для которой имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) &= D(t)R(t) + R(t)D^T(t) + \\ &+ H(t)G(t)H^T(t) - R(t)C^T(t)Q^{-1}(t)C(t)R(t), \quad (18) \\ R(t_0) &= R_0. \end{aligned}$$

Выражения (17) и (18) представляют собой классический фильтр Калмана (Калмана-Бьюси) [8]. Заметим, что при использовании данного фильтра в различных системах обработки информации необходимо учитывать, что математические модели процессов $X(t)$ и $Z(t)$ могут отличаться от их реальных физических представлений по причине их неточной идентификации, что может приводить к существенным методическим ошибкам фильтрации [9].

Задача комплексирования измерителей и фильтров

В большинстве практических задач считается, что размерность вектора измерений $Z(t)$ меньше размерности вектора процесса $X(t)$ ($m \leq n$), однако возможна постановка задачи, когда для одной из составляющих $x_i(t)$ процесса $X(t)$ име-

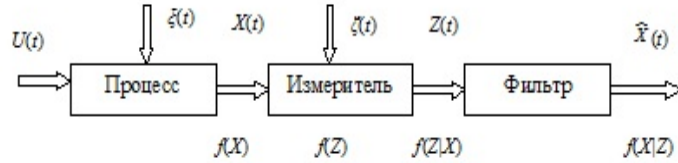


Рис. 1. Структура процесса фильтрации

ется несколько измерителей ($m > n$). В этом случае для повышения точности и достоверности оценивания процесса $X(t)$ необходимо осуществлять комплексирование измерителей и соответствующих фильтров. В работе [10] предлагается метод комплексирования, основанный на пошаговой обработке результатов, полученных от нескольких фильтров Калмана. Метод основан на использовании перехода от гауссовых апостериорных оценок процесса $X(t)$ к нечетким функциям принадлежности с последующей обработкой полученной информации по правилам нечеткой логики. Следует однако заметить, что практическая реализация данного подхода требует больших вычислительных затрат информационной системы.

Процессы измерения и фильтрации можно представить в виде структурной схемы (рис. 1), где для упрощения записи обозначены плотности вероятности:

$$f(X) = f(X, t), \quad f(Z) = f(Z, t),$$

$$f(Z|X) = f(Z, t|X, t) \quad f(X|Z) = \hat{f}(X, t|Z, t).$$

Априорные и апостериорные плотности вероятности связаны между собой известной формулой Байеса:

$$f(X|Z)f(Z) = f(Z|X)f(X). \quad (19)$$

В качестве оценки вектора состояния в ряде случаев может рассматриваться функция $f(Z|X)$, которая характеризует условную плотность вероятности множества измерений $Z(t)$ при фиксированном значении $X(t)$. Оптимальным считается значение $X(t)$, при котором условная плотность вероятности $f(Z|X)$ имеет максимальное значение [11]. Такой критерий называется критерием максимума правдоподобия (МП). Его целесообразно применять при комплексировании нескольких измерителей одного параметра при отсутствии оптимальной фильтрации:

$$\hat{X}_{МП}(t) = \operatorname{argmax}_X f(Z|X). \quad (20)$$

В общем случае критерий МАВ (13) может содержать больше информации о процессе $X(t)$,

чем критерий МП (20), но в некоторых случаях, когда отсутствует фильтрация и размерность вектора измерений $Z(t)$ больше размерности вектора процесса $X(t)$, критерий МП может представить более точный результат получения оптимальной оценки $X(t)$. Обоснуем данное предположение.

Так как безусловная плотность вероятности $f(Z)$ не зависит непосредственно от $X(t)$, то значения $X_{МП}(t)$ в соответствии с формулами (19) и (20) могут определяться путем максимизации по $X(t)$ совместной плотности $f(Z|X)f(X)$. Для гладких и дифференцируемых плотностей вероятности из формулы (19) следует:

$$\frac{\partial f(X|Z)}{\partial X} f(Z) = \frac{\partial f(Z|X)}{\partial X} f(X) + f(Z|X) \frac{\partial f(X)}{\partial X}. \quad (21)$$

В выражении (21) обозначено $\frac{\partial f(\dots)}{\partial X} = \nabla_x^T [\partial/\partial x_1 \dots \partial/\partial x_n]$.

Из выражения (21) следует, что необходимым условием МАВ является:

$$\left[\frac{\partial f(X|Z)}{\partial X} \right]_{X(t) = \hat{X}_{МАВ}(t)} = 0. \quad (22)$$

Соответственно необходимым условием МП является:

$$\left[\frac{\partial f(Z|X)}{\partial X} \right]_{X(t) = \hat{X}_{МП}(t)} = 0. \quad (23)$$

Так как для многомерных процессов определение плотностей вероятности не представляется возможным, то в качестве оценок рассматривают первые $m_x(t) = M[X(t)] = X(t)$ и вторые $R_x(t) = M[(X(t) - X(t))^2]$ апостериорные вероятностные моменты этих процессов, на основе гауссовой аппроксимации плотностей вероятностей, что имеет место при калмановской фильтрации. При наличии нескольких измерителей и соответственно – нескольких алгоритмов фильтрации процесса $X(t)$ для их комплексирования рассмотрим условную апостериор-

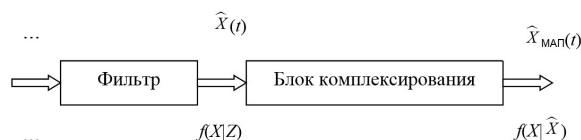


Рис. 2. Структура процесса комплексирования

ную плотность вероятности, которую обозначим $f(X | X)$:

$$f(X | \hat{X}) = \prod_{k=1}^m f(X | Z) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \prod_{k=1}^m R_k}} \times \exp \left\{ -\sum_{k=1}^m \frac{(x_k - \hat{x}_k)^2}{2R_k} \right\}. \quad (24)$$

В выражении (24) R_k и \hat{x}_k – апостериорные вероятностные моменты k -х выходов фильтров Калмана. Критерием комплексирования (оптимальной оценки процесса $X(t)$) в этом случае будет максимум апостериорного правдоподобия (МАП), которому соответствует выражение:

$$\hat{X}_{\text{МАП}}(t) = \operatorname{argmax}_{\hat{X}} f(X | \hat{X}). \quad (25)$$

Таким образом, в схему, представляющую структуру процесса фильтрации (рис. 1), необходимо добавить блок комплексирования (рис. 2)

Полученные апостериорные оценки $\hat{x}_i(t) = [\hat{x}_{i1} \dots \hat{x}_{im}]^T$ ($i = \overline{1, m}$) переменной $x_i(t)$ являются случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями R_i , вычисленными на основе решения уравнений (17) и (18).

Предполагая, что существует совместная плотность вероятности апостериорных оценок $f(X | X)$: вектора $X(t)$ необходимым условием МАП является:

$$\left[\frac{\partial f(Z | \hat{X})}{\partial X} \right]_{X(t) = \hat{X}_{\text{МАП}}(t)} = 0. \quad (26)$$

Соответственно оценка максимального правдоподобия по апостериорной дисперсии будет корнем уравнения:

$$\left[\frac{\partial f(X | \hat{X})}{\partial X} \right]_{R(t) = R_{\text{МАП}}(t)} = 0. \quad (27)$$

При m независимых наблюдениях $z_k(t)$ и m фильтров Калмана ($k = \overline{1, m}$) значения апостериорных характеристик $\hat{x}_{\text{МАП}}$ и $R_{\text{МАП}}$ случайного процесса $x(t)$, при использовании критерия МАП в соответствии с (26) и (27) вычисляются из выражения (24) по формулам:

$$\hat{x}_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{x}_k, \quad \hat{R}_{\text{МАП}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m R_k. \quad (28)$$

Заметим, что в условиях наличия неопределенностей точность апостериорного оценивания по критерию МАП в соответствии с выражениями (28) будет тем выше, чем больше число измерителей и фильтров. Это не сложно доказывается математически.

Пример

В качестве примера рассмотрим для наглядности одномерную систему с двумя измерителями, эволюция которой характеризуется уравнениями (15) и (16), преобразованными к виду:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \xi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (29)$$

$$z_1(t) = c_1 x(t) + \zeta_1(t) \quad (30)$$

$$z_2(t) = c_2 x(t) + \zeta_2(t). \quad (31)$$

где $\xi(t)$ – белый шум процесса интенсивности g и $M[\xi] = 0$; $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ – соответствующие центрированные белые шумы измерителей $z_1(t)$ и $z_2(t)$ с интенсивностями q_1 и q_2 . Плотность вероятности процесса $x(t)$ гауссова вида:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_x}} \exp \left\{ -\frac{(x - m_x)^2}{2D_x} \right\}. \quad (32)$$

Для независимых наблюдений $z_1(t)$, $z_2(t)$ случайного процесса $x(t)$ и двух фильтров Калмана можно записать выражение для условной совместной апостериорной плотности вероятности $f(x | \hat{x}_1, \hat{x}_2)$:

$$f(x | \hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(x | z_1, \hat{x}_1) f(x | z_2, \hat{x}_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{R_{x_1} R_{x_2}}} \exp \left\{ -\frac{(x - \hat{x}_1)^2}{2R_{x_1}} - \frac{(x - \hat{x}_2)^2}{2R_{x_2}} \right\}, \quad (33)$$

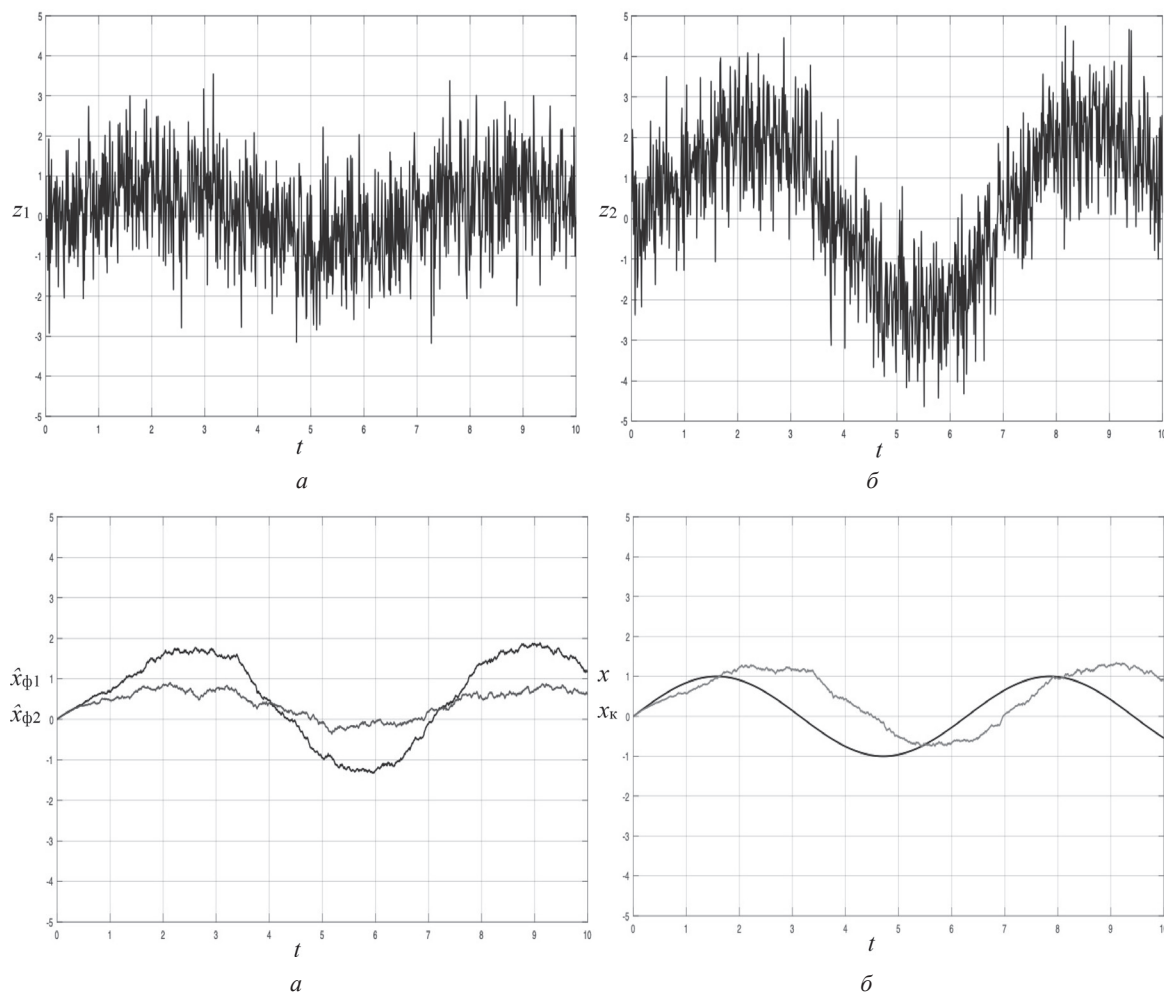


Рис. 3. результаты математического моделирования

где \hat{x}_1 и \hat{x}_2 , R_{x1} и R_{x1} – соответственно апостериорные математические ожидания и дисперсии, вычисленные на основе применения алгоритмов фильтра Калмана (17) – (18).

Оценка максимального апостериорного правдоподобия для среднего значения \hat{x} является корнем уравнения (25), которое в данном случае двух измерителей будет иметь корень $\hat{x}_{\text{МАП}} = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)$, который является несмещенной оценкой максимального апостериорного правдоподобия для среднего значения оцениваемого процесса $x(t)$.

На рис. 3 представлены результаты математического моделирования, выполненного в среде Matlab-Simulink. На рис. 3, а, б представлены графики изменения выходных сигналов измерителей. На рис. 3, в – графики изменения выходных сигналов фильтров. На рис. 3, г – график входного сигнала $x(t)$ и график сигнала, полученного в результате комплексирования двух фильтров $x_k = x_k(t) = \hat{x}_{\text{МАП}}$. Как по-

казали результаты, представленные на графиках, результирующий процесс $x_k(t)$ ближе к $x(t)$, чем выходные сигналы каждого из фильтров $\hat{x}_{\phi1}$ и $\hat{x}_{\phi2}$. Запозывание процессов $\hat{x}_{\phi1}$, $\hat{x}_{\phi2}$ и $x_k(t)$ относительно $x(t)$ обусловлено инерционностью математической модели оптимальной обработки информации (фильтра Калмана). Полученные результаты подтверждают обоснованность приведенных выше теоретических положений.

Заключение

На основе анализа существующих методов и алгоритмов оценивания многомерных случайных процессов предложен новый критерий оценивания – максимум апостериорного правдоподобия. Обоснованность такого критерия основана на том, что интенсивное развитие технических систем ставит задачу получения оптимальной оценки информации, полученной от различных источников и соот-

ветственно отфильтрованной по критериям и правилам оптимальной обработки информации на основе известных математических моделей оцениваемых процессов и измерителей.

Полученные выражения для комплексирования апостериорных оценок процесса являются обоснованными в рамках линейных математических моделей процессов и измерите-

лей, а также – принятых допущений о гауссовом характере имеющихся неопределенностей. Результаты математического моделирования показали работоспособность предложенного метода комплексирования. Метод позволяет решать ряд практических задач. При этом точность и достоверность полученных результатов будет определяться обоснованностью соответствующих допущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Красовский А. А.** Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
2. **Rogers R. M.** Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, Third Edition / Robert M. Rogers – Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. – 326 p. ISBN-13: 978-1563479274.
3. **Алешин Б. С., Веремеенко К. К., Черноморский А. И.** Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / под ред. Б. С. Алёшина, К. К. Веремеенко, А. И. Черноморского. – М.: Физматлит, 2006. – 424 с.
4. **Zipfel P. H.** Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics, Third Edition / Peter H. Zipfel – Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. – 661 p. ISBN-13: 978-1624102509.
5. **Siouris G. M.** Missile Guidance and Control Systems / George M. Siouris – Berlin: Springer Science+Business Media, 2006. – 666 p. ISBN 978-0-387-21816-8
6. **Пугачев, В. С.** Теория стохастических систем / В. С. Пугачев, И. Н. Сеницын. – М.: Логос, 2004. – 1000 с.
7. **Лобатый А. А.** Оптимальное оценивание случайного процесса по критерию максимума апостериорной вероятности / А. А. Лобатый, Ю. Ф. Яцына, Н. Н. Арефьев // Системный анализ и прикладная информатика. – 2016. – № 1. – С. 35–41.
8. **Сеницын И. Н.** Фильтры Калмана и Пугачёва / И. Н. Сеницын. – М.: Университетская книга, 2006. – 640 с.
9. **Лобатый А. А.** Особенности применения фильтров Калмана-Бьюси в комплексах ориентации и навигации / А. А. Лобатый, А. С. Бенкафо // Доклады БГУИР. – 2013. – № 5(75). – С. 67–71.
10. **Лобатый А. А.** Пошаговая нечеткая коррекция алгоритма фильтрации случайных сигналов / А. А. Лобатый, А. С. Радкевич // Системный анализ и прикладная информатика. – 2019. – № 1. – С. 35–40.
11. **Сейдж Э.** Теория оценивания и её применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс. – М.: «Связь», 1976. – 496 с.

REFERENCES

1. **Krasovskij A. A.** Handbook of the theory of automatic control / ed. A. A. Krasovskogo. – М.: Nauka, 1987. – 712 p.
2. **Rogers R. M.** Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, Third Edition / Robert M. Rogers – Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007. – 326 p. ISBN-13: 978-1563479274
3. **Aleshin B. S., Veremeenko K. K., Chernomorskij A. I.** Orientation and navigation of moving objects: modern information technology / ed. B. S. Aljoshina, K. K. Veremeenko, A. I. Chernomorskogo. – М.: Fizmatlit, 2006. – 424 p.
4. **Zipfel P. H.** Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics, Third Edition / Peter H. Zipfel – Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. – 661 p. ISBN-13: 978-1624102509
5. **Siouris G. M.** Missile Guidance and Control Systems / George M. Siouris – Berlin: Springer Science+Business Media, 2006. – 666 p. ISBN 978-0-387-21816-8
6. **Pugachev V. S.** Theory of stochastic systems / V. S. Pugachev, I. N. Sinicyn. – М.: Logos, 2004. – 1000 p.
7. **Lobaty A. A.** Optimal estimation of a random process by the criterion of maximum a posteriori probability / A. A. Lobaty, Ju. F. Jacyna, N. N. Aref'ev // Sistemyj analiz i prikladnaja informatika. – 2016. – № 1. – S. 35–41 p.
8. **Sinicin I. N.** Kalman and Pugachev filters / I. N. Sinicin. – М.: Universitetskaja kniga, 2006. – 640 p.
9. **Lobaty A. A.** Features of the application of Kalman-Bucy filters in orientation and navigation systems / A. A. Lobaty, A. S. Benkafo // Doklady BGUIR. – 2013. – № 5(75). – S. 67–71 p.
10. **Lobaty A. A.** Step-by-step fuzzy correction of a random signal filtering algorithm / A. A. Lobatyj, A. S. Radkevich // Sistemyj analiz i prikladnaja informatika. – 2019. – № 1. – S. 35–40 p.
11. **Sage J.** Theory of evaluation and its application in communication and management / J. Sage, J. Mels. – М.: «Svjaz'», 1976. – 496 p.

Поступила
01.01.2020

После доработки
27.02.2020

Принята к печати
01.03.2020

LOBATY A. A., BUMAI A. Y.

FEATURES OF CONSTRUCTION OF EVALUATION ALGORITHMS MULTIDIMENSIONAL RANDOM PROCESSES

Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

The problem of evaluating the information which is present in random signals from various sources-meters is considered. It is assumed that the random process which is evaluated and the meter output according mathematical description of the problem are vector random processes. In this case, the dimension of the vector of the measurement can be larger than the dimension of the vector of the process being evaluated. The analysis of analytical methods and algorithms of the estimation that based on the determination of the main probabilistic characteristics of a random process by both the a priori and the a posteriori methods with various optimality criteria is carried out. Based on the analysis, the problem of complexing of the meters of the random process is considered according the proposed criterion for the maximum of posterior verisimilitude, combining the criterion of maximum verisimilitude and the criterion of maximum the a posteriori probability, general methodology complexing is developed. Proposed example of the complexing shows the efficiency of the proposed method. This approach to the construction of the algorithms of the evaluation for multidimensional random processes allows to increase the accuracy of estimation, since it takes into account additional information and its complex processing.

Keywords: *estimation, criterion, probability density, filtration, complexing.*



Лобатый Александр Александрович, доктор технических наук, профессор. С 2000 года возглавляет кафедру «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета.

Lobaty A. A., doctor of Science, Professor. From 2000 he heads of the department «Information Systems and Technologies» at the Belarusian National Technical University.

Тел: + 375 (29) 346–82–56.

E-mail: lobaty@bntu.by



Бумай Андрей Юрьевич, аспирант кафедры «Информационные системы и технологии» Белорусского национального технического университета.

Bumai A. Y., PhD student of « Information Systems and Technologies» department of Belarusian National Technical University.

E-mail: andrei.bumai@gmail.com